고차 판 유한요소의 기하학적 비선형 해석

Geometrically Nonlinear Analysis of Higher Order Plate Bending Finite Element

신 영 식*
Shin, Young Shik

Abstract

A higher order plate bending finite element using cubic in-plane displacement profiles is proposed for geometrically nonlinear analysis of thin and thick plates. The higher order plate bending element has been derived from the three dimensional plate-like continuum by discretization of the equations of motion by Galerkin weighted residual method, together with enforcing higher order plate assumptions. Total Lagrangian formulation has been used for geometrically nonlinear analysis of plates and consistent linearization by Newton-Raphson method has been performed to solve the nonlinear equations. The element characteristics have been computed by selective reduced integration technique using Gauss quadrature to avoid shear locking phenomenon in case of extremely thin plates. Several numerical examples were solved with FEAP macro program to demonstrate versatility and accuracy of the present higher order plate bending element.

요 지

본 연구에서는 고차 판 유한요소의 판의 기하학적 비선형 해석에의 적용성을 고찰한다. 고차 판요소는 3차원 연속체로부터 Total Lagrangian 형태로 나타낸 운동방정식을 이산화하고 고차 판이론을 도입하여 유도한다. 유한변형을 고려한 기하학적 비선형 방정식은 Newton-Raphson반복법으로 내력벡터를 선형화하여 강도매트릭스를 반복계산하여 푼다. 요소매트릭스는 shear locking현상을 피하기 위하여 Gauss 적분법을 이용한 선택적 감차적분으로 계산한다. 여러가지 예제해석을 통하여 고차 판요소의 효율성과 정확도를 고찰하였다.

1. 서 론

일반적으로 휨을 받는 판은 두께에 따라 Kirchhoff의 얇은 판이론[1]과 Mindlin의 두꺼운 판이론[2]으로 해석함이 보통이다. 그런데 Kirchhoff의 고전적 가정에 근거한 얇은 판이론은 전단변형의 영향을 전혀 고려하지 않고 있으므로 전단변형의 영향이 상대적으로 커지는 두꺼운 판의 해석에는 부정당하다. 한편 Mindlin 판이론은 얇은 판이론과는 달리 전단변형의 영향을 포함하고 있으나 전단변형에너지를 충분히나

* 정회원 · 영남대학교 공과대학 조교수, 토목공학과

타낼 수 없으므로 단면의 휨(warping)을 보정하기 위하여 전단수정계수를 사용하고 있다. 또한 판의 두께가 얇아짐에 따라 전단강성이 과도하게 커지는 shear locking현상이 유발되어 얇은판의 해석에 불리하며 진동해석의 경우 고차모드에서 부정확한 결과를 나타낸다.

판의 유한변형에 대한 기하학적 비선형 문제는 total Lagrangian 방법이나 updated Lagrangian방법으로 해석하는데 전자의 방법은 판의 변형을 변형전의 초기상태를 기준으로 나타내며 후자의 방법은 구하고자 하는 변형 바로전의 변형상태를 기준으로 변형을 나타낸다. 등방성 재료의 경우 전자의 방법이 효율적이라고 알려져 있으며 최근에는 임의의 가상변형상태를기준으로 변형을 나타내는 의사(Pseudo) Lagrangian[3] 방법이 비선형 해석에 적용되고 있다.

지금까지 판의 기하학적 비선형 해석을 위한 많은 판요소들이 제안되었으나 대부분 얇은 판이론에 근거한 요소들로서 얇은 판의 해석에만 적용되었다. 판의 기하학적 비선형 해석을 위한 Mindlin판요소는 1976년 Noor[4]등에 의하여 처음으로 제안되었으며 그후 Pica[5](1980)와 Yang[6]등도 Heterosis판요소[7] 등의 Mindlin판요소를 이용하여 판의 기하학적 비선형 해석을 하였으나 유도과정이 복잡하고 계산량이 방대하여 일반적인 판의 해석에는 적용이 곤란하다.

따라서 본 연구에서는 본 연구자가 연구 발표한 바 있는 고차 보이론[8]을 판에 응용한 고차 판이론[9]을 이용하여 전단수정계수를 사용하지 않고 판의 두께에 관계없이 일반적인 판의 해석에 적용할 수 있는 고차 판요소를 제안하고 여러가지 예제해석을 통하여 판의 기하학적 비선형 해석에 대한 고차 판요소의 정확도와 적용성을 고찰하고자 한다.

2. 고차 판 유한요소의 유도

2.1 운동방정식의 이산화(Discretization)

공간직교좌표계 $\underset{\sim}{x}$와 국부요소좌표계 $\underset{\sim}{X}$에서판내의 임의의 질점 P의 운동은 변형전의 기준상태 B_0에서의 변위벡터 $\underset{\sim}{u}$로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_j(\underset{\sim}{X},t)=C_{jJ}X_J+d_j+u_j(\underset{\sim}{X},t) \qquad (1)$$

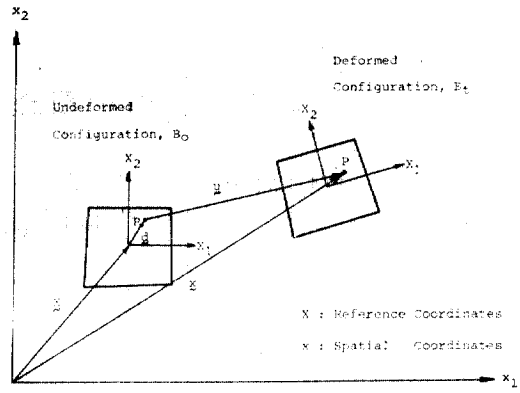


그림 1. Motion of a Plate Element

여기서 C_{jJ}는 $\underset{\sim}{x}$와 $\underset{\sim}{X}$좌표계사이의 좌표변환 매트릭스, $\underset{\sim}{d}$는 $\underset{\sim}{X}$좌표계 원점으로부터의 위치벡터이며 반복되는 지수는 총합을 나타낸다.

물체의 운동방정식을 Total Lagrangian형태로 나타내면 다음과 같다.

$$(S_{IJ}F_{jJ}),_I+\rho_0 b_j-\rho_0\ddot{u}_j=0 \qquad (2)$$

여기서 $\underset{\sim}{b}$는 체력벡터, $\underset{\sim}{S}$는 2차 Piola-Kirchhoff 응력텐서, $\underset{\sim}{F}$는 B_0와 B_t사이의 변형 Gradient, ρ_0는 B_0에서의 질량밀도이며 ( ),$_I$는 X_I에 대한 편미분을 의미한다. 물체내의 질점의운동이 미분가능할 만큼 원활하다면

$$F_{jJ}=\frac{\partial x_j}{\partial X_J} \qquad (3)$$

또한 B_0에서의 경계면 ∂B_0에 대한 경계조건은

$$n_I S_{IJ}F_{jJ}-T_j=0 \qquad (4)$$

여기서 $\underset{\sim}{n}$는 ∂B_0에 수직인 단위벡터이고 $\underset{\sim}{T}$는∂B_0에 작용하는 표면력이다.

(2)식과 (4)식에 Galerkin 가중잔차법을 적용하면 다음과 같은 Galerkin weak form 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}G(\underset{\sim}{u},\delta\underset{\sim}{u})=&-\int_{B_0}(S_{IJ}F_{jJ}),_I\,\delta u_j dV\\&-\int_{B_0}(\rho_0 b_j-\rho_0\ddot{u}_j)\delta u_j dV\\&+\int_{\partial B_0}(n_I S_{IJ}F_{jJ}-T_j)\delta u_j dA\end{aligned} \qquad (5)$$

여기서 $\delta\underset{\sim}{u}$는 $\underset{\sim}{u}$와 같은 벡터공간을 갖는 가중함수이다. (5)식을 부분적분하고 Gauss-Green정리를 적용하여 정리하면 하나의 요소에 대한

Galerkin 함수는

$$G^e(\underset{\sim}{u},\delta\underset{\sim}{u})=\int_{B0^e}S_{IJ}F_{jJ}\delta u_{j,I}dV$$
$$-\int_{B0^e}(\rho_0 b_j-\rho_0\ddot{u}_j)\delta u_j dV$$
$$-\int_{\partial B0^e}T_j\delta u_j dA \qquad (6)$$

그런데 좌표계 $\underset{\sim}{X}$의 원점이 요소의 중앙에 위치한다면 $\underset{\sim}{u}$와 $\delta\underset{\sim}{u}$는 각각의 절점값 $\underset{\sim}{U}^a$와 $\delta\underset{\sim}{U}^a$로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{X})=\sum_{a=1}^{n}N^a(\underset{\sim}{X})\underset{\sim}{U}^a \qquad (7)$$

$$\delta\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{X})=\sum_{a=1}^{n}N^a(\underset{\sim}{X})\delta\underset{\sim}{U}^a \qquad (8)$$

또한 요소가 등매개성을 갖는다면

$$\underset{\sim}{x}=\sum_{a=1}^{n}N^a(\underset{\sim}{X})\underset{\sim}{x}^a \qquad (9)$$

(7)식과 (8)식을 (6)식에 대입하여 정리하면

$$G^e(\underset{\sim}{U},\delta\underset{\sim}{U})=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\delta U_j^b(M_{ji}^{ba}\ddot{U}_i^a+K_j^b-R_j^b) \qquad (10)$$

여기서 요소질량매트릭스 M_{ji}^{ba}는

$$M_{ji}^{ba}=\int_{B0^e}N^aN^bdV\delta_{ij} \qquad (11)$$

요소외력벡터 R_j^b는

$$R_j^b=\int_{\partial B0^e}T_jN^bdA+\int_{B0^e}\rho_0 b_jN^bdV \qquad (12)$$

그리고 요소내력벡터 K_j^b는

$$K_j^b=\int_{B0^e}S_{IJ}F_{jJ}N^b_{,I}dV \qquad (13)$$

따라서 각각의 요소들의 Galerkin 함수를 조합하면 전체시스템에 대한 Galerkin 방정식은 다음과 같이 된다.

$$G(\underset{\sim}{U},\delta\underset{\sim}{U})=\delta\underset{\sim}{U}^T[\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{U}}+\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U})-\underset{\sim}{R}]=\underset{\sim}{O} \qquad (14)$$

그런데 $\delta\underset{\sim}{U}^T$는 임의의 값이므로 윗식을 다시 쓰면 다음과 같은 이산화된 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{U}}+\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U})-\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{O} \qquad (15)$$

2.2 고차 변위함수와 형상함수

고차 판이론[9]에서 판의 임의점에서의 변위 $\underset{\sim}{u}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{X})=\begin{Bmatrix}u_1(\underset{\sim}{X})\\u_2(\underset{\sim}{X})\\u_3(\underset{\sim}{X})\end{Bmatrix}$$

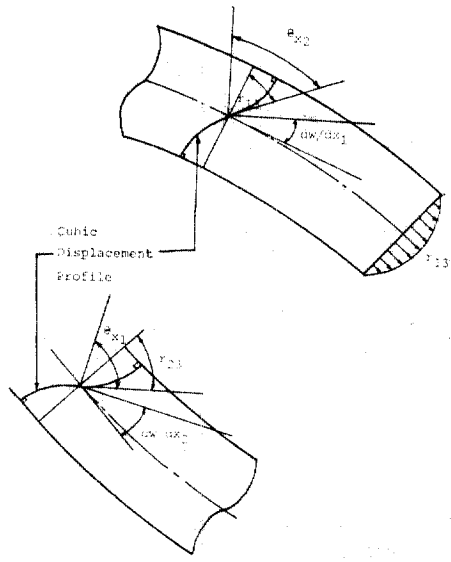


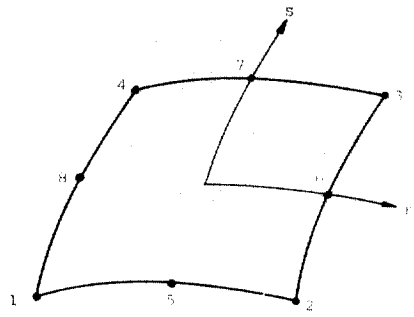
그림 2. Assumed Displacement Profiles of Proposed Higher Order Plate Bending Element

$$=\begin{Bmatrix}-\frac{4X_3^3}{3h^2}\frac{\partial}{\partial X_1} & -(\frac{4X_3^3}{3h^2}-X_3) & 0\\ -\frac{4X_3^3}{3h^2}\frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & (\frac{4X_3^3}{3h^2}-X_3)\\ 1 & 0 & 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\omega\\ \theta_{X_2}\\ \theta_{X_1}\end{Bmatrix} \qquad (16)$$

또한 연직처짐 ω와 회전각 θ는 다음과 같이 절점변위의 항으로 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}\omega\\ \theta_{X_2}\\ \theta_{X_1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{a=1}^{4}N_w^a & \sum_{a=1}^{4}N_x^a & \sum_{a=1}^{4}N_y^a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sum_{a=1}^{8}N_\theta^a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{a=1}^{8}N_\theta^a\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\omega^a\\ d\omega^a/dX_1\\ d\omega^a/dX_2\\ \theta_{X_2}^a\\ \theta_{X_1}^a\end{Bmatrix} \qquad (17)$$

여기서 N_w^a, N_x^a, N_y^a와 N_θ^a는 절점 a에서의 ω,



D.O.F : w, $w_{,X_1}$, $w_{,X_2}$, θ_{X_1}, θ_{X_2} at Corner Nodes

θ_{X_1}, θ_{X_2} at Mid-Nodes

그림 3. Configuration of Proposed Plate Bending Element

$\frac{d\omega}{dX_1}$, $\frac{d\omega}{dX_2}$ 및 θ에 대한 형상함수로서 다음과 같다.

$$N_w^a=\frac{1}{16}(2+3r^ar-r^ar^3)(2+3s^as-s^as^3) \quad (a=1,4) \tag{18}$$

$$N_x^a=\frac{L_x}{32}(-r^a-r+r^ar^2+r^3)(2+3s^as-s^as^3)(a=1,4) \tag{19}$$

$$N_y^a=\frac{L_y}{32}(-s^a-s+s^as^2+s^3)(2+3r^ar-r^ar^3)(a=1,4) \tag{20}$$

$$N_\theta^a=\frac{1}{4}(1+r^ar)(r^a)^2(1+s^as)(s^a)^2(r^ar+s^as-1)+\frac{1}{2}[(1-r^2)(1+s^as)\{1-(r^a)^2\}+(1-s^2)(1+r^ar)\{1-(s^a)^2\}](a=1,8) \tag{21}$$

여기서 L_x, L_y는 X_1, X_2방향으로의 요소의 길이이다. θ에 대한 C^0연속성을 만족하려면 θ가 모든 절점의 자유도로 취해져야 하며 θ에 대한 형상함수는 (21)식과 같이 2차함수로 나타낸다. 최고차 도함수가 $\frac{\partial^2\omega}{\partial X^2}$인 ω에 대한 C^1연속성을 만족하려면 ω, $\frac{d\omega}{dX_1}$ 및 $\frac{d\omega}{dX_2}$가 모서리 절점의 자유도로 취해져야 하며 형상함수는 3차함수로 나타내어야 한다.

(17)식을 (16)식에 대입하면

$$\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\sum_{a=1}^{}$$

$$\begin{bmatrix}\phi(X_3)N_{w,1}^a & \phi(X_3)N_{x,1}^a & \phi(X_3)N_{y,1}^a & -\phi(X_3)N_\theta^a & 0\\ \phi(X_3)N_{w,2}^a & \phi(X_3)N_{x,2}^a & \phi(X_3)N_{y,2}^a & 0 & \phi(X_3)N_\theta^a\\ N_w^a & N_x^a & N_y^a & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\omega^a\\ d\omega^a/dX_1\\ d\omega^a/dX_2\\ \theta_{X_2}^a\\ \theta_{X_1}^a\end{Bmatrix} \tag{22}$$

여기서 $\phi(X_3)=\frac{-4X_3^3}{3h^2}$, $\phi(X_3)=\frac{4X_3^3}{3h^2}-X_3$이며 N_w, N_x, N_y 항에서 $a=5\sim8$은 Dummy 항이다.

2.3 내력벡터의 선형화

유한변형에 대한 기하학적 비선형 방정식은 (15)식의 관성력항을 제거하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U})-\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{O} \tag{23}$$

$\underset{\sim}{U}$의 함수인 $\underset{\sim}{K}$를 Taylor급수로 전개하여 고차항을 무시하면

$$\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U}_{n+1})=\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U}_n)+\frac{\partial\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U}_n)}{\partial\underset{\sim}{U}}(\underset{\sim}{U}_{n+1}-\underset{\sim}{U}_n) \tag{24}$$

여기서 접선강도 매트릭스를 $T\underset{\sim}{K}=\frac{\partial\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U}_n)}{\partial\underset{\sim}{U}}$, 변위증분을 $\Delta\underset{\sim}{U}_n=\underset{\sim}{U}_{n+1}-\underset{\sim}{U}_n$이라 하면 m번째 반복계산에서의 변위증분에 대한 지배방정식은

$$T\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U}_n^m)\Delta\underset{\sim}{U}_n^m=\underset{\sim}{R}_n-\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U}_n^m) \tag{25}$$

(25)식을 성분식으로 나타내면

$$TK_{ji}^{ba}(\underset{\sim}{U}_n^m)=\frac{\partial K_j^b}{\partial U_i^a}\Big|_{\underset{\sim}{U}=\underset{\sim}{U}_n^m} \tag{26}$$

(13)식을 (26)식에 대입하면

$$TK_{ji}^{ba}(\underset{\sim}{U}_n^m)=\int_{B0}^{e}\left[\frac{\partial S_{IJ}}{\partial U_i^a}F_{jJ}N_{,I}^b+S_{IJ}\frac{\partial F_{jJ}}{\partial U_i^a}N_{,I}^b\right]dV\Big|_{\underset{\sim}{U}=\underset{\sim}{U}_n^m} \tag{27}$$

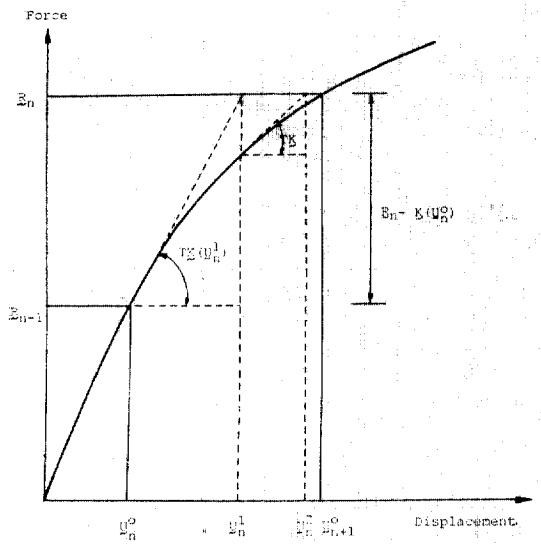


그림 4. Consistent Linearization by Newton-Raphson Technique

그런데 (1)식, (3)식 및 (6)식으로부터

$$F_{ij}=\frac{\partial x_j}{\partial X_J}=\frac{\partial}{\partial X_J}(C_{jJ}X_J+d_j+u_j)$$

$$=C_{jJ}+\sum_{a=1}^{n}N^a_{,J}U^a_j \qquad (28)$$

따라서

$$\frac{\partial F_{jJ}}{\partial U^a_i}=\delta_{ij}N^a_{,J} \qquad (29)$$

가 되고 연쇄규칙에 의하여

$$\frac{\partial S_{IJ}}{\partial U^a_i}=\frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}}\cdot\frac{\partial E_{KL}}{\partial U^a_i} \qquad (30)$$

으로 쓸 수 있으며 Green의 변형도 텐서 $E_{IJ}=\frac{1}{2}(F_{KI}F_{KJ}-\delta_{IJ})$로 부터

$$\frac{\partial E_{KL}}{\partial U^a_i}=\frac{1}{2}(N^a_{,K}F_{iL}+N^a_{,I}F_{iJ}) \qquad (31)$$

윗식들을 (27)식에 대입하여 정리하면

$$TK^{ba}_{ji}(U^m_n)=\int_{B^e_0}[F_{jJ}N^b_{,I}]\frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}}[F_{iL}N^a_{,K}]dV$$

$$+\int_{B^e_0}\delta_{ij}N^a_{,I}S_{IJ}N^b_{,J}dV \qquad (32)$$

(32)식을 매트릭스로 다시 쓰면

$$T\underset{\sim}{K}^{ba}=\int_{B^e_0}(\underset{\sim}{B}^b)^T\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{B}^a dV$$

$$+\int_{B^e_0}(\underset{\sim}{N}^b)^T\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{N}^a dV\underset{\sim}{I} \qquad (33)$$

여기서 $\underset{\sim}{B}$는 변형도 매트릭스, $\underset{\sim}{D}$는 재료의 성질을 나타내는 매트릭스이며 $\underset{\sim}{I}$는 단위매트릭스이다. 윗식의 우변 첫째항은 유한운동의 영향을고려한 탄성접선강도이며 둘째항은 초기응력의 효과를 나타낸다.

2.4 비선형 수치해석

Newton-Raphson반복법에 의한 비선형 해석에서는 내력벡터 $\underset{\sim}{K}$를 선형화하여 매하중단계마다 $\underset{\sim}{K}$와 $T\underset{\sim}{K}$를 반복계산하여 변위와 응력을 계산한다.

m번째 반복에서의 변위증분 방정식

$$T\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U}^m_n)\Delta\underset{\sim}{U}^m_n=\underset{\sim}{R}_n-\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{U}^m_n) \qquad (34)$$

에서 $\underset{\sim}{U}^m_n$에 대한 $\underset{\sim}{K}$와 $T\underset{\sim}{K}$를 계산하고 입력된하중벡터 $\underset{\sim}{R}_n$을 대입하여 풀면 변위증분 $\Delta\underset{\sim}{U}^m_n$을 구할 수 있다. $\underset{\sim}{U}^m_n+\Delta\underset{\sim}{U}^m_n=\underset{\sim}{U}^{m+1}_n$에 의하여 현재변위 $\underset{\sim}{U}^{m+1}_n$을 수정하고 $(m+1)$번째 반복계산의 필요성을 검토한다. 즉, $\Delta\underset{\sim}{U}^m_n$의 Norm과 $\underset{\sim}{U}^{m+1}_n$의 Norm의 비가 입력된 수렴조건보다 크면 계산을 반복하고 작으면 다음 하중단계에 대한 계산을 진행한다.

선형화된 비선형 방정식의 $\underset{\sim}{K}$와 $T\underset{\sim}{K}$는 Shear locking 현상을 피하기 위하여 휨항과 전단항으로 구분하여 각기 다른 수의 Gauss적분점을 이용한 선택적 감차적분으로 계산한다. 전자는 8점의 Gauss적분점에서 적분하고 후자는 1점의 Gauss적분점에서 적분하여 계산한다.

3. 예제해석 및 고찰

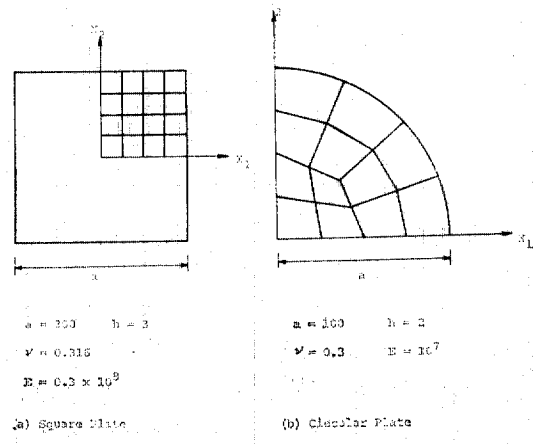


그림 5. Configuration of Square and Circular Plates

표 1. Normalized central displacemants(x l/h) and their percentage errors to the analytical solutions of a simply supported square plate under uniformly distributed loads

Load (x a^4/Eh^4)	Analytical solution(11)	Serendipity element(5)	Lagrangian element(5)	Heterosis element(5)	Present element
9.16	0.335	0.3478 (3.82)	0.3480 (3.84)	0.3478 (3.82)	0.3462 (3.34)
36.6	0.818	0.8184 (0.05)	0.8185 (0.06)	0.8184 (0.05)	0.8183 (0.05)
146.5	1.47	1.4655 (−0.31)	1.4657 (−0.29)	1.4655 (−0.31)	1.4656 (−0.30)
586.0	2.40	2.3927 (−0.30)	2.3932 (−0.28)	2.3928 (−0.30)	2.3931 (−0.29)
2344.0	3.83	3.8124 (−0.46)	3.8134 (−0.43)	3.8128 (−0.45)	3.8135 (−0.43)
9377.0	6.07	6.0521 (−0.29)	6.0539 (−0.26)	6.0530 (−0.28)	6.0536 (−0.27)

표 2. Normalized centre stresses(x a^2/Eh^2) and their percentage errors to the analytical solutions of a simply supported square plate under uniformly distributed loads

Load (x a^4/Eh^4)	Analytical solution(11)	Serendipity element(5)	Lagrangian element(5)	Heterosis element(5)	Present element
9.16	2.46	2.6214 (6.56)	2.6029 (5.81)	2.6016 (5.76)	2.6028 (5.80)
36.6	6.90	7.0026 (1.49)	6.9826 (1.20)	6.9787 (1.14)	6.9826 (1.20)
146.5	14.5	14.644 (1.00)	14.635 (0.93)	14.615 (0.79)	14.614 (0.78)
586.0	30.0	30.183 (0.61)	30.188 (0.63)	30.130 (0.43)	30.172 (0.57)
2344.0	65.2	65.673 (0.73)	65.756 (0.85)	65.661 (0.71)	65.570 (0.57)
9377.0	148.3	149.66 (0.92)	149.99 (1.14)	149.87 (1.06)	149.56 (0.85)

고차 판요소의 기하학적 비선형 해석에의 적용성을 고찰하기 위하여 그림 5와 같은 정방형 판과 원형 판을 판의 대칭성을 고려하여 판의 $\frac{1}{4}$만을 16개 요소로 분할하여 해석하였다. 모든 해는 최대반복 계산회수를 20회로 하여 FEAP[10] 프로그램으로 계산하였으며 수렴조건은 변위증분의 Norm이 현재변위의 Norm의 10^{-5}배가 되도록 정하였다.

3.1 단순지지 정방형 판

등분포하중을 받는 단순지지 정방형 판을 여섯 하중단계에 대하여 해석하여 Rushton[11]의 해석적인 해와 Mindlin판이론에 근거한 Pica[5] 등의 8절점 Serendipity요소, 9절점 Lagrangian요소 및 9절점 Heterosis요소들에 의한 해

표 3. Normalized central displacements(x 1/h) and their percentage errors to the analytical solutions of a clamped square plate under uniformly distributed loads

Load ($x\ a^4/Eh^4$)	Analytical solution(12)	Serendipity element(5)	Lagrangian element(5)	Heterosis element(5)	Present element
17.79	0.237	0.2351 (−0.78)	0.2368 (−0.08)	0.2361 (−0.38)	0.2365 (−0.21)
38.30	0.471	0.4673 (−0.79)	0.4699 (−0.23)	0.4687 (−0.49)	0.4690 (−0.42)
63.40	0.695	0.6887 (−0.90)	0.6915 (−0.50)	0.6902 (−0.69)	0.6915 (−0.50)
95.00	0.912	0.9003 (−1.29)	0.9029 (−1.00)	0.9015 (−1.15)	0.9042 (−0.86)
134.9	1.121	1.1041 (−1.51)	1.1063 (−1.31)	1.1050 (−1.43)	1.1076 (−1.21)
184.0	1.323	1.2990 (−1.81)	1.3009 (−1.67)	1.2997 (−1.93)	1.3064 (−1.25)
245.0	1.521	1.4913 (−1.95)	1.4928 (−1.85)	1.4916 (−1.93)	1.4938 (−1.79)
318.0	1.714	1.6774 (−2.13)	1.6786 (−2.06)	1.6775 (−2.13)	1.6844 (−1.73)
402.0	1.902	1.8682 (−1.77)	1.8555 (−2.44)	1.8545 (−2.50)	1.8554 (−2.44)

표 4. Normalized centre stresses(x a^2/Eh^2) and their percentage errors to the analytical solutions of a clamped square plate under uniformly distributed loads

Load ($x\ a^4/Eh^4$)	Analytical solution(12)	Serendipity element(5)	Lagrangian element(5)	Heterosis element(5)	Present element
17.79	2.60	2.6571 (2.19)	2.6319 (2.13)	2.6144 (0.55)	2.6158 (0.61)
38.30	5.20	5.5137 (6.03)	5.4816 (5.41)	5.4520 (4.85)	5.4025 (3.89)
63.40	8.00	8.3528 (4.41)	8.3258 (4.07)	8.2908 (3.63)	8.1236 (1.55)
95.00	11.10	11.115 (0.14)	11.103 (0.03)	11.066 (−0.30)	11.024 (−0.68)
134.9	13.30	13.817 (3.88)	13.827 (3.96)	13.789 (3.67)	13.612 (2.35)
184.0	15.90	16.461 (3.53)	16.497 (3.75)	16.456 (3.49)	16.429 (3.33)
145.0	19.20	19.160 (−0.21)	19.225 (0.13)	19.178 (−0.12)	19.088 (−0.58)

318.0	21.90	21.902 (0.00)	21.994 (0.43)	21.938 (0.17)	21.926 (0.12)
402.0	25.10	24.805 (−1.18)	24.780 (−1.27)	24.713 (−1.54)	24.784 (−1.26)

표 5. Normalized central displacements(x l/h) and their percentage errors to the analytical solutions of a clamped circular plate under central point loads

Load (xa^4/Eh^4)	Analytical solution(13)	Serendipity element(5)	Lagrangian element(5)	Heterosis element(5)	Present element
1.0	0.2130	0.2044 (−0.04)	0.2149 (0.89)	0.2085 (−2.11)	0.2148 (0.88)
2.0	0.4052	0.3908 (−3.56)	0.4088 (0.88)	0.3977 (−1.86)	0.4090 (0.94)
3.0	0.5705	0.5528 (−3.10)	0.5754 (0.87)	0.5612 (−1.62)	0.5764 (1.03)
4.0	0.7123	0.6930 (−2.71)	0.7184 (0.86)	0.7021 (−1.44)	0.7165 (0.59)
5.0	0.8354	0.8152 (−2.41)	0.8427 (0.87)	0.8246 (−1.29)	0.8436 (0.98)
6.0	0.9442	0.9237 (−2.17)	0.9527 (0.90)	0.9332 (−1.16)	0.9502 (0.64)

표 6. Normalized mid-edge stresses(x a^2/Eh^2) and their percentage errors to the analytical solutions of a clamped circular square plate under central point loads

Load ($x\ a^4/Eh^4$)	Analytical solution(13)	Serendipity element(5)	Lagrangian element(5)	Heterosis element(5)	Present element
1.0	0.4858	0.5318 (9.48)	0.4932 (1.52)	0.6767 (39.3)	0.5085 (4.67)
2.0	0.9592	1.0478 (9.24)	0.9765 (1.80)	1.3268 (38.3)	0.9804 (2.21)
3.0	1.3974	1.5240 (9.06)	1.4248 (1.96)	1.9194 (37.3)	1.4196 (1.59)
4.0	1.7988	1.9583 (8.87)	1.8355 (2.04)	2.4537 (36.4)	1.8406 (2.32)
5.0	2.1679	2.3553 (8.64)	2.2129 (2.07)	2.9377 (35.5)	2.2148 (2.16)
6.0	2.5110	2.7221 (8.41)	2.5635 (2.09)	3.3816 (34.7)	2.5583 (1.85)

와 비교하였다. 표 1과 표 2에서 보는 바와 같이 고차 판요소에 의한 판의 중앙처짐 및 응력은 다른 세 Mindlin판요소들에 의한 값들과 비슷한 정확도를 나타내고 있다.

3.2 고정지지 정방형 판

등분포하중을 받는 고정지지 정방형 판을 여

러 하중단계에 대하여 해석하여 Levy[12]의 해석적인 해와 Pica[5]등의 Mindlin판요소들에 의한 유한요소 해와 비교하였다. 표 3에서 보는 바와 같이 고차 판요소에 의한 판의 중앙처짐은 상당한 정확도를 나타내고 있으며 9절점 Lagrangian요소와 비슷한 결과를 보여주고 있다. 또한 고차 판요소에 의한 판의 중앙부응력은 표 4에서와 같이 9절점 Heterosis요소와 유사한 정확도를 나타내고 있다.

3.3 고정지지 원형 판

판의 중앙에 하나의 집중하중을 받는 그림 5(b)와 같은 고정지지된 원형 판을 해석하여 Schmit[13]의 해석적인 해 및 Pica[5]등의 Mindlin 판요소들에 의한 해와 비교하였다. 표 5에서보는 바와 같이 고차 판요소에 의한 원형 판의 중앙처짐은 Lagrangian 요소와 비슷한 정확도를 보여주고 있으며 판의 단부 전단응력은 표 6에서와 같이 Lagrangian요소의 값보다 약간 크나 대체로 만족할만한 결과를 보여주고 있다.

4. 결 론

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 고차 판요소를 이용한 판의 기하학적 버선형 해석에서는 경계조건과 하중상태에 관계없이 판의 중앙처짐과 응력에서 Mindlin 판요소들보다 우월한 정확도를 보여주었다.

(2) 고차 판요소는 판의 면내 수평변위를 고차함수로 가정하여 단면의 뒴을 보다 실제적으로 나타내었기 때문에 전단수정계수를 사용할필요가 없다.

따라서 고차 판요소는 판의 두께에 관계없이 일반적인 판의 기하학적 버선형 해석에 적용할 수 있으리라 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 1986년도 후반기 연구비 지원에 의하여 수행되었으므로 이에 감사의 뜻을 표하는 바이다.

참 고 문 헌

1. Szilard, R., "*Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods,*" Prentice-Hall(1974).
2. Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates," *J. Appl. Mech.*, Vol. 18, 1951, pp. 31~38.
3. Wong, W.K., "*Pseudo Lagrangian formulation for large deformation analysis of continua and structures,*" M. Eng. Thesis, NO. ST. 84-33, 1984, AIT.
4. Noor, A.K., Mathers, M.D. and Anderson, M.S., "Exploiting symmetries for efficient postbuckling analysis of composite plates," *J. AIAA.*, Vol. 15, 1976, pp. 24~32.
5. Pica, A., Wood, R.D. and Hinton, E., "Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a Mindlin formulation," *Comp. Str.*, Vol. 11, 1980, pp. 203~215.
6. Yang, R.J. and Bhatti, M.A., "Nonlinear static and dynamic analysis of plates," *ASCE.*, Vol. 111, EM6, 1985, pp. 175~186.
7. Hughes, TJ.R. and Cohen, M., "The heterosis finite element for plate bending," *Comp. Str.*, Vol. 9, No. 5, 1978, pp. 445~450.
8. Kanok-Nukulchai, W. and Shin, Y.S., "Versatile and improved higher order beam element" *ASCE.*, Vol. 110, ST9, 1984, pp. 2234~2248.
9. 신영식, 신현묵, 김명철, "고차 판 사각형 유한요소, "**대한토목학회논문집**, 8권 2호, pp. 25~32 (1988)
10. Zienkiewicz, O.C., "*The Finite Element Method,*" 3rd Ed., McGraw-Hill(1977)
11. Rushton, K.R., "Large deflection of plates with initial curvature," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 12, 1970, pp. 1037~1051.
12. Levy, S., "*Square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections,*" NACA., Tech. Note 84
13. Schmit, R., "Large deflections of a clamped circular plates," *ASCE.*, Vol. 94, EM6, 1968, pp. 1603~1606
14. Reddy, J.N., "A refined nonlinear theory of plates with tranverse shear deformations," *Int. J. Sol. Str.*, Vol. 20, No. 9/10, 1984, pp. 881~896.
15. 심재수, "8절점 「입체 유한요소에 의한 쉘구조의

기하학적 비선형 해석", 서울대학교 박사학위논문 (1986)

16. Kanok-Kulchai, W., Taylor, R.L. and Hughes, T.J.R., "A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method," *Comp. Str.*, Vol. 13, 1981, pp. 19~27.
17. Kanok-Nukulchai, W., Hasegawa, A. and Nishino, F., "Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements," *JSCE.*, Str. Eng./Eq. Eng., Vol. 3, No. 1, 1986, pp. 53~61.
18. Wood, R.D. and Zienkiewicz, O.C., "Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells," *Comp. Str.*, Vol. 7, 1977, pp. 725~735
19. Hinton, E. and Bicanic, N., "A comparison of Lagrangian and serendipity Mindlin plate elements for free vbration analysis," *Comp. Str.*, Vol. 10, 1979, pp. 483~493.
20. Kawai, T. and Yoshimura, N., "Analysis of large deflection of plates by the finite element method," *Int. J· Num. Meth. Eng.*, Vol. 1, 1968, pp. 123~133.
21. Chia, C.K., "*Nonlinear Analysis of Plates*," 1980, McGraw-Hill.
22. Ogden, R.W., "*Nonlinear Elastic Deformation*," 1984, Ellis Horwood Press.
23. Dhatt, G. and Touzot, G., "*The Finite Element Method Displayed*," 1984, John Wiely & Sons.

(接受 : 1988. 7. 21)