Traverse 網調整에 있어서 嚴密解法과 近似解法의 正確度 分析

The Accuracy Analysis of the Rigorous Method and the Approximate Method in the Adjustment of Traverse Networks

李 啓 鶴*
Lee, Kye Hak

Abstract

The objective of this paper is to adjust precise traverse nets by matrix analysis. As the result of this paper, In positioning by Traverse nets adjustment, the application of matrix analysis improved the accuracy. And also, the difference between adjustment values of rigorous-method and those of approximate-method appears to be within the mean square errors(0.4 mm～0.9 mm), therefore, the efficiency of approximate-method was proved.

要 旨

本 硏究는 matrix 解析(rigorous-method)을 利用하여 精密 traverse 網을 調整하는데 목적이 있다.

本 硏究 結果, matrix 解析에 依한 嚴密解法으로도 複雜한 traverse 網을 迅速・正確하게 處理할 수 있다. 또한 從來의 근사해법(approximate-method)을 本 matrix 解法의 調整값과 比較한 結果 平均제곱誤差範圍以內에 있고, 調整座標값의 比較差도 0.4～0.9mm程度로 나타났으며, 이로써 근사해법(approximate-method)의 實用的 價値를 立證하게 되었다.

1. 序 論

測地網의 data 를 處理하는데 있어서 지금까지는 在來式 計算에만 依存해 왔기 때문에 能率性이나 正確度面에서 많은 問題가 惹起되어 왔다.

最近 大型 computer 의 利用을 前提로 한 matrix 解析은 複雜한 system 이나 多樣한 解析演算을 可能하게 하고, 또한 計算의 繁雜性을 解消시킴으로써 構造解析이나 統計學 分野에서도 活潑히 發展을 보여왔다[1].

한편 matrix 解析은 測量誤差 計算에 있어서 關心이 高潮되고 있으며, 特히 測量에서 matrix 解析은 複雜한 測地網의 解析硏究를 可能하게 하고, 數式의 考察과 從來의 數値와도 比較하는데 容易하다.

本 硏究에서는 未知量의 最確値와 分散式을 利用하여 traverse 의 網調整을 matrix 解析으로 嚴密調整 處理하고, 從來의 近似解法에 依한 結果값과도 比較檢討하였다.

따라서 위의 結果로부터 近似解法의 實用性을 檢討함은 勿論 簡單한 computer 로도 複雜한 traverse 網의 調整을 쉽게 處理할 수 있는 方法을 提案하는데 本 硏究의 目的이 있다.

2. 基本理論

2. 1. matrix 解析

지금 觀測값 y 와 P個의 變數 X와의 사이에는

$$y = X\beta + e \tag{1}$$

과 같은 線型回歸方程式이 成立한다[2, 3, 4].

따라서 觀測數를 n 이라하고 y, X, e, β를 行列로

* 正會員・全南大學校 工科大學 敎授, 土木工學科

表示하면

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1P} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2P} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nP} \end{bmatrix},\quad e=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

가 되고, 여기서 β : 未知量, e=殘差, e의 期待값 $E[e]=0$, 0 : Zero matrix.

또 경중률(weight)의 matrix 를 Q라 하면

$$Q=\begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & q_2 & \\ 0 & & q_n \end{bmatrix},\quad E[ee^T]=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}=\sigma^2 Q^{-1}$$

σ^2은 경중률(weight) 1의 分散, $\sigma_i^2\cdot q_i$는 i번째 觀測값의 分散 및 경중률(weight)이며 q_i는

$$q_i\cdot\sigma_i^2=\sigma^2 \qquad (2)$$

로 定義된다. 또 未知量 β의 P個의 要素사이에는 다음 r組의 條件式

$$\rho=a_0+A\beta=0 \qquad (3)$$

이 成立한 것으로 한다.

여기서

$$a_0=\begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{r0} \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2P} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots\cdots & a_{rP} \end{bmatrix}$$

이러한 條件下에서 경중률(weight)이 各 觀測의 組에 對해서 다른 경우 β의 最確値 β를 最小제곱法으로 求한다[4, 5, 6, 7].

지금, 未定係數 $\lambda^T=[\lambda_1, \lambda_2\cdots\cdots\lambda_n]$에 對해 $\dfrac{\partial[e^TQe-2\lambda^T\rho]}{\partial\beta}=0$의 式을 滿足하는 β의 最確値를 $\hat{\beta}$라 하고 이를 展開하여 整理하면

$$\hat{\beta}=S_P^{-1}(X^TQy-A^TS_{AP}^{-1}\,\omega)=\hat{\beta}_0-S_P^{-1}A^TS_{AP}^{-1}\,\omega \qquad (4)$$

을 얻는다. 여기서 $\hat{\beta}_0=S_P^{-1}X^TQy$, $S_P=X^TQX$, $S_{AP}=AS_P^{-1}A^T$, $\omega=a_0+A\hat{\beta}_0$

또 式 (4)로 부터 β의 期待값 $E[\hat{\beta}]$는

$E[\hat{\beta}]=E[S_P^{-1}X^TQy]-E[S_P^{-1}A^TS_{AP}^{-1}\,\omega]$가 되고 式 (1)을 윗式에 代入하여 展開하면

$$E[\beta]=\beta \qquad (5)$$

가된다. 式 (5)에서 求하고자 하는 $\hat{\beta}$는 β의 不偏推定値이다.

또 殘差제곱의 合을 S_E라 하고 이를 展開하여 整理하면

$$S_E=y^TQy-\hat{\beta}_0X^TQy+\omega^TS_{AP}^{-1}\,\omega \qquad (6)$$

이 된다.

다음에 分散 σ_i^2의 不偏推定値를 考慮해 보면 式 (5)로 부터 β는 $\hat{\beta}$의 不偏推定値에서 $\hat{\beta}$의 共分散[2, 5]

$C[\hat{\beta}]=E[(\hat{\beta}-\beta)\ (\hat{\beta}-\beta)^T]$ 이므로

式 (4)를 윗 式에 代入하여 整理하면

$$E[(\hat{\beta}-\beta)\ (\hat{\beta}-\beta)^T]$$
$$=E\left[\frac{S_E}{n-(p-r)}\ \{S_P^{-1}(AS_P^{-1})^T\ S_{AP}^{-1}(AS_P^{-1})\}\right] \qquad (7)$$

이 되고

윗式의 matrix 對角 i行 i列 要素가 β_i의 最確値 $\hat{\beta}_i$의 母分散 $\hat{\sigma}_{\beta i}^2$ 이며, 그 不偏分散은 다음 式으로 求한다.

$$\hat{\sigma}_{\beta i}^{\ 2}=\frac{S_E}{n-(p-r)}\{C_{ii}-S_i^TS_{AP}^{-1}\,S_i\} \qquad (8)$$

여기서 C_{ii}는 S_P^{-1}의 對角 i行 i列 要素이고, $S_i^TS_{AP}^{-1}S_i$는 $(AS_P^{-1})^TS_{AP}^{-1}(AS_P^{-1})$의 對角 i行 i列 要素이다.

2. 2. 閉合 traverse 網의 嚴密調整法(rigorous-method)

그림 1에 表示한 바와 같이 測點數 n個의 閉多角網에 있어서 各 測點의 方位角을 $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,3}\cdots\cdots\alpha_{n,n+1}$, 多角網의 內角을 β_1, β_2,$\cdots\cdots\beta_n$, 測線長을 $S_{1,2}$, $S_{2,3}$,$\cdots\cdots S_{n,n+1}$($n+1$은 1로 한다)이라 하고 多角網의 內角 및 測線長의 最確値를 內角 및 閉合條件下에서 求하여 各 測點의 座標를 計算한다.

또한 多角網의 內角 및 測線長의 調整量을 各各 $\Delta\beta_1$, $\Delta\beta_2$,$\cdots\cdots\Delta\beta_n$, $\Delta S_{1,2}$, $\Delta S_{2,3}$,$\cdots\cdots\Delta S_{n,n+1}$이라 하고, 測線長의 緯距 및 經距를 各各 $X_{1,2}+\Delta X_{1,2}$, $X_{2,3}$

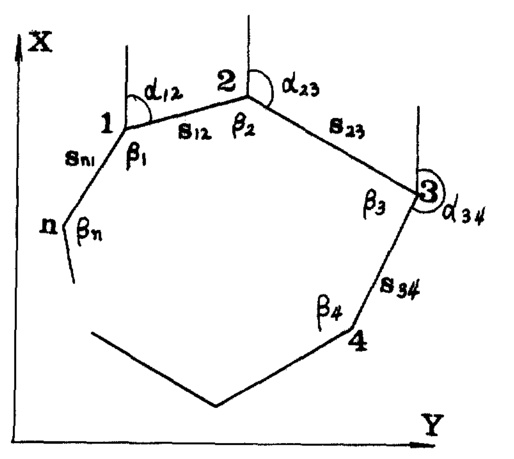

그림 1. Traverse Nets(a).

$+\Delta X_{2,3},\cdots\cdots, X_{n,n+1}+\Delta X_{n,n+1}, Y_{1,2}+\Delta Y_{1,2}, Y_{2,3}+\Delta Y_{2,3},\cdots\cdots, Y_{n,n+1}+\Delta Y_{n,n+1}$ 이라 하면 多角網의 內角의 總合條件式은

$$\beta_1=\sum_{i=1}^{n}\beta_i-180^\circ(n-2)+\sum_{i=1}^{n}\Delta\beta_i=0 \qquad (9)$$

이며, 任意의 測點의 方位角을 $\alpha_{i,i+1}=\alpha_{i-1,i}+180^\circ-\beta_i$ 에 依하여 求하면 緯距 β_2, 經距 β_3 의 閉合條件式은

$$\begin{aligned}\beta_2&=\sum_{i=1}^{n}X_{i,i+1}+\sum_{j=2}^{n}\{(\sum_{i=j}^{n}Y_{i,i+1})\Delta\beta_j\}\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_{i,i+1}\cdot\Delta S_{i,i+1}=0\\\beta_3&=\sum_{i=1}^{n}Y_{i,i+1}-\sum_{j=2}^{n}\{(\sum_{i=j}^{n}X_{i,i+1})\Delta\beta_j\}\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_{i,i+1}\cdot\Delta S_{i,i+1}=0\end{aligned} \qquad (10)$$

이 된다. 여기서 $X_{i,i+1}=S_{i,i+1}\cdot\cos\alpha_{i,i+1}$, $Y_{i,i+1}=S_{i,i+1}\cdot\mathrm{Sin}\,\alpha_{i,i+1}$, 그리고 traverse 의 嚴密調整計算은 Δy 가 次元이 다른 길이 및 角度의 2組의 量을 包含한 것으로 한다. 그러므로 等重條件下에서 殘差제곱의 總合이 最小가 되도록 未知量을 定하는 問題로도 解釋된다. 즉, 길이 및 角度의 分散과 경중률(weight)을 各各 $\sigma^2_{si,i+1}$, $q_{si,i+1}$, $\sigma^2_{\beta j}$, $q_{\beta j}$ 라 하면 $q_{si,i+1}$, $\sigma^2_{si,i+1}=q_{\beta j}\cdot\sigma^2_{\beta j}$ $(i=1, 2,\cdots\cdots, n,\ j=1, 2,\cdots\cdots, n)$.

또는 $q_{\beta 1}=1$ 로 하고 $\sigma^2_{\beta 1}$ 을 基準으로 하여

$$q_{s,i+1}=\frac{\sigma^2_{\beta 1}}{\sigma^2_{si,i+1}} \qquad (11)$$

이 되고 式 (11)로 各 觀測値의 경중률(weight)을 求한다[2,5,6].

式 (1)의 線型回歸方程式에서 觀測量 $y=\bar{y}+\Delta y$, $\beta=\bar{\beta}_0+\Delta\beta$ 이며, y 의 近似値로서 $\bar{\beta}$ 를

$$y=X\bar{\beta} \qquad (12)$$

로 주어지면

$$\Delta y=y-\bar{y} \qquad (13)$$

이 되고, 다음의 Δy, $\Delta\beta$ 에 對해서도 線型回歸方程式이 成立한다.

$$\Delta y=X\Delta\beta+e \qquad (14)$$

또, 앞의 式 (3)에서

$$\begin{aligned}\rho&=a_0+A(\bar{\beta}+\Delta\beta)=(a_0+A\bar{\beta})+A\Delta\beta\\&=\bar{a}_0+A\Delta\beta=0\end{aligned} \qquad (15)$$

이 된다. 단, $\bar{a}_0=a_0+A\bar{\beta}$ 이다.

2. 3. 근사해법(approximate-method)

근사해법중 compass rule 은 閉合·結合誤差가 距離 및 角測定에서 發生하는 誤差를 같은 精度로 보고 經·緯距의 誤差를 各 測線長에 比例 配分하는 方法이다.

지금 任意의 測線 i 의 緯距 Δy_i 및 經距 Δx_i 에 配分할 誤差量은 다음과 같다[8].

$$\begin{aligned}\Delta y_i\text{에 配分할 量}&=\varepsilon_y\times\frac{\ell_i}{\sum\ell}\\\Delta x_i\text{에 配分할 量}&=\varepsilon_x\times\frac{\ell_i}{\sum\ell}\end{aligned} \qquad (16)$$

단, ε_y : 緯距의 誤差, ε_x : 經距의 誤差, ℓ_i : 任意의 測線 i 의 길이, $\sum\ell$: 全測線長의 總合

2. 4. 數値計算

traverse 網의 調整에 있어서 지금까지 엄밀해법(rigorous-method)과 근사해법(approximate-method)에 關한 數値解析을 記述하였다. 따라서 이들의 數値解析을 利用하여 實際 嚴密 traverse 網의 調整에 關한 數値計算을 computer program 에 依하

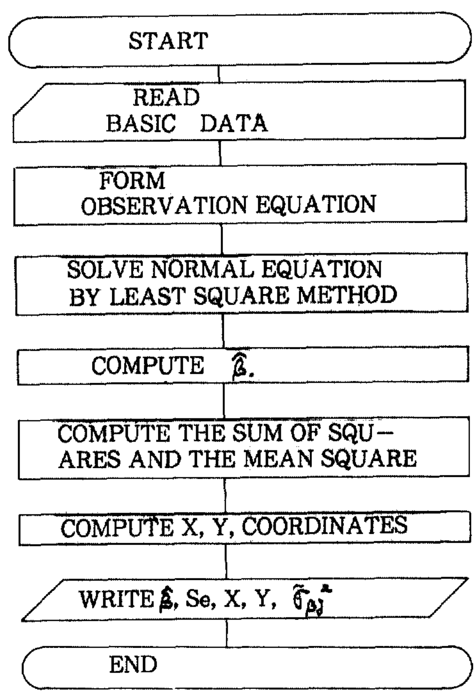

그림 2. Flow Chart.

여 行하였으며, 그 flow-chart를 圖示하면 그림 2와 같다[9, 10].

3. 嚴密 traverse 網의 調整

3. 1. 試驗觀測

本 硏究에서 觀測 model은 全南大學校 綜合運動場의 平坦地를 擇하여, 1) 觀測은 1988年 8月에 EDM(DI20)을 가지고 測定하였으며, 2) 氣壓은 光州氣象臺에서 過去 氣壓觀測에 使用했던 sato aneroid barometer를 使用하였고, 3) 溫度는 精密棒溫度計로 測定하였다. 그리고 測點數 $n=5$의 traverse 網을 設置하고, 測角 및 測距를 各各 3回 實測한 것을 使用했다.

따라서 觀測 model 網은 그림 3과 같으며, 測定結果는 표 1에 나타냈다.

3. 2. 嚴密 traverse 網의 調整

표 1의 3回 測定값의 平均을 求하고 式 (11)에 依해 計算된 分散 및 경중률은 표 2에 나타냈다.

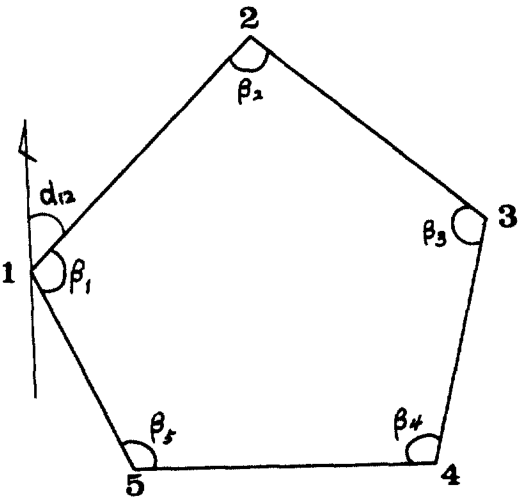

그림 3. Traverse Nets(b)

표 1. Observed Values of Traverse Nets.

Sta.	Cour.	Meas.	Dist. (m)	Observed Angles First Reading	Final Reading	(final-first)	Remarks
1	1−2	1	75.371	344−52−11	89−00−29	104−08−18	
		2	75.370	344−52−10	89−00−35	104−08−25	
		3	75.373	344−52−07	89−00−27	104−08−20	
2	2−3	1	67.120	286−13−27	23−29−59	97−16−32	
		2	67.119	286−13−27	23−30−07	97−16−35	
		3	67.119	286−13−27	23−30−03	97−16−31	Bearing
3	3−4	1	65.005	262−26−10	27−59−53	125−33−43	86−46−06
		2	65.007	262−26−11	27−59−59	125−33−48	
		3	65.006	262−26−11	27−59−58	125−33−47	
4	4−5	1	65.779	342−42−31	86−40−13	103−57−42	
		2	65.777	342−42−31	86−40−16	103−57−45	
		3	65.779	342−42−31	86−40−12	103−57−41	
5	5−1	1	77.099	75−25−49	184−29−20	109−03−31	
		2	77.101	75−25−50	184−29−24	109−03−34	
		3	77.098	75−25−48	184−29−23	109−03−35	

표 2. Variance and Weight of Observed Values.

Stat.	Observed Angles			Observed Distance		
	Angle	Variance	Weight	Distance	Variance	Weight
1	104−08−21.0	1.0185×10^{-10}	1.0000	75.3713^{m}	7.7777×10^{-7}	0.000131
2	97−16−32.7	3.3947×10^{-11}	2.9979	67.1193	1.1110×10^{-7}	0.000917
3	125−33−46.0	5.4845×10^{-11}	1.8571	65.0060	3.3334×10^{-7}	0.000306
4	103−57−42.7	3.3949×10^{-11}	3.0001	65.7783	4.4443×10^{-7}	0.000229
5	109−03−33.3	3.3952×10^{-11}	2.9998	77.0993	7.7779×10^{-7}	0.000131

앞의 표 2의 觀測 data를 前述한 式 (15)에 適用하여 觀測方程式을 構成하면 다음과 같다[3, 6, 7, 9].

여기서 $\bar{a}_0 = a_0 + A\bar{\beta}$ 로서

$$\bar{a}_0 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \beta_i - 180^\circ(n-2) \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i,\ i+1} \\ \sum_{i=1}^{n} Y_{i,\ i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00002085^{\mathrm{Rad}} \\ 0.0018^{m} \\ -0.0016^{m} \end{bmatrix}$$

로 나타내고 A, y, Q, X의 matrix는 다음과 같이 나타낼 수 있으며, 여기서 X는 單位行列이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=2}^{5} Y_{i,i+1} & \sum_{i=3}^{5} Y_{i,i+1} & \sum_{i=4}^{5} Y_{i,i+1} & Y_{5,1} & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{23} & \cos\alpha_{34} & \cos\alpha_{45} & \cos\alpha_{51} \\ & -\sum_{i=2}^{5} X_{i,i+1} & -\sum_{i=3}^{5} X_{i,i+1} & -\sum_{i=4}^{5} X_{i,i+1} & -X_{5,1} & \sin\alpha_{12} & \sin\alpha_{23} & \sin\alpha_{34} & \sin\alpha_{45} & \sin\alpha_{51} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -75.2530 & -87.4931 & -42.3935 & 14.5906 & 0.05635 & -0.98323 & -0.72019 & 0.49952 & 0.9819 \\ 0 & -3.2471 & -62.7467 & -109.5634 & -75.7061 & 0.9984 & 0.1824 & -0.6938 & -0.8663 & 0.1892 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1.81757134 \\ 1.69778212 \\ 2.19148389 \\ 1.81447679 \\ 1.90344299 \\ 75.3713^{m} \\ 67.1193 \\ 65.0060 \\ 65.7783 \\ 77.0993 \end{bmatrix}^{\mathrm{Rad}} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1.0000 & & & & & & & & & 0 \\ & 2.99979 & & & & & & & & \\ & & 1.8571 & & & & & & & \\ & & & 3.0001 & & & & & & \\ & & & & 2.9998 & & & & & \\ & & & & & 0.000131 & & & & \\ & & & & & & 0.000917 & & & \\ & & & & & & & 0.000305 & & \\ & & & & & & & & 0.000229 & \\ 0 & & & & & & & & & 0.000131 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 式 (4)에 의하여 計算된 調整量 Δy 와 調整값 $\hat{\beta}$는 다음과 같다.

$$
\Delta y = \begin{bmatrix} -1.4337\times10^{-5\,\text{Rad}} \\ -7.2446\times10^{-6} \\ -4.3188\times10^{-6} \\ 2.9147\times10^{-6} \\ 2.1345\times10^{-6} \\ -1.4\times10^{-4\,m} \\ -1.6\times10^{-4} \\ 3.1\times10^{-4} \\ 11.9\times10^{-4} \\ 4.5\times10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.96'' \\ -1.5'' \\ -0.8'' \\ 0.6'' \\ 0.4'' \\ -0.1^{mm} \\ -0.2^{mm} \\ 0.3^{mm} \\ 1.2^{mm} \\ 0.6^{mm} \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 104^\circ\ 8'23.96'' \\ 97^\circ16'34.2'' \\ 125^\circ33'46.8'' \\ 103^\circ57'42.1'' \\ 109^\circ31'32.9'' \\ 75.3714^m \\ 67.1195^m \\ 65.0057^m \\ 65.7771^m \\ 77.0998^m \end{bmatrix}
$$

그리고 式 (6)에 의한 殘差제곱의 總合 $S_E=2.8075\times10^{-10}(\text{Rad.})^2$ 로 算出된다. 또한 式 (8)에 의한 分散 $\sigma_{\beta j}^2$의 평균제곱오차(mean square errors) $\sigma_{\beta j}$는 다음과 같다.

$$
\sigma_{\beta j}^2 = \frac{2.8075\times10^{-10}}{10-(10-3)} \begin{bmatrix} 1.0000-0.5830 \\ 0.3334-0.0772 \\ 0.3334-0.0772 \\ 0.3333-0.1030 \\ 0.3334-0.0830 \\ 763.5020-\ \ 65.2070 \\ 1090.8690-\ \ 88.2770 \\ 3273.3220-\ \ 769.3660 \\ 4363.0020-2104.3330 \\ 7636.5020-3693.8580 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{\beta i} = \begin{bmatrix} 1.3'' \\ 1.0'' \\ 1.2'' \\ 1.0'' \\ 1.0'' \\ 0.8^{mm} \\ 0.3^{mm} \\ 0.5^{mm} \\ 0.5^{mm} \\ 0.6^{mm} \end{bmatrix}
$$

以上과 같이 matrix 解析에 의한 閉合 traverse 網의 嚴密調整한 結果를 綜合하여보면 표 3과 같으며, 이 표에서 보는 바와 같이 調整값이 어느 特殊한 경우를 除하고는 大體로 平均제곱誤差 範圍內에 있음을 알 수 있다.

또한 표 4는 閉合 traverse 網을 嚴密調整하여 얻은 各 測點의 座標값과 近似解法에서 求한 座標값과를 比較한 것이며, 여기서 나타낸 바와 같이 그 差는 0.4~0.9^{mm} 程度로 대단히 微小한 差異로 나타났으며, 이로써 特殊하게 嚴密調整한 座標값의 計算을 除하고는 近似解法으로 計算하여도 實用上 何等의 支障이 없음을 알 수 있다.

표 3. Adjustment of Traverse Nets by Rigorous Method.

Sta.	Adjusted Angles			Adjusted Distance		
	Observed Values	Adju. Qu.	Mean. Sq. Err.	Distance	Adju. Qu.	Me. Sq. Er.
1	104−08−21.0	2.96″	1.3″	75.3713	0.1^{mm}	0.8^{mm}
2	97−16−32.7	1.5	1.0	67.1193	0.2	0.3
3	125−33−46.0	0.8	1.2	65.0060	−0.3	0.5
4	103−57−42.7	−0.6	1.0	65.7783	−1.2	0.5
5	109−03−33.3	−0.4	1.0	77.0993	−0.6	0.6
Total				350.3742		

表 4. Comparison of Adjusted Coordinates by Two Method

Cou.	Adjusted Latitude		Diff.	Adjusted Departure		Diff.
	Approximate	Rigorous	(mm)	Approximate	Rigorous	(mm)
1-2	4.2487^m	4.2487^m	0	75.2515	75.2515	0
2-3	−65.9947	−65.9939	0.8	12.2410	12.2406	0.4
3-4	−46.8170	−46.8177	0.7	−45.0993	−45.0996	0.7
4-5	35.8571	35.8562	0.9	−56.9839	−56.9833	0.6
5-1	75.7059	75.7067	0.8	14.5907	14.5903	0.4

4. 結　論

本 研究結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

1) 本 硏究에서 matrix 解析에 의한 精密 traverse 網을 調整한 값이 平均제곱 誤差 範圍內에 있음을 알았다. 따라서 matrix 解析에 의한 엄밀해법의 信賴性을 立證할 수 있다.

2) 엄밀해법과 근사해법에 의하여 各各 算定된 座標값을 相互比較할 때 그 差異가 0.4~0.9^{mm} 程度로써 아주 微微하게 나타났으며, 이는 근사해법의 實用的 價値를 立證한다.

3) 複雜한 traverse 網이라도 本 matrix 解法으로 處理하면 簡單한 computer 로도 迅速·正確하게 處理할 수 있으며, 이로써 本 解法의 優位性을 알 수 있다.

參 考 文 獻

1. 李啓鶴, 金旲坨, "中小計算機에 의한 單列 3角網의 Data 處理에 대한 考察," 全南大 大學院 碩士學位論文, 1982, pp. 2~17
2. 金宇哲外 7人編著, "現代統計學," 英志文化社, 1983, pp. 64~90, pp. 220~272.
3. R. Zurmühl 著, "Matrixの理論と應用," ブレイン圖書出版, 1978, pp. 1~76
4. 日本測地學會, "測地學の概觀," 1974, pp. 443~448.
5. Edward M. Mikhail, "*Observations and Least Squares*," Thomas Y. Crowell Company, 1976, pp. 3~70, pp. 111~135.
6. Raymond E. Davis, "*Surveying theory and Practice*," McGraw-Hill Inc., 1981. pp. 889~954
7. Francis H. Moffitt, "*Surveying*," Harpper & Row. Inc., 1982, pp. 745~806.
8. 柳福模, "測量學原論(I)," 開文社, 1986, pp. 282~297.
9. 李啓鶴, 鄭琪鉉, "FEM 에 의한 三邊測量의 解析에 관한 硏究," 韓國測地學會誌, Vol. 3, No. 2, 1985. pp. 18~31
10. 石川甲子男外 3人, "測量計算プログラム," 山海堂, 1985, pp. 168~204

(接受 1988. 11. 15)