

초음파의 세기를 구하기 위한 수치 해석적 방법

이 상 희 *

Numerical Analysis of Ultrasonic Radiation Intensities (In Liquid)

Lee, Sang Hee

ABSTRACT

The intensity of ultrasound in liquid is calculated by improved analytic method. Helmholtz equation or Rayleigh's proposition does not offer the analytic solution. Considering a bounded medium, the use of the image source method in electromagnetic theory gives a new way of calculating the total ultrasonic intensity in liquid. Some methods of measuring the intensities are also mentioned.

1. 서 론

초음파에 대한 연구는 이미 오래전 부터 시작되어 응용 분야의 차이는 있지만 대부분이 종결된 상태이다. 그 이유는 이론과 응용의 차이를 좁힐만한 방법을 찾아내지 못하였거나 응용 범위의 확장에 어려움이 있기 때문이다.

실제로 매질에 따라, 또는 주파수에 따라 그 해석 방법 및 응용이 다르고 RADIATION PRESSURE, CAVITATION 이나 인체의 무해성등에 대한 확실한 결론에 도달하지 못한 상태에 이르고 있다. 비 파괴 검사나 태아 진단에 유용하게 이용되며, 우유의 응고를 막을 수 있고 물을 덥히기는 하지만 이

론적 배경의 완성보다는 실험적 현상을 이용하려는 경향이다.

그동안의 제한적인 응용으로 피부암 치료에 초음파를 이용하면서 부터 초음파 에너지의 효율적인 이용에 대한 관심이 높아지게 되었다. 특히 PERSONAL COMPUTER의 보급으로 초음파 에너지를 손쉽게 제어할 수 있는 방법에 대한 연구가 진행되고 있다.

음파의 진동 특성은 기계적 진동의 특성과 다르다. CHORD를 진동시키면 진동 방향은 파의 진행 방향에 수직인데 반하여 음파의 경우 진동 입자의 변위는 진행 방향과 같다 (LONGITUDINAL). 즉 액체의 표면에서와 같이 파의 고저가 나타나지 않고 기체에서 처럼 팽창과 수축이 일어난다. 초음파는 평면파이고 따라서 일차원적 변위가 일어난다

* 공과대학 전자공학과 조교수

가정할 수 있다.

초음파의 파동 방정식은 CONTINUITY EQUATION과 DYNAMIC EQUATION을 결합하여 HELMHOLTZ의 파동 방정식 [1. 10]을 얻는다.

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (1)$$

ϕ : Velocity Potential

여기서 k 는 전파상수이다 (w/c). 이 방정식의 해는 RAYLEIGH가 제시한 [13, 15] 다음 식으로 주어진다.

$$\phi = -\frac{u_0}{2\pi} e^{j\omega t} \int_s \frac{e^{jkR}}{R} dS \quad (2)$$

이 식의 정확한 해는 여러편의 논문에서 제시된 바 있지만 [1, 15] 유용하게 사용되지는 못한다. 이 논문은 RAYLEIGH가 제시한 HELMHOLTZ 방정식의 해를 기초로 출발하여 근사식을 도출하고 그 유용성을 비교하는데 목적이 있다.

이론의 전개를 위한 조건은 다음과 같다. 원반형 세라믹 음원이 물 속에 잠겨 있고 FIELD는 대략 음원의 반지름의 10 배를 넘지 않는 범위로 한다. 음파가 일차원적 진행을 하므로 측면의 영향을 무시한다. 한 점에서 음파의 총 PRESSURE를 계산하면 ACOUSTIC INTENSITY를 알 수 있으므로 음원과 같은 크기의 MEASURING DISK를 진행 축에 설치한다. 즉 이 DISK에서의 PRESSURE를 계산하면 ACOUSTIC INTENSITY를 알 수 있다.

2. 이론적 고찰

초음파의 파동 방정식은 HELMHOLTZ의 파동 방정식 (1)의 Velocity potential은 RAYLEIGH의 제안에 의해 [1. 13]

$$\phi = -\frac{u_0}{2\pi} e^{j\omega t} \int_s \frac{e^{-jkR}}{R} dS \quad (2)$$

u_0 : Source의 세기
 S : Source의 면적

VELOCITY POTENTIAL이 구해진다면 PRESSURE P는

$$P = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3)$$

ρ_0 : 매질의 밀도

ACOUSTIC INTENSITY는 압력의 실효치의 자승으로 주어지므로

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T (R_e P)^2 dt \quad (4)$$

진행 축에서의 VELOCITY POTENTIAL ϕ_a 는

$$\begin{aligned} \phi_a &= \frac{u_0}{jk} e^{j\omega t} (e^{-jkza} - e^{-jkz}) \\ &\approx -u_0 \frac{a^2}{2} \frac{e^{j(\omega t - kz)}}{z} \end{aligned} \quad (5)$$

a : disk의 반지름

매질 내 임의의 점 (x, y, z)에서는

$$\begin{aligned} R &= (x-x_0)^2 + y_0^2 + z^2 \\ &= D^2 - 2xx + (x_0^2 + y_0^2) \end{aligned}$$

$$D = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$\phi \approx -u_0 a^2 \frac{e^{j(\omega t - kD)}}{D} \frac{J_1(m)}{m} \quad (6)$$

여기서 $m = kax / D$, J : Bessel 함수 이 식은 $x=0$ 에서 식 (5)와 같아진다.

VELOCITY POTENTIAL은 e^{jkR}/R 을 전 자장 이론을 도입하여

$$e^{-jkR}/R = \int_0^\infty e^{-s\lambda} J_0(s\lambda)(\lambda d\lambda/\mu)$$

$$s = \sqrt{R^2 - Z^2}, \quad u = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$$

$$\phi = a u_0 e^{j\omega t} \int_0^\infty e^{-\mu x} J_0(\lambda\rho) J(\lambda a) d\lambda/\mu \quad (7)$$

식(7)이 선형부분의 초음파 해석에서 가장 정확한 해가 된다. 그러나 이 식은 ANALYTIC한 방법으로 이용할 수가 없다. 몇가지의 해석적 방법이 제시되었으나 [15] 이 역시 어려움이 따른다. 특히 이러한 방법은 매질이 무한대로 뻗어있는 경우를 가정하여 초음파 에너지의 측정에는 도움이 되지 못한다.

본 논문은 e^{-jkR}/R 에서 출발하여 일반적인 해석적 방법을 제시하고 경계면이 존재하는 매질에서의 초음파 에너지 계산 방법을 설명하기 위해 영상법을 도입하여 그 유용성을 보인다.

3. 새로운 제안

3. 1. 방법

RAYLEIGH가 제시한 해를 다시 검토하면

$$\phi = -\frac{u_0}{2\pi} e^{j\omega t} \int_s \frac{e^{-jkR}}{R} ds \quad (2)$$

$$R = (x - r \cos \alpha)^2 + (r \sin \alpha)^2 + z^2$$

$$= D^2 + r^2 - 2rx \cos \alpha$$

$$R \approx D \left(1 - \frac{rx}{D^2} \cos \alpha \right)$$

$$\phi = -u_0 a^2 \frac{e^{j(\omega t - kD)}}{D} \left[\frac{J_1(m)}{m} + \frac{j}{kD} J_2(m) \right] \quad (8)$$

$m = kax/D$, J_1, J_2 : Bessel 함수
좌표축 부근에서의 POTENTIAL은

$$\phi \approx -u_0 \frac{a^2}{2} \frac{e^{j(\omega t - kD)}}{D} \quad (9)$$

이 되고 좌표축에서는

$$\phi_a \approx -u_0 \frac{a^2}{2} \frac{e^{j(\omega t - kz)}}{Z} \quad (10)$$

3. 2. BOUNDED MEDIUM

여지껏의 방법은 매질이 무한대로 뻗어있는 경우를 가정하여 식을 유도하였다. 그러나 초음파를 이용하기 위하여는 매질의 경계가 주어진 경우에 대하여 고찰하여야 매질에 경계면이 주어진 경우에 매질내의 임의 점에서 초음파의 세기는 음원에서 진행파와 경계면에서의 반사파의 합이 된다. 즉 총 VELOCITY POTENTIAL ϕ' 는

$$\phi^+(z, t) + A\phi^-(z, t) \quad (11)$$

(A는 경계조건에 의하여 구해지는 const.)

3. 3. 반사파

두 매질의 ACOUSTIC IMPEDANCE가 $\rho_0 c_0, \rho_0 c_1$ 일때 경계면에서의 입사파의 크기를 A_0^+ 라 하고 경계면에 의해 반사되는 반사파의 크기를 A_0^- 라 하면 반사 능력 R은 반사 에너지에 대한 입사 에너지의 비이다:

$$R = \left(\frac{A_0^-}{A_0^+} \right)^2 = \left(\frac{m-1}{m+1} \right)^2,$$

$$m = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_0 c_0} \quad (12)$$

공기의 ACOUSTIC IMPEDANCE는 대략 $44(g/cm \cdot s)$ 이고 물의 경우는 $150 \times 10^3(g/cm \cdot s)$ 가 되어 $m \approx 10^{-4}$ 이고 $R \approx 1$ 이 된다. 즉 물/공기의 경계면에서는 입사파가 전부 반사하게 되어 경계면에서의 압력의 변화가 영이 된다.

3. 4. 영상법

전자장 이론에 의하면 경계면에서의 ELE-

CTRIC POTENTIAL이 0이 되면 경계면에 대해 대칭으로 IMAGE SOURCE를 가정하여 매질 내의 임의의 점에 대한 POTENTIAL을 구할 수 있다. 이것과 상사로 물/공기의 경계에서 POTENTIAL이 0이 되므로 매질 밖에 가상의 음원을 가정할 수 있다. 진행축에서의 VELOCITY POTENTIAL을 ϕ_a^+ 라 하면

$$\phi_a^+ = -u_0 \frac{a^2}{2z} e^{j(\omega t - kz)} \quad (5)$$

총 POTENTIAL은 이로부터

$$\begin{aligned} \phi_a^+ &= \phi_a^+ - \phi_a^- \\ &= -u_0 \frac{a^2}{2} e^{j\omega t} \left[\frac{e^{-jkz}}{z} - \frac{e^{-jk(2H-z)}}{2H-z} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

따라서 ACOUSTIC INTENSITY I는

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \rho_0 c (ku_0 a^2)^2 \\ &\left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(2H-z)^2} - \frac{2\cos 2k(H-z)}{z(2H-z)} \right] \quad (14) \end{aligned}$$

4. 비 교

4. 1. 측정 방법의 고찰

오래전부터 매질내에서 초음파의 세기를 정확히 측정할 수 있는 장치에 대하여 연구를 하였다. 그중 많이 이용되는 방법을 나열하면: 저울 이용법, 반향파 측정법, CALORIMETER 이용법, HYDROPHONE 이용법 이러한 방법들은 나름대로의 장단점을 가지고 있으며 초음파 특성을 알아내는 절대적 방법은 존재하지 않는다. 위의 네 가지 방법에 대하여 간략하게 서술함으로써 측정법에 대한 비교 및 이해를 돕는다.

4. 1. 1. HYDROPHONE 이용법

HYDROPHONE은 초음파의 압력 분포를 전압의 형태로 바꾸어 측정을 가능하게 하는 일종의 RECEPTER이다. 반응 속도가 빠르고 측정이 손쉬운 반면 압력의 상대적인 분포만을 알 수 있다.

4. 1. 2. CALORIMETER 이용법

매질내에 설치된 CALORIMETER는 초음파를 흡수하여 덩어지게 된다. 매질의 온도 상승은 에너지의 방출에 기인하므로 초음파 에너지의 성질을 이해할 수는 있으나 그 속도가 매우 느리다.

4. 1. 3. 반 향 법 [6.9]

IMPULSE로 주어지는 초음파가 경계면에서 반향하여 다시 음원으로 향할때 그를 측정하여 초음파의 속도 및 감쇠를 알 수 있다. 이 방법은 IMPULSE를 이용하므로 매질의 상태 변화가 거의 없다.

4. 1. 4. 저울 이용법 [4.5]

음원을 원기둥의 바닥에 고정시키고 저울을 초음파 진행축에 수직으로 매달아 RADIATION PRESSURE를 측정한다. 이 방법은 어느 정도의 오차를 인정한다면 초음파 에너지 측정의 절대적 방법이다. 오차로는 CAVITATION과 온도 상승을 들 수 있는데 이들은 실험 여건을 잘 선택하면 어느 정도 피할 수 있다.

4. 2. ACOUSTIC INTENSITY의 비교

매질 내에서 초음파 에너지의 측정은 위에 열거한 방법중 저울 이용법이 가장 많이 이용된다. 매질 내에 초음파 진행축에 수직으로 음원 크기의 DISK를 매달고 그 반대쪽에는 그 힘을 상쇄할 수 있는 장치를 설치한다. 만약 DISK상의 임의의 점에서 받는 에너지가 그에 대응되는 음원의

영향에 기인한 것이라면 진행축 부근의 임의 점에서의 에너지는 다음식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\phi^+ = -u_0 a^2 \frac{e^{j(\omega t - kD)}}{D} \left[\frac{J_1(m)}{m} + \frac{j}{RD} J_2(m) \right] \quad (8)$$

초음파는 일차원적 범위가 일어난다고 가정하였으므로 식(16)의 진행축 부근의 POTENTIAL로 부터 초음파 에너지를 구하여 진행축에서의 에너지와 비교한다.

음원으로 부터 대략 4~5배 떨어진 FIELD내에서는 5%~10% 정도의 오차를 가진다. 이로부터 진행축 부근의 초음파 에너지의 계산은 진행축상에서 행하여도 적당히 떨어진 FIELD에서는 받아들일만 하다.

5. 결 론

초음파 에너지 측정과 장치 개발의 어려움 때문에 그 이용에 대해 의구심이 높아지고 에너지의 세기를 조절할 방법이 없었다. 이 논문에서는 실제 응용상 무리없는 범위에서 초음파 에너지를 계산할 수 있는 방법을 보였다.

진행축 상에서의 초음파 에너지 측정은 이미 다른 논문에서 보인 바 [18] 간단한 실험 장치로도 그 결과가 계산치와 근접하였다. 초음파 에너지 측정은 매질의 온도 상승이나 CAVITATION현상으로 주의를 필요로 하고 측정 장치는 고전적인 방법(저울 이용법)에서 탈피하지 못하고 있다.

참 고 문 헌

1. R.T.Beyer and S.V.Letcher, "Physical Ultrasonics", ACADEMIC

PRESS, 1969.
 2. P.L.Carson, P.R. Fischella and T.V.Oughton, "Ultrasonic power and intensities produced by diagnostic ultrasound equipment", *Ultrasound in Med Biol.*, Vol.3, pp.341~350, 1978.
 3. H.W.Drawin, "Phenomene de Vibration et de propagation", Tome 2, "Phenomeno de propagation", EYROLLES, 1976.
 4. M.J.Farmery and T.A.Whittingham, "A portable radiation force balance for use with diagnostic ultrasonic equipment", *Ultrasonund in Med. Biol.*, Vol.3, pp.373~379, 1978.
 5. H.K.Fahmi, I.V.Chapman and J.M.Hussaini, "Experimental study of cavitation using the radiation pressure balance", *Ultrasonic International '79.*, Graz(Austria), pp.50~60, 1979.
 6. M.Ide, "Ultrasound radiation power measurement using balance system", ICA (11th), Paris, pp.199~202, 1983.
 7. F. Ingenito and B.D.Cook, "Theoretical investigation of integrated optical effect produced by sound field radiated from plane piston transducer", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 45, pp. 572~575, 1969.
 8. M.Jessel, "Acoustique theorique", Masson et Cie., 1973.
 9. G.Kossoff, "The measurement of peak acoustic intensity generated by pulsed ultrasonic equipment", *Ultrasonics*, pp. 249~251, Oct. 1969.

10. P.Langevin, "Les Ultrasons", Cours de College de France, 1923.
11. P.M.Morse and H.Feshbach, "Methods of theoretical physics", McGraw - Hill, New York, 1953.
12. P.M. Morse and K.U. Ingrad, "Theoretical acoustics", Academic press, Ch. 6, 1968.
13. Rayleigh, "Theory of sound", Dover, Sec. 277~278, 1945.
14. J.A.Rooney, "Determination of acoustic power outputs in the microwatt millwatt range", Ultrasound in Med., Vol.1, pp. 13 ~ 16, 1973.
15. H.Seki, A. Granato, R. Truell, "Diffraction effects in the accurate measurement of attenuation", J.Acoust.Soc. Am., Vol.28, pp.230 ~ 238, 1956.
16. G.R.Torr, "The acoustic radiation force", American Journal of Physics, Vol.52, pp. 402 ~ 407, 1984.
17. F.G.Sommer and D. pounds, "Transient cavitation in tissues during ultrasonically induced hyperthermia", Med.Phys., Vol. 9, pp.1~3, 1982.
18. S.H.Lee, "Etude d'ondes stationnaires a faibles distances a l'aide de potentiels scalaires: Phenomenes dimensionnels et predication de cavitation", These,Universite de Nancy 1, 1984.