한국측지학회지, 第6卷, 第1號, pp. 42~47, 1988年 6月 30日

水準測量에 있어서 自由網調整法의 적용에 關한 研究

The Study on the Application of Free Networks in Leveling

吳 昌 洙*
Oh Chang-Soo

要 旨

本 研究에서는 自由網 概念에 의한 水準網調整에 偏倚推定法을 적용하였으며 이때 偏倚係數에 따른 標高誤差의 分布를 해석하므로써 최적의 偏倚係數를 결정하였다. 또한 1點固定 및 2點固定網調整과 比較考察하여 自由網調整技法의 유용성을 제시하는데 목적을 두고 있다.

ABSTRACT

In this study bias estimation method was applied to the free leveling networks adjustment by the concepts of free leveling networks. Optimum bias coefficients were determined by analizing the distribution of height errors with regard to bias coefficients. The object of this study lies in suggesting the utilities of free leveling networks adjustment, comparing one fixed-point and two fixed-points leveling networks adjustment.

1. 序 論

우리나라 전역에 설치되어 있는 精密水準網은 대규모 토목공사 등의 垂直位置決定 뿐만 아니라 重力測量 등 여러 분야에도 이용되고 있다. 그러나 지각변동이나 수준점의 망실 또는 변위가 발생되었을때, 水準點에 대한 再測 및 再調整이 요구된다.

지금까지의 일반적인 水準網의 調整方法으로는 어느 한 곳의 평균해수면을 기준표고로 고정하거나 고루 분포된 몇 군데의 平均海水面을 결정함으로써 이들을 기준표고로 하여 조정하는 방법이 이용되어 왔다.[1)2)] 그러나 이와같은 固定點으로 이용하는 표고기준점에 있어서도 오차를 내포하고 있을 가능성이 있으며, 局部的인 區域에 있어서 水準點間의 상대표고차가 요구될 경우에는 自由網調整의 이용이 바람직하다고 할 수 있다.

본 연구에서는 自由網調整과 固定網調整을 比較分析하여 水準網에 대한 自由網調整의 유용성을 제시하는데 目的을 두고 있다.

自由網調整의 경우는 假定標高를 사용하여 해석하였으며 固定網은 1點固定과 2點固定의 두가지 경우에 대해 각 점 표고의 평균제곱근오차를 自由網의 경우와 비교하였다.

2. 自由網과 固定網 調整 理論

水準測量의 網平均에 있어서 인접점간의 比高를 觀測값으로하여 點 A에서 點 B까지의 比高에 관한 觀測方程式은 다음과 같다.

$$h_B - h_A + l = v \qquad (2\text{-}1)$$

여기서, h_A 및 h_B는 각 點의 假定標高 H_A, H_B의 補正값이며, l은

$$l = H_B - H_A - \Delta h \qquad (2\text{-}2)$$

이고, Δh는 관측比高이다.

또한 (2-1)의 v는

* 光州經商大學 講師

$$v=\bar{H}_B-\bar{H}_A-\Delta h \qquad (2\text{-}3)$$

이며, $\overline{H_B}$ 및 $\overline{H_A}$는 H_B 및 H_A의 평균 표고이다.

식'(2-1)을 행렬로 나타내면

$$AX+L=V \qquad (2\text{-}4)$$

이 된다. 여기서 X, L 및 V는 각각 h, l 및 v를 요소로 하는 벡터이며, A는 $n\times u$인 計劃行列이다.[4)5)]

또한 식 (2-4)의 A에 대해 일반적으로 다음 식 (2-5)가 성립한다.

$$CA^T=0 \qquad (2\text{-}5)$$

여기서 C는 각 요소가 1인 $1\times u$의 行벡터이며, 0은 각 요소가 零인 行벡터이다. 식 (2-4)에 있어서 일반적으로 경중률 행렬 P는 點들 사이의 거리의 역수를 대각요소로 한 對角行列을 이용한다.

水準網에 관한 平均값 X_a는 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.[5)]

$$X_a=X_0-GA^TPL \qquad (2\text{-}6)$$

여기서, X_0 및 X_a는 식 (2-2) 및 식 (2-3)에 있어서 水準點의 H 및 $\bar{H}$를 각 要素로 한 列벡터이며, G는

$$G=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & N^{-1}_{22}\end{bmatrix} \qquad (2\text{-}7)$$

이다. 여기서 N_{22}는 식 (2-4)에 대한 正規行列

$$N=\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12}\\ N_{21} & N_{22}\end{bmatrix} \qquad (2\text{-}8)$$

의 小行列인 $(u-1)\times(u-1)$의 正方行列로서

$$\mathrm{rank}(N_{22})=\mathrm{rank}(N)=u-1 \qquad (2\text{-}9)$$

이다.

1點固定網調整의 경우 G는

$$G=N^r \qquad (2\text{-}10)$$

이며, N^r은 N의 反射型逆行列(Reflexive inverse)을 나타낸다. 또한 식 (2-6)과 식 (2-7)로부터

$$[X_a]_1=[X_0]_1 \qquad (2\text{-}11)$$

이 된다. 여기서 $[X_a]_1$은 X_a상의 첫번째 요소이며, 이 경우의 補正값 $[X]_1$은 0으로 고정되어 있다. 따라서 이를 水準網에 있어서 固定網調整이라 한다.

그러나 自由網調整의 G는 N의 擬似逆行列(Pseudo-inverse)으로서

$$G=N^+ \qquad (2\text{-}12)$$

이며, 이때의

$$X_a=N^+A^TPL_b+(I-N^+N)X_0 \qquad (2\text{-}13)$$

이므로 平均標高값은 假定標高값이 되며 이 가정표고값은 비교적 정확도가 높은 표고값을 이용하여야 한다.[6)7)]

식 (2-13)의 L_b는 Δh를 요소로 한 列 벡터이다.

1點固定網의 경우, 식 (2-13)에 대응하는 X_a값은

$$X_a=N^rA^TPL_b+(I-N^rN)X_0 \qquad (2\text{-}14)$$

이 되며, 식 (2-14)에서도 두번째 항은 소거되지 않으므로 平均標高를 假定標高로 하는 것은 自由網平均과 같다.

식 (2-13)과 식 (2-14)의 反射型逆行列 N^r과 擬似逆行列 N^+는 다음과 같이 구할 수 있다.

次元이 $u\times n$인 正規行列 N의 階數(rank)가 $u-1$인 경우 식 (2-4)에 있어서의 補正값의 平均값은

$$\hat{X}=-N^+A^TPL \qquad (2\text{-}15)$$

이며, 식 (2-5)의 조건하에서 다음 식이 성립한다.[5)8)]

$$C\hat{X}=0 \qquad (2\text{-}16)$$

다시, 식 (2-16)을

$$CX=0 \qquad (2\text{-}17)$$

로 놓으면 C 및 X는

$$C=[1, C_1],\ X^T=[x, X_1{}^T]^T \qquad (2\text{-}18)$$

이다. 식 (2-18)을 식 (2-17)에 대입하면

$$x=-C_1X_1 \qquad (2\text{-}19)$$

가 얻어지며, 또한 計劃行列 A는 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$A=[a,\ A_1] \qquad (2\text{-}20)$$

식 (2-20)을 식 (2-5)에 대입하면

$$a=-A_1C_1{}^T \qquad (2\text{-}21)$$

이 얻어진다. 그리고 식 (2-4)에 식 (2-19), 식 (2-20), 식 (2-21)을 적용하면 X_1에 관한 오차방정식은 다음과 같다.

$$A_1(I+C_1{}^TC_1)X_1+L=V \qquad (2\text{-}22)$$

또한, $N=A_1{}^TPA_1$ (2-23)

이라 하면 식 (2-22)의 正規行列 $\bar{N}$는

$$\bar{N}=(I+C_1^TC_1)\hat{N}(I+C_1^TC_1) \quad (2\text{-}24)$$

이다. Schur의 補助定理에 의해

$$(I+C_1^TC_1)^{-1}=I-1/uC_1^TC_1 \quad (2\text{-}25)$$

이므로 $\bar{N}^{-1}=(I-1/uC_1^TC_1)\hat{N}^{-1}(I-1/uC_1^TC_1)$ (2-26)

이 된다.[9]

그리고 식 (2-19)를 식 (2-20)의 제 2 식에 대입하면

$$X^T=X_1^T[-C_1^T, I]^T \quad (2\text{-}27)$$

이 얻어진다.

식 (2-22)에서 X_1의 경중률 계수행렬은 N^{-1}이므로 X의 경중률 계수행렬 Q_x는 경중률계수 전파법칙에 의해

$$Q_x=\begin{bmatrix} C_1\bar{N}^{-1}C_1^T & -C_1\bar{N}^{-1} \\ -\bar{N}^{-1}C_1^T & \bar{N}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}28)$$

이며, 또한 $N=A^TPA$ (2-29)

이므로 식 (2-20), 식 (2-21)에 대입하면

$$N=\begin{bmatrix} C_1\hat{N}C_1^T & -C_1\hat{N} \\ -\hat{N}C_1^T & \hat{N} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}30)$$

이다. 식 (2-25)를 식 (2-28), 식(2-29)에 적용하면

$$Q_xN=NQ_x=1/u\begin{bmatrix} u-1 & -C_1 \\ -C_1^T & UI-C_1^TC_1 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}31)$$

이 얻어진다. Q_xN 및 NQ_x는 대칭행렬이므로

$$NQ_xN=N, \ Q_xNQ_x=Q_x \quad (2\text{-}32)$$

이며, 擬似逆行列의 정의로부터

$$Q_x=N^+ \quad (2\text{-}33)$$

이고, 식 (2-31)과 식 (2-32)로부터

$$N^+=\begin{bmatrix} \frac{1}{u^2}C_1\hat{N}^{-1}C_1^T & -\frac{1}{u}C_1\hat{N}^{-1}\left(I-\frac{1}{u}C_1^TC_1\right) \\ -\frac{1}{u}\left(I-\frac{1}{u}C_1^TC_1\right)\hat{N}^{-1}C_1^T & \left(I-\frac{1}{u}C_1^TC_1\right)\hat{N}^{-1}\left(I-\frac{1}{u}C_1^TC_1\right) \end{bmatrix}$$

$$\equiv\begin{bmatrix} \frac{1}{u^2}C^1\hat{N}^{-1}C_1^T & -\frac{1}{u}C_1\hat{N}^{-1} \\ -\frac{1}{u}\hat{N}^{-1}C_1^T & \hat{N}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}34)$$

이 얻어진다.

固定網調整에 있어서 正規行列의 逆行列은 식 (2-7)과 같이

$$N^r=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{N}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}35)$$

이 된다.

自由網調整과 固定網調整의 觀測方程式의 최소제곱해를 각각 $\hat{X}f_i$, $\hat{X}f_r$라 하면 이들 간에는 다음 식 (2-36)과 같은 관계가 있다.

$$\hat{X}f_r=\hat{X}f_i+C^T\Delta \quad (2\text{-}36)$$

여기서 Δ는

$$\Delta=-\frac{1}{u}C_1\hat{X}_1 \quad (2\text{-}37)$$

이다. 즉 自由網調整에 의한 平均標高는 固定網調整에 의한 平均標高보다 일정량 Δ만큼 높은 것을 알 수 있다.

單位경중률에 대한 분산 $\hat{\sigma}_0^2$은 관측값에 대한 分散—共分散行列 ΣL_b가 정칙인 경우는

$$P=\Sigma L_b^{-1} \quad (2\text{-}38)$$

이며, $$\hat{\sigma}_0^2=\frac{\hat{V}^TP\hat{V}}{n-u+1} \quad (2\text{-}39)$$

이다. 또한 ΣL_b가 비정칙인 경우는

$$P=(\Sigma L_b+AZA^T)^{-1}=\Sigma L_b^+ \quad (2\text{-}40)$$

이며

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{\hat{V}^TP\hat{V}}{\mathrm{rank}(\Sigma L_b : A)-\mathrm{rank}(A)} \quad (2\text{-}41)$$

이다. 그리고 平均比高에 관한 分散—共分散行列 $\Sigma\Delta h$는

$$\Sigma\Delta h=\sigma_0^2A_1\hat{N}^{-1}A_1^T \quad (2\text{-}42)$$

이다.

3. 觀測 및 觀測값 解析

(1) 觀測

本 硏究에서 觀測된 水準網은 水準點 6點, 觀測路線이 13개 路線으로 이루어져 있으며 水準網의 槪略圖와 測量成果는 <그림 1>과 <표 1>에 나타나 있다.

固定網에 있어서는 1點固定과 2點固定으로 나누어 水準點 A의 標高인 100.00 m를 기지값으로 하여 1點固定水準網을 형성하였으며, 2點固定網의 경우는 點 A와 點 D의 표고인 100.00 m, 105.00 m를 기지표고로 하여, 2點固定網을 形成하였다.

自由網의 경우는 <표 2>의 표고값을 假定標高

표 1. 水準測量成果

노선	시점	종점	높이차(m)	거리(km)	노선	시점	종점	높이차(m)	거리(km)
l_1	B	A	5.013	1.40	l_8	F	A	10.014	0.95
l_2	B	D	2.985	1.03	l_9	B	C	10.014	1.82
l_3	D	C	6.987	1.20	l_{10}	F	C	15.016	1.66
l_4	C	E	10.014	1.71	l_{11}	F	E	25.017	1.14
l_5	D	E	17.013	1.42	l_{12}	A	E	14.982	2.00
l_6	D	A	1.982	1.27	l_{13}	F	B	4.981	1.42
l_7	F	D	7.982	0.60					

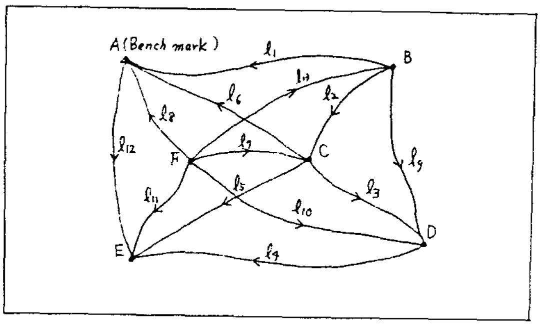

그림 1. 水準網의 槪略圖

로 하여 조정하였다.

표 2. 自由網調整의 假定標高

측 점	假定標高(m)
A	100.05
B	95.05
C	97.95
D	105.03
E	114.98
F	90.04

(2) 觀測값 解析

水準網調整에 있어서 自由網調整法과 1點固定 및 2點固定網調整法을 比較解析한 結果 다음과 같다.

自由網調整은 固定點을 설치하는 固定網의 경우와는 달리, 제약조건이 없이 水準網의 모든 점에 대해 상대적인 높이를 해석하기 때문에 觀測方程式의 係數行列이 非正則行列이 되는 특성이 있다. 따라서 이에 비정칙행렬의 解를 구할 수 있는 偏倚推定法의 적용이 필요하게 되며[6)10)] 본 연구에서는 편의계수를 미소하게 변화시키며, 偏倚係數에 대한 각점의 표고보정량과 반복회수를 해석한 결과는 〈표 3〉과 같다.

표 3. 偏倚係數에 따른 각점의 표고보정량 ($\times 10^{-2}$m)

편의계수 / 수준점	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
A	2.7321	2.7781	2.7828	2.7833	2.7833
B	3.9868	4.0772	4.0865	4.0874	4.0875
C	−6.3115	−6.4060	−6.4156	−6.4166	−6.4167
D	1.3663	1.3816	1.3832	1.3833	1.3833
E	−4.2327	−4.3268	−4.3364	−4.3374	−4 3375
F	2.4590	2.4958	2.4996	2.5000	2.5000
반복계산 회수	4	3	2	2	2

偏倚係數는 〈표 3〉과 같이 10^{-1}에서 10^{-5}까지 변화시켰으며 偏倚係數를 10^{-1}에서 10^{-2}으로 변화시켰을 때의 標高補正量의 변화는 0.01~0.0945 cm 이었고, 10^{-2}에서 10^{-3}으로 변화시킨 경우는 0.0016~0.0096 cm 로서 표고보정량의 변화가 적어 거의 무시할 정도의 값으로 수렴되었다. 또한 반복계산회수에 있어서도 偏倚係數가 10^{-3}일때 2회 반복계산으로 수렴되었다.

따라서 표고보정값의 변화와 반복계산 회수를 고려하여 볼 때 水準網의 自由網調整技法의 偏倚推定法의 偏倚係數는 10^{-3}이 적합함을 알 수 있었다.

그리고 自由網調整法과 1點固定 및 2點固定網調整法에 의한 水準網의 分散—共分散값을 계산하여 각점 표고의 평균제곱근오차를 구한 결과는 〈표 4〉 및 〈그림 2〉와 같다.

표 4. 자유망과 고정망의 각점표고에 대한 R.M.S.E($\times 10^{-2}m$)

수준점	자 유 망	고 정 망	
		1 점고정	2 점고정
A	0.8171	—	—
B	0.8171	1.2124	0.9950
C	0.7167	1.0909	0.8367
D	0.8171	1.3820	—
E	0.8171	1.2806	1.0440
F	0.7167	1.0630	0.8426

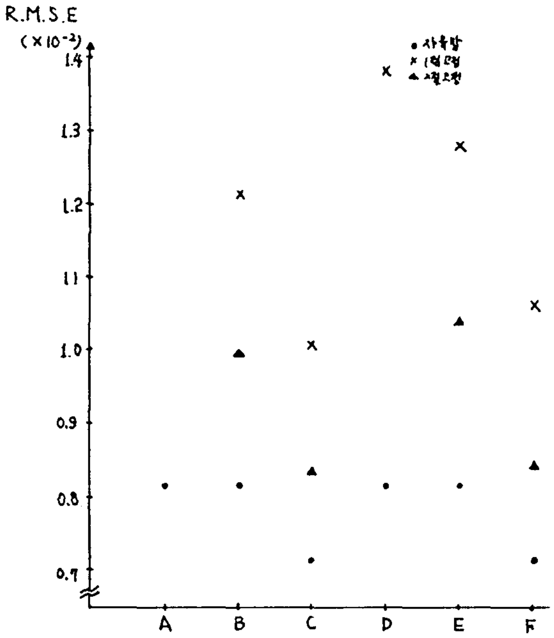

그림 2. 자유망과 고정망의 각점표고에 대한 R.M.S.E.

〈표 4〉와 〈그림 2〉에 나타낸 바와 같이 自由網調整技法을 적용하였을 때 각점 표고의 평균제곱근오차는 0.7167~0.8171 cm 로서 모든 점에 대하여 거의 동일하게 나타남을 알 수 있으며 1點固定網調整의 각점 표고 평균제곱근오차는 1.0630~1.3820 cm 로서, 自由網調整技法의 평균제곱근오차가 더 작게 되므로 水準網調整에 있어서 自由網調整法의 적용이 기대된다.

또한 1點固定網 및 2點固定網調整에 있어서 2點固定網調整의 標高 평균제곱근오차가 0.8367 ~1.0440 cm 로서 1點固定網보다 작게 나타났다.

따라서 自由網調整은 垂直變位檢出 등을 목적으로 하여 水準測量을 행하는 경우, 水準點間의 變位를 추정하기 위해서는 固定點을 設定하는 것은 불합리하게 되므로 固定點을 설정하지 않는 自由網調整의 이용이 효과적이라 할 수 있다

4. 結 論

水準網調整에 있어서 自由網調整法과 固定網調整法을 比較解析한 결과 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 自由網調整에 있어서 偏倚推定法을 적용할 때 표고보정값의 변화와 반복계산 회수를 해석한 결과 偏倚係數는 10^{-3}이 적합함을 알 수 있었다.

(2) 自由網調整法이 固定網調整法보다 水準點에서의 평균제곱근오차가 적게 나타나고 있어 水準網調整에 있어서 自由網調整法의 적용이 기대된다.

(3) 局小地域의 水準網에 있어서 水準點들의 相對的인 正確度를 향상시키기 위해서는 自由網調整法의 이용이 효과적이라 할 수 있다.

參考文獻

1. 국립지리원, 한국측지학회, 1983, 우리나라 정밀 수준망에 관한 연구.
2. 국립지리원, 1987, 정밀수준망의 조정에 관한 연구.
3. 齊藤努, 1984, "水準測量のフリー網平均," 日本測地學會誌, 第30卷, 第4號, pp. 254~263.
4. 유복모, 1984, 측량학원론(I), 개문사, pp. 54~68.
5. Mikhail, E.M. and F. Ackermann, 1976, "Observation and Least Squares," A Dun-Donnelley Publisher, Chapter 9.
6. 齊藤努, 1984, "フリー平均の考察," 日本測地學會誌, 第30卷, 第3號, pp. 175~197.

7. Richardous, P., 1984, Project Surveying 2nd, Elsevier, pp. 518~551.
8. Mikhail, E. M. and G. Gracie, 1981, Analysis and Adjustment of Survey Measurements, VNR.
9. Boullion T. L., and P. L. Odell, 1973, Generalized Inverse Matrix, Elsevier Scientific Publishing Co.
10. 이석군, 1988, 변형측량에서의 자유망조정기법의 신뢰성 분석, 연세대학교 대학원 석사논문.