

CAUSTICS방법에 의한 응력확대계수 결정

김상철* · 이억섭* · 한민구**

Determination of the Stress Intensity Factor by the Method of Caustics

S. C. Kim, O. S. Lee and M. K. Han

Abstract The optical method of reflected and transmitted caustics has been utilized in mechanics investigations. This relatively new experimental technique has been successfully applied on various fracture analysis such as static and dynamic crack propagation studies, some elasticity problems and contact stress, etc. In this study, the stress intensity factors in thin polycarbonate specimens, a kind of optically anisotropic material, under Mode I loading condition are estimated by the method of caustics. The values of stress intensity factors obtained from theoretical caustics shape are compared by the experiment. It is confirmed that the two stress intensity factors agree well with Sawley's solution.

NOMENCLATURE

a : Crack length
c : Elasto-optic material constant
 D_t : Transverse diameter of caustics
 D_l : Longitudinal diameter of caustics
J : Jacobian determinant
 K_I : Mode I stress intensity factor
M : Magnification factor
 r_o : Radius of the initial curve
 r, θ : Polar coordinates
S : Optical path length
t : Thickness of specimen
W : Width of specimen
 Z_o : Distance between screen and specimen
 Z_t : Distance between focus and specimen

ξ : Optical anisotropy constant
 σ_1, σ_2 : Principal stresses
 σ_x, σ_y : Stresses in x and y directions,
respectively

1. 서 론

최근 이방성 재료의 일종인 복합재료로 만든 비행기 구조물이나 압력용기 내부에 균열이 발생하고, 이 균열들이 전파하여 대규모의 손상으로 발전된 예가 빈번하여 파괴역학적인 측면에서도 이에 대한 정확한 원인규명과 파손방지대책에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.^{1,2)}

Irwin³⁾이나 Williams⁴⁾ 등에 의하여 이론적으로 해석된 여러가지 복잡한 하중을 받는 균열

* 인하대학교

** 인하대학교 대학원

선단주위의 응력장이나 변형의 크기의 분포상태로부터 응력확대계수를 결정하는 것이 파괴역학의 주요한 연구분야인 것은 잘 알려져 있다. 또한 여러가지 하중조건이나 기하학적 형상에 대해 응력확대계수를 정확하게 결정하는 연구 및 기술이 개발되고 있다. 응력확대계수를 결정하는 방법은 실험적인 방법과 수치적인 방법, 이론적인 방법 등 여러가지가 있으며, 그중 optical shadow 기술의 일종인 Caustics 방법은 1960년대 초 Manogg⁵⁾에 의해서 Laser 광속들이 균열선단 부근을 통과할 때 굴절되어 점계 보이는 모양이 수식으로 표현될 수 있다고 발표한 이래 많은 연구자들에 의해 발전되어 왔다.^{6,7,8)} 투과성 재료 및 비투과성 재료에 대한 광학적 Caustics 방법은 광탄성실험법과 더불어 정적 및 동적균열전파에 대한 연구뿐만 아니라, 유리질 중합체의 균열 healing에 관한 연구등 파괴역학 연구의 여러분야에서 다양한 문제에 널리 적용되고 있다.^{9,10)}

본 연구는 Caustics 방법에 의해 응력확대계수를 결정함에 있어서 재료의 특성과 하중조건에 따른 Caustics의 모양을 이론 modelling과 실험으로 비교, 관찰하여 응력확대계수 결정의 타당성을 논의하였다.

2. 기본이론

2.1 Caustics 방법의 기본원리

Caustics 방법의 광학적 기본원리를 Fig.1에 나타내었다. 인장응력 σ_0 를 받는 균열이 있는 투과성 시편에 Laser 광속이 투사될 때 시편을 통과한 광속은 굴절되어 시편뒤로 Z_0 만큼 떨어진 평면에서 균열선단주위에 광속이 모이게 되므로 밝게 보이게 된다. 그 밝은 부분은 광속의 집중에 의해 경계지어지는데, 이것을 Caustics라고 한다. 광속의 굴절은 균열선단으로부터의 거리가 증가함에 따라 감소하여 균열선단에서의 광속의 집중으로 Caustics를 형성한다. 광속의 굴절정도는 균열선단에서의 응력집중정도와 연관되므로, Caustics는 균열선단 주위의 응력-변형률 상태 및 응력확대계수와 같은 의미를 내

포한다고 할 수 있다. 즉, Caustics의 크기 및 형상을 측정하여 응력확대계수와 응력분포상태를 얻을 수 있다.

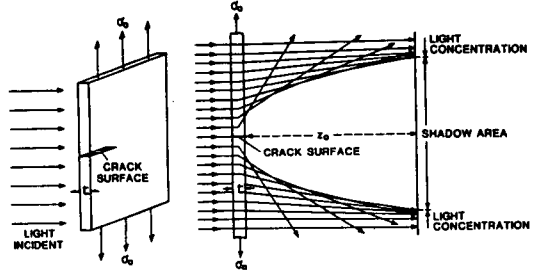


Fig. 1. Schematically light-ray distribution for a realistic stress concentration

2.2 Caustics의 기하학적 형성

Fig.2에는 탄성체이고 균열을 내포하고 있는 얇은 평판에 양측으로 하중을 가하여 Laser 광속이 굴절되어 상을 형성하는 과정을 보여주고 있다. Laser 광속은 시편(object plane E) 상의 r 위치인 점 $P(r, \theta)$ 를 통과하여 w 에 의해 screen(image plane E') 상의 r' 위치인 점 $P'(x', y')$ 에 도달하게 된다.

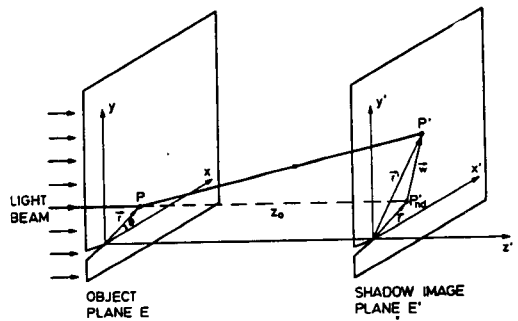


Fig. 2. Geometric formation of the Caustics

이것을 Vector로 표시하면 다음과 같다.

$r' = r + w(r, \theta)$ (1)
 위의 식(1)의 특이곡선이 Caustics 형성의 기본곡선식이 되며, 비투과성 재료에서 표면이 경면일 경우, 반사되는 광속에도 사용되어 적용되는데, 이때 E' 평면의 Caustics는 허상이다. 따라서 시편의 각 점 $P(r, \theta)$ 에 대해서 대응되는 Caustics는 식(1)로 완전히 표현될 수 있다.

벡터 w 는 다음과 같이 표현된다.

$$w(r, \theta) = z_0 \text{ grad } \Delta S(r, \theta) \dots\dots\dots 2)$$

여기서 Z_0 는 시편과 screen사이의 거리이고, $\Delta S(r, \theta)$ 는 시편에 의한 광학경로 길이변화를 나타내며, 탄성-광학 관계를 통해서 응력 $\sigma(r, \theta)$ 로 표현될 수 있다.

$$\Delta S = ct[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] \dots\dots\dots 3)$$

여기서, c : 탄성광학상수
 t : 시편 두께
 σ_1, σ_2 : 주응력
 ξ : 광학적 이방성 상수

- $\xi = 0$: 광학적 등방성 재료
- $\xi \neq 0$: 광학적 이방성 재료

PMMA (Polymethyl-methacrylate)와 같은 광학적 등방성 재료일 경우 $\xi = 0$ 이므로 1개의 Caustics를 형성하며, Homalite-100, Araldite-B와 Polycarbonate와 같은 광학적 이방성 재료는 $\xi \neq 0$ 이므로, 식(4)에서 $\pm \xi(\sigma_1 - \sigma_2)$ 의 두 개의 값을 가지게 되어, Caustics는 내부와 외부의 double Caustics를 형성하게 된다.

식(1), (2)와 (3)을 고려하면

$$r' = Mr + z_0 ct \text{ grad}[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] \dots\dots\dots 4)$$

여기서, $M = (Z_0 \pm Z_i) / Z_i$: 확대비

- $M = 1$: 평행광
- $M > 1$: 확대광
- $M < 1$: 축소광
- $+$: 초점이 시편과 lens 사이에 있을 때
- $-$: 초점이 시편과 screen 사이에 있을 때

2.3 균열선단에서의 Caustics의 형상

균열을 포함하는 선형탄성체에 Mode I의 하중이 작용할 때 고차항을 제외한 특이항만을 고려한 균열선단부근의 응력분포는 다음과 같다.

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \dots\dots\dots 5a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \dots\dots\dots 5b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \dots\dots\dots 5c)$$

여기서, K_I : Mode I 응력확대계수

r, θ : 극좌표

주응력의 합과 차 $\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_2$ 는 다음 관계로 표현될 수 있다.

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \dots\dots\dots 6a)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} \dots\dots\dots 6b)$$

PMMA와 같은 광학적 등방성 재료에서는 $\xi = 0$ 이므로 식(4)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r' = Mr + z_0 ct \text{ grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = Mr + z_0 ct \text{ grad}(\sigma_x + \sigma_y) = Mr + z_0 ct \text{ grad}(\frac{2K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}) \dots\dots\dots 7)$$

grad를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{grad} = V = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx} \right\} i + \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{dr}{dy} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dy} \right\} j \dots\dots\dots 8)$$

여기서,

$$r^2 = x^2 + y^2, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \sin \theta \frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \frac{d\theta}{dy} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \dots\dots\dots 9)$$

식(8)과 식(9)를 식(7)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$x' = Mr \cos \theta - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} ct z_0 r^{-3/2} \cos \frac{3\theta}{2} \dots\dots\dots 10a)$$

$$y' = Mr \sin \theta - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} ct z_0 r^{-3/2} \sin \frac{3\theta}{2} \dots\dots\dots 10b)$$

$$(-\pi \leq \theta \leq +\pi)$$

여기서 X' 은 r' 의 i 성분이며, y' 은 r' 의 j 성분이다.

Caustics는 r 에서 r' 로 변환할 때, Jacobian Determinant $J(r, \theta)$ 가 0이 될때마다 형성되므로, 다음과 같은 식을 만족해야 한다.

$$J(r, \theta) = \frac{\partial x'}{\partial r} \frac{\partial y'}{\partial \theta} - \frac{\partial y'}{\partial r} \frac{\partial x'}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots 11)$$

Fig. 3은 Jacobian Determinant J 에 대한 그림이다.¹¹⁾

- 1) $J = -\infty$ 인 경우 interruption curve를 형성하는 곳으로서 광

속이 전혀 투과될 수 없는 영역이고,

2) $J = 0$ 인 경우 :

광속이 가장 밝게 보이는 initial curve를 형성하는 곳이며

3) $J = \infty$ 인 경우 :

원래의 광원 그대로 보이는 영역이다.

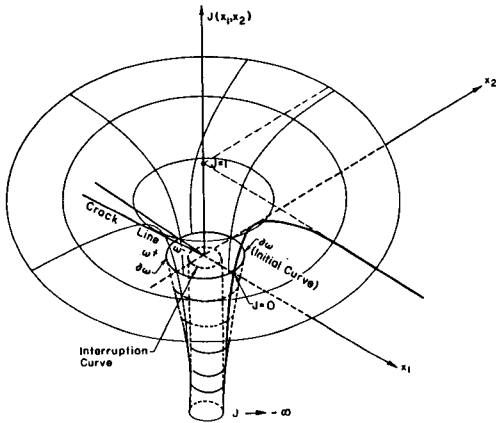


Fig. 3. Jacobian of the mapping

Fig. 4는 screen상의 광량을 나타낸 것이다¹¹⁾ Jacobian Determinant $J = 0$ 인 Caustic curve를 형성할 때의 광량은 ∞ 이고 빛금친 부분 즉 $j = -\infty$ 인 경우 광속이 전혀 들어오지 못해 검게 보이게 되고 Caustics를 형성한 균열선단으로부터 점점 멀수록 광량은 원래의 광량으로 떨어짐을 알 수 있다.

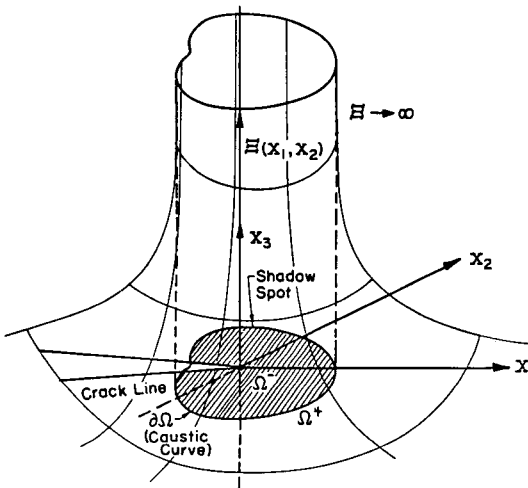


Fig. 4. Intensity of the light on screen

식(11)에 식(10)을 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$r = \left(\frac{3}{2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{M} ct z_0 \right)^{2/5} = r_0 \dots \dots \dots 12)$$

여기서 r 은 θ 에 대해 무관한 상수이고 Z_0 에 따라 변하는 원이며, 이것이 initial curve의 반경이다.

식(10)에 r 대신 식(12)의 r_0 를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$x' = Mr_0 \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \dots \dots \dots 13a)$$

$$y' = Mr_0 \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \dots \dots \dots 13b)$$

$$D_t = 3.17Mr_0 \dots \dots \dots 14a)$$

$$D_l = 3Mr_0 \dots \dots \dots 14b)$$

여기서 D_t : Transverse diameter

D_l : Longitudinal diameter

식(14)의 r_0 를 식(12)에 대입하면 H_1 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_I = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2\pi}}{ct z_0} \frac{D_t^{5/2}}{(3.17)^{5/2}} \frac{1}{M^{3/2}} \dots \dots \dots 15a)$$

$$K_I = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2\pi}}{ct z_0} \frac{D_l^{5/2}}{(3.00)^{5/2}} \frac{1}{M^{3/2}} \dots \dots \dots 15b)$$

3. Caustics 실험

3.1 실험장치

실험장치는 Fig. 5와 같이 He-Ne gas Laser를 광원으로 사용하여 Spatial filter를 통과시켜 확산시킨 다음 lens를 통해 평행광을 만든 후 인장시험기(10Ton Tensilon)에 의해 하중이 가해진 SEN(Single Edge Notched) 시편의 균열선단에 그광원을 투사시켜 하중을 변화시키면서 Caustics의 형상과 크기변화를 기록, 측정하였다.

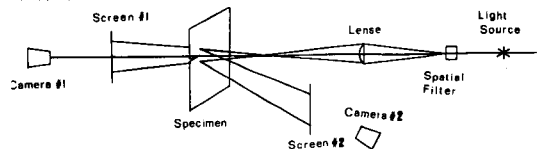


Fig. 5. Schematic diagram of the Caustics measurement

3. 2 시편재료 및 형상

실험에 쓰인 시편은 Fig. 6에 보인 바와 같은 균일분포하중을 받는 두께 $t=3.2\text{mm}$ 이고 폭 $W=59.15\text{mm}$, 길이 $L=121\text{mm}$ 인 SEN 시편이고, 시편 형상에 따른 Caustics의 모양변화를 고찰하기 위하여 균열길이 a 를 각각 변화시켰다. 시편의 재료는 광학적 이방성 상수 $\xi=0.223$ 이고 투과성 광학상수 $c=-1.43E-10(\text{m}^2/\text{N})$ 인 Polycarbonate 이다.

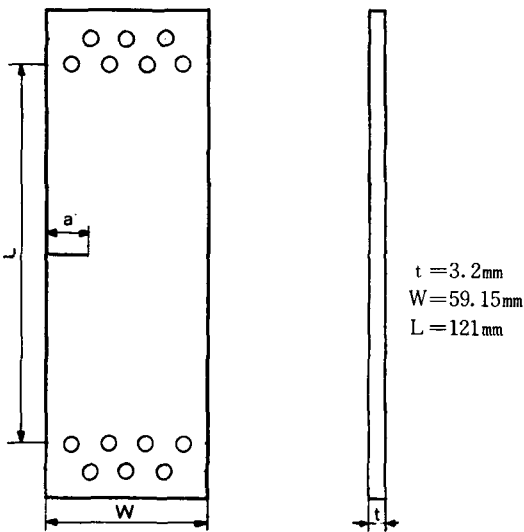


Fig. 6. Dimension of the single edge notched specimen

4. 실험결과 및 고찰

Fig. 7은 일정한 균열길이를 갖는 Polycarbonate SEN 시편에 하중을 변화시켰을 때의 반사형 실험Caustics와 이론적으로 모델링한 Caustics를 상호 비교한 그림이다. 실험에서 행한 동일한 하중 및 경계조건들을 Data로 Computer에 입력하여 얻은 이론적으로 모델링한 Caustics도 실험Caustics와 크기와 형상이 각각 대체적으로 일치함을 알 수 있다. 따라서 이론적으로 Caustics를 모델링하여도 크기와 형상이 거의 일치하므로 응력확대계수를 결정할 수 있다. 단, 균열길이가 너무 길거나 짧으면 이론

적으로 모델링할 때 응력의 고차항을 고려해야 한다.

Fig. 8은 시편폭에 대한 균열길이의 비에 따른 Caustics형상을 나타낸 것이다. 시편폭에 대한 균열길이의 비 a/W 가 0.085인 경우는 double Caustics의 후단부가 점점 커지는 형상을 가지며 a/W 가 더욱 커져서 0.423인 경우는 outer Caustics의 전단부가 inner Caustics보다 약간 커지는 형상을 가진다. 따라서 시편폭에 대한 균열길이의 비 a/W 가 Caustics형상에 깊은 관계가 있음을 알 수 있다.

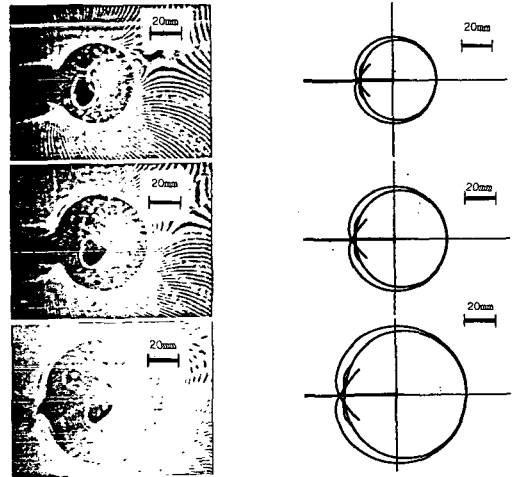


Fig. 7. Experimentally observed and theoretically modelled optical shadow patterns(Polycarbonate SEN specimen)

하중 P 의 변화는 일정한 균열길이를 갖는 시편의 Caustics의 직경 D_1, D_2 를 각각 변화시킨다. 이때의 D_1, D_2 에 의한 응력확대계수와 $J, E, Srawley$ 의 solution¹²⁾에 의한 응력확대계수와의 비교를 균열길이를 변화시켜서 Fig. 9 (a) ~ Fig. 9 (e)에 각각 나타내었다.

Fig. 9 (a)는 균열길이 a 가 5mm 일때의 각종변화에 대한 응력확대계수를 나타낸 것으로서 D_1 에 의한 응력확대계수는 Srawley solution에 비해 약간 낮게 나타났고 D_2 에 의한 응력확대계수는 Srawley solution에 비해 거의 비례적

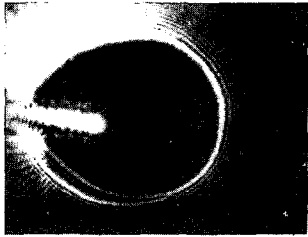
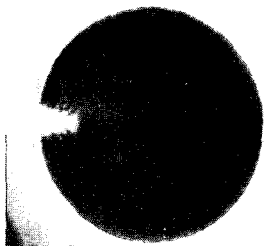
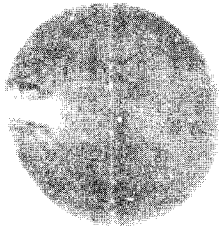
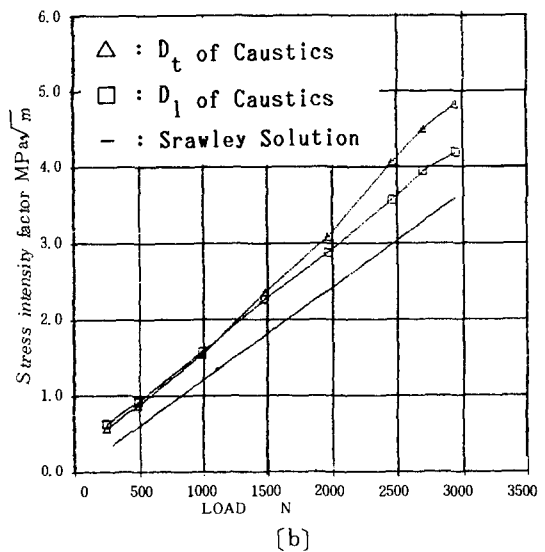
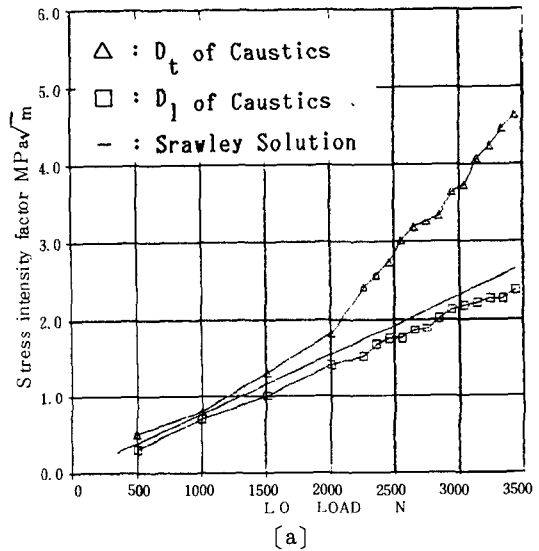
No.	a / w	Caustics형상
(a)	0.085	
(b)	0.254	
(c)	0.423	

Fig. 8. Series of Shadow Optical Photographs with Various Crack Length in SEN Specimen

으로 약간 높은 값을 갖다가 하중이 약 2000 N에서 급하게 상승하는 것을 알 수 있었는데 이는 균열선단에 소성역이 생겨서 실제 균열길이보다도 더 큰 균열길이 있는 효과가 있으므로 소성역의 크기가 Caustics 형상에 영향을 미쳐서 이 하중을 기점으로 Srawley solution 보다 상당히 높아졌음을 나타낸다. 따라서 높은 하중을 받는 구조물의 실제 설계시에는 Srawley solution보다는 Caustics방법에 의한 응력확대계수를 적용하는 것이 타당하다.

Fig. 9 (b)와 Fig. 9 (c)는 균열길이 a가 각각

10mm, 15mm일 때의 각 하중변화에 대한 응력확대계수를 나타낸 것이다. 이들은 Fig. 9 (a)와 달리 D_t , D_1 에 의한 응력확대계수가 Srawley solution에 비해 약간 상회하여 비례적으로 증가함을 알 수 있으며 D_t 에 의한 응력확대계수가 D_1 에 의한 것보다 Srawley solution에 가깝게 나타났다. 여기서 응력확대계수가 거의 선



형적으로 증가한다는 것은 이들의 파괴가 취성 파괴양상으로 행하였음을 나타낸다.

Fig. 9 (d)와 Fig. 9 (e)는 균열길이 a 가 각각 20mm, 25 mm일 때의 각 하중변화에 대한 응력확대 계수를 나타낸 것이다. 이들의 파괴는 연성과 파괴양상을 보였는데 각 하중변화에 따른 응력확대 계수의 증가폭이 점점더 커짐을 알 수 있다.

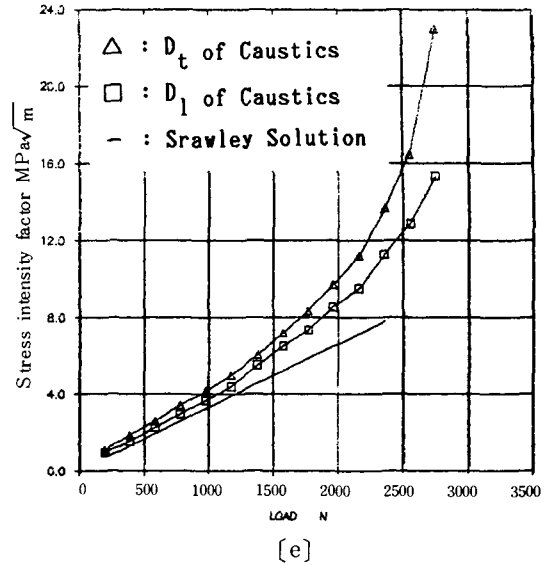
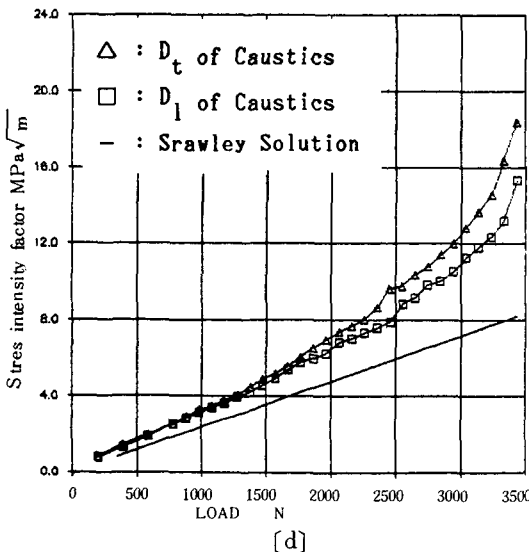
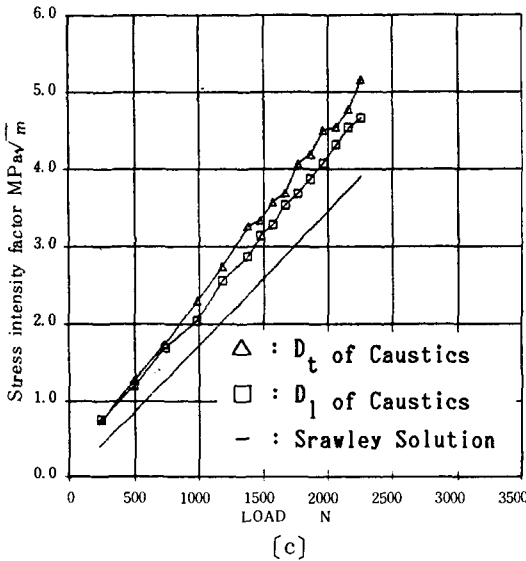


Fig. 9. Comparison of the Stress Intensity Factors obtained by the Method of Caustics and Srawley solution

5. 결 론

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

- 1) Caustics의 직경 D 를 측정함으로써 응력 확대계수 K_1 을 결정할 수 있다.
- 2) 높은 하중을 받는 구조물의 실제 설계시에는 Srawley의 solution보다는 Caustics 방법에 의한 응력확대계수를 적용하는 것이 타당하다.
- 3) 이론적으로 Caustics를 modelling 하여도 실험으로 얻은 Caustics의 형상과 크기가 거의 일치하므로 이론적으로 modelling된 Caustics로 응력확대계수를 결정할 수 있다.
- 4) 시편폭에 대한 균열길이의 비 a/W 가 Caustics형상에 깊은 관계가 있음을 확인하였다.
- 5) 본 실험의 경우 Caustics의 직경 D_1 에 의한 응력확대계수가 D_t 에 의한 것보다 Srawley의 solution에 더욱 가깝게 나타났다.

참 고 문 헌

1. K. A. Jacob, et al., "On stress analysis

- of anisotropic composite through transmission optical patterns: isochromatics and isopachics", *Experimental Mechanics*, 3, pp. 49-54, (1983)
2. R. W. Aderholdt and D. G. Berghaus, "Model design and fabrication for stress analysis in multilaminar composites", *Experimental Mechanics*, 1, pp. 32-37, (1976)
 3. G. R. Irwin, "Handbuch der Physik", Vol. VI, Springer Berlin, pp. 555, (1958)
 4. M. L. Williams, "On the stress distribution at the base of a stationary crack", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 109-114
 5. P. Manogg, "Investigation of the rupture of a plexiglass plate by means of an optical method involving high speed filming of the shadows origination around holes drilling in the plate", *International Journal of Fracture Mechanics*, 2, pp. 604-613
 6. P. S. Theocaris and G. A. Papadopoulos, "Stress intensity factors from reflected caustics in birefringent plates with cracks", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 16, No. 1, pp. 29-36, (1981)
 7. A. J. Rosakis, "On crack tip stress state: an experimental evaluation of three dimensional effects", Caltech
 8. 이억섭, 권오건, 홍성경, "Caustics 방법에 의한 여러가지 유리질 중합체의 K_I 결정의 비교", 대한기계학회, 춘계발표초록, pp. 426-430, (1986)
 9. O. S. Lee and O. K. Kwon, "An Experimental Study on Crack Healing of Various Glassy Polymers", *KSME Journal*, Vol. 1, No. 1, pp. 65-69, (1987)
 10. O. S. Lee and A. S. Kobayashi, "Crack Tip Plasticity of a Tearing Crack", Sixteenth Symposium, ASTM STP 868, pp. 431-450, (1985)
 11. A. J. Rosakis and A. T. Zehnder, "On the Method of Caustics: An Exact Analysis Based on Geometrical Optics", Caltech, SM 84-1, pp. 35-36, (1984)
 12. D. P. Rooke and D. J. Cartwright, "Compendium of Stress Intensity Factors", London Her Majesty's Stationery Office, pp. 84-85, (1976)