

# 복합체에 대한 연속체 방정식 및 유한요소프로그램의 개발

## Development of Continuum Equations and Finite Element Method Program for Composite Systems

임	종	균*
Lim,	Chong	Kyun
박	문	호**
Park,	Moon	Ho

### Abstract

An "equivalent homogeneous, orthotropic" model that includes edge effects and an accompanying finite element analysis is presented for elastomeric bearings. The model is developed for two-dimensional configurations with horizontal layers, and for linear, elastic, small deformation conditions. The equivalent homogeneous theory, in addition to capturing the overall response characteristics of the layered elastomeric bearing system, approximately models the important edge effects, which occur at and near boundaries that cut the layers, and the stress concentrations at layer interfaces. The primary dependent variables for the theory have been selected such that the highest derivatives appearing in the strain energy function are first-order, thus requiring only  $C_0$  continuity of the finite element approximations. As a result, the finite element analysis is simple and computationally efficient. Numerical examples are presented to verify the theory and to illustrate potential applications of the analysis.

### 요 지

본 연구는 복합체의 단부영향을 고려한 등가균등질, 이방성의 모델개발과 이에따른 유한요소 해석 프로그램 개발에 중점을 두었다. 복합체는 2 차원의 수평층을 가지며 선형, 탄성, 작은변형에 제한을 두었다. 본 연구에서 개발된 등가 균등질의 이론은 복합체의 전반적인 거동을 포함시킴은 물론 층과 수직인 경계면과 그 부근에 형성되는 단부의 영향과 층의 경계면에 생기는 응력집중 현상을 나타낼 수 있게 하였다. 이론개발에 있어 1 차변수는  $C_0$  연속의 유한요소 근사치를 가지도록 하였으며 이를위해 최고 1 차의 미분치가 변형에너지에 나타나도록 변수를 택하였다. 결과적으로 유한요소해석은 매우 간단하고 경제적이었으며 이들의 정당성과 정확도를 입증하기 위하여 여러하중 조건하의 복합체를 풀이하였다.

\* 정희원 · 경북대학교 공과대학 교수, 토목공학과

\*\* 정희원 · 경북대학교 공과대학 교수, 토목공학과

# 1. 서 론

강성과 연성의재료가 층층이 교차되어 이루어진 복합체(composite system)는 여러분야에서 다양하게 쓰이고 있다. 대표적인 예로서 교량의 탄성지승(elastomeric bearing)<sup>(1)</sup>, reinforced earth structure<sup>(2)</sup>, 빌딩의 isolation pad<sup>(3)</sup>, 로켓트 엔진의 flux seal<sup>(4)</sup>, 헬리콥터의 shaft-bearing<sup>(5)</sup> 등을 들수있다. 복합체의 해석은 구성재료의 큰강성의 차이와 연성재료의 비선형과 비탄성의 성질에 의하여 어려움을 겪어왔다. 가장 보편적인 방법으로 이산화 유한요소 해석법(discrete analysis)이 행하여져 왔으나 매우 많은 요소(elements)가 요구<sup>(6,7)</sup>되어 때로는 해석이 불가능한 경우도 있었다. 이러한 결점을 보완하여 적은요소를 사용하고도 이산화 해석의 정확도를 얻을 수 있는 복합해석(composite analysis)방법이 개발되었다. 복합체를 등가균질, 이방성(equivalent homogeneous, anisotropic)으로 취급 할 수 있는 연속체 방정식(continuum equation)을 유도하고 이에의한 유한요소법에 의한 해석방법이다.<sup>(7-10)</sup> 이들의 효율성과 정확도는 여러 하중조건하의 복합체를 해석한 후 이산화해석의 결과치와 비교하여 입증되었으나 개발과정상 중첩의 원리를 사용함으로써 비선형의 영향을 포함시킬 수 있는 복합해석의 연구로 발전시킬수가 없었다. 본 연구에서는 이러한 결점을 보완한 새로운 복합이론을 개발하여 장래 비선형의 영향을 고려할수 있는 이론 개발의 발판을 만들고자 한다. 본 연구는 평면 변형률상태의 복합체를 대상으로 하며 탄성(elastic), 작은 변위(small deflection), 작은 변형(small deformation)의 이론에 바탕을 둔다. 이론의 정당성과 정확도는 이미 개발된 복합해석, 이산화해석, perturbation을 이용한 수학적 방법<sup>(11)</sup> 등의 결과치와 비교하여 입증하였다.

## 2. 복합이론(composite theory)

### 2.1 기본변형 및 단부영향에 의한

중첩의원리를 이용하여 개발된 복합이론<sup>(7-10)</sup>에서 밝혀진 단부영향(edge effect)에 의한 변형상태는 기본변형상태와 중첩되어 평면변형률상

태에 있는 복합체의 어떠한 변형도 나타낼수 있도록 하였으며 이들의 이해는 현재 개발하고자 하는 복합이론의 필수조건이 된다. 그림 1에 나타나있는 세가지의 변형상태는 균등질재료의 기본변형상태에 대응하는 복합체의 기본변형상태이며  $\bar{\epsilon}$ 와  $\bar{\nu}$ 는 균등질재료의  $\epsilon$ 와  $\nu$ 에 해당하는 강성과 연성재료의 평균변위를 나타낸다. 상태 "a"는 x 축방향으로의 등분포변위, 상태 "b"는 y 축방향으로의 등분포변위, 상태 "c"는 등분포 전단응력을 받는 경우의 변형상태이다. 이들 기본변형상태는 균등질재료에서와는 달리 등분포 변위는 비등분포응력, 등분포응력은 비등분포 변위를 일으킨다. 따라서 이들의 합성상태로는 층과 수직을 이루는 단부에서 있을 수 있는 경계조건을 나타낼 수가 없다.

이를 가능케 하기 위한 추가의 변형상태가 그림 2,3에 나타나 있다. 그림 2는 상태 "a", "b"와 합성되어 등분포응력의 경계조건을 나타내도록 하였으며 그림 3은 상태 "c"와 합성되어 등

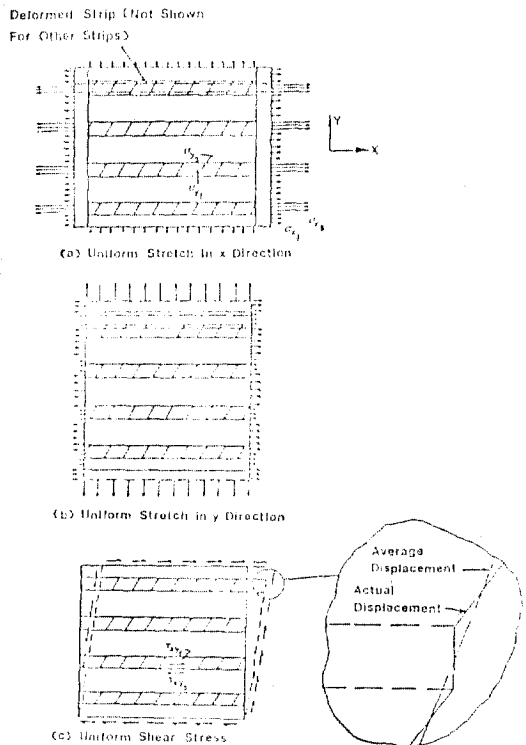


그림 1. Plain strain 상태하의 기본 변형 상태

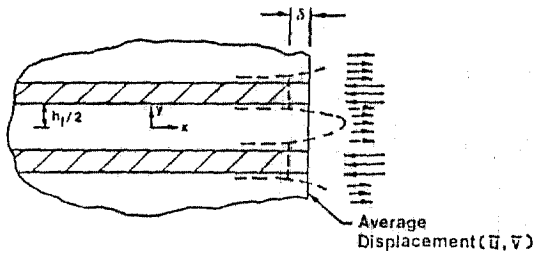


그림 2. Plain strain 상태하의 "d" 상태 (shear lag effect)

분포 전단변위의 경계조건을 나타내도록 하였다 이들 두가지 변형상태를 단부영향(edge effect)에 의한 변형상태라 하며 각각 "shear lag" 단부영향, "bending" 단부영향에 의한 변형상태라 한다. 이들 변형상태는 강성재료의 평균변위( $\bar{u}$ )와의 상대적변위( $\delta$ )와 강성재료의 회전각( $\phi$ )로서 결정되어진다. 따라서 복합체의 변형상태는 균등질재료와는 달리  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ 의 4개의 변수로서 정해진다.

### 2.2 복합이론

본 연구에서는 복합체의 변위를 나타내기 위하여 두가지 좌표축을 사용한다(그림 4). Global 좌표축은 복합체의 평균적인 거동을 잡기위함이며 local 좌표축은 각층에서 일어나고있는 실제의 변위를 나타내기 위함이다. 강성의 재료를

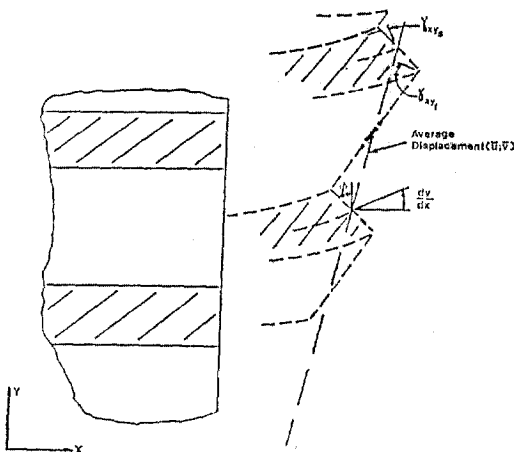


그림 3. Plain strain 상태하의 bending edge effect

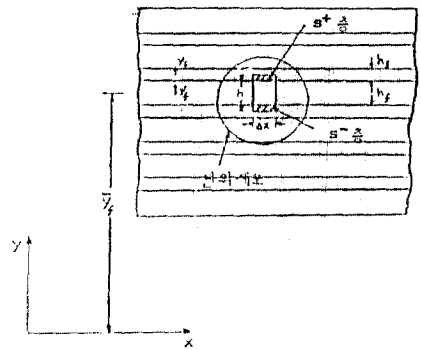


그림 4. 복합체의 좌표축과 단위세포

"s", 연성의 재료를 "f"로 표시하며  $\bar{y}_i (i=s, f)$ 는 특정한 층의 중심까지의 거리를 나타낸다.  $y_i (i=s, f)$ 는 i재료의 중심에 원점을 두는 local 좌표축을 말하며(그림 4) 경계면에서  $\pm 1$ 이 되게 한다.

$$\text{즉 } y_i = \frac{2}{h_i}(y - \bar{y}_i) \quad (1)$$

복합체를 이루는 가장 작은 기본블록을 기본 세포(unit cell)이라고하며(그림 4) 본 연구에서는 "f"층 한층과 절반높이의 "s"층 두개를 사용한다. 위쪽 절반의 "s"층을 +, 아래쪽 절반 "s"층을 -로 한다. 변수  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ 는 단위세포의 평균 변위를 나타내며  $\delta$ 와  $\phi$ 와 함께 global 좌표축 x, y의 함수가 된다. 이들은 단위세포내에서 매우 완만한 변화를 일으킨다고 보아 Taylor series의 처음 3항만으로 근사적 표현을 한다. 즉

$$\bar{u}(x, y) \approx \bar{u}^f + \bar{u}_x^f x + \bar{u}_y^f (y - \bar{y}_f) \quad (2)$$

여기서

$$\bar{u}^f = \bar{u}(x, \bar{y}_f)$$

따라서

$$\bar{u}_{,x} \approx \bar{u}_x^f$$

$$\bar{u}_{,xx} \approx 0$$

가 된다.

$\bar{v}$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ 도 위와 같이 표시된다.

실제 각층에서 일어나는 변위  $u_i, v_i (i=s, f)$ 는 local 좌표축  $y_i$ 의 polynomial로 표시되며 polynomial의 계수는 그층의 중앙에서의 global 변수와 그들의 미분치로서 나타낸다. 즉 "s"층의 근사적인 변위는 다음과 같이 정한다.

$$u_s = \bar{u}^s - \delta^s - \frac{h_s}{2} \phi^s y_s \quad (3)$$

$$v_s = \bar{v}^s + B_0^s + B_1^s y_s + B_2^s y_s^2 \quad (4)$$

여기서  $\delta^s$  와  $B_0^s$  는  $\bar{u}^s$  와  $\bar{v}^s$  가 평균변위가 될 수 있도록 scaling 의 목적으로 포함되었으며  $\phi^s y_s$  는 휨을 고려한 항이다.  $B_1^s y_s$  는 thickness 응력 ( $\delta y_s$ ) 에 의한 두께 변형률을 고려한 항이며  $B_2^s y_s^2$  은 휨에 의한 Poisson 의 영향에 의한 항이다.

$$\phi^s \text{에 의한 휨 변형률: } \epsilon_x = -\frac{h_s}{2} \frac{\partial \phi^s}{\partial x} y_s$$

Poisson 의 영향을 고려하면 :

$$\epsilon_y = -\alpha_s \epsilon_x = \alpha_s \frac{h_s}{2} \frac{\partial \phi^s}{\partial x} y_s$$

여기서

$$\alpha = \frac{3K - 2\mu}{3K + 4\mu} \quad K : \text{bulk modulus}$$

$$\mu : \text{shear modulus}$$

이에 대응하는 변위는 위의 식을 적분하면 :

$$\alpha_s \frac{h_s^2}{8} \frac{\partial \phi^s}{\partial x} y_s^2 = B_2^s y_s^2 \text{ 이 된다.}$$

따라서 식(4)는 다음과 같이 된다.

$$v_s = \bar{v}^s + B_0^s + B_1^s y_s + \alpha_s \frac{h_s^2}{8} \phi^s x y_s^2 \quad (5)$$

+ “s” 층과 - “s” 층을 각각 구하면

$$u_s^+ = \bar{u}^s + \frac{h}{2} \bar{u}^s - \delta^s - \frac{h}{2} \delta^s - \frac{h_s}{2} (\phi^s + \frac{h}{2} \phi^s y_s) y_s \quad (6)$$

$$v_s^+ = \bar{v}^s + \frac{h}{2} \bar{v}^s + B_0^s + \frac{h}{2} B_0^s + (B_1^s + \frac{h}{2} B_1^s y_s) y_s + \alpha_s \frac{h_s^2}{8} \phi^s x y_s^2 \quad (7)$$

$$u_s^- = \bar{u}^s - \frac{h}{2} \bar{u}^s - \delta^s + \frac{h}{2} \delta^s - \frac{h_s}{2} (\phi^s - \frac{h}{2} \phi^s y_s) y_s \quad (8)$$

$$v_s^- = \bar{v}^s - \frac{h}{2} \bar{v}^s + B_0^s - \frac{h}{2} B_0^s + (B_1^s - \frac{h}{2} B_1^s y_s) y_s + \alpha_s \frac{h_s^2}{8} \phi^s x y_s^2 \quad (9)$$

가 된다.

“f” 층의 근사적인 변위는 다음과 같이 정한다.

$$u_f = \bar{u}^f + C_0^f + C_1^f y_f + C_2^f y_f^2 \quad (10)$$

$$v_f = \bar{v}^f + D_0^f + D_1^f y_f + E^f(y_f) \quad (11)$$

여기서  $C_0^f$  와  $D_0^f$  는  $\bar{u}^f$  와  $\bar{v}^f$  가 평균변위가 될 수 있도록 scaling 의 목적으로 포함되었으며

$C_1^f y_f$  는 상태 “c” 에서 생기는 “f” 층의 평균변위로 부터의 차이를 나타내기 위한 것이다.  $C_2^f y_f^2$  은 “shear lag” 단부영향으로 생기는 “f” 층의 bulging 을 나타내기 위한 항이다.  $D_1^f y_f$  는  $\delta y_s$  로 인한 두께 변형률을 고려한 것이고  $E^f(y_f)$  는  $C_1$  과  $C_2$  항으로부터 생기는 Poisson 의 영향에 의한 것이다. “f” 재료의 매우 큰 bulk modulus 로 인하여 체적변화는 “f” 층의 수직방향으로 거의 상수값을 유지하려고 할 것이다.

따라서

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{x_f} + \epsilon_{y_f}$$

또는

$$\frac{\Delta V}{V} = \bar{u}^f_{,x} + C_0^f_{,x} + C_1^f_{,x} y_f + C_2^f_{,x} y_f^2 + \frac{2}{h_f} D_1^f + \frac{2}{h_f} E_{,y_f}^f \quad (12)$$

윗식이  $y_f$  의 함수가 되지 않기 위하여

$$E_{,y_f}^f = -\frac{h_f}{2} (C_1^f_{,x} y_f + C_2^f_{,x} y_f^2) \quad (13)$$

적분상수는  $D_0$  항에 흡수된다는 것을 감안하고 윗식을 적분한 후 식(11)에 대입하면

$$v_f = \bar{v}^f + D_0^f + D_1^f y_f - \frac{h_f}{4} C_1^f_{,x} y_f^2 - \frac{h_f}{6} C_2^f_{,x} y_f^3 \quad (14)$$

이 된다.

$\bar{u}, \bar{v}$  는 평균변위를 나타내므로 단위세포내에서 다음식을 만족시킨다.

$$\frac{h_s}{2} \int_0^1 (u_s^- - \bar{u}) dy_s + \frac{h_f}{2} \int_{-1}^1 (u_f - \bar{u}) dy_f + \frac{h_s}{2} \int_{-1}^0 (u_s^+ - \bar{u}) dy_s = 0 \quad (15)$$

$$\frac{h_s}{2} \int_0^1 (v_s^- - \bar{v}) dy_s + \frac{h_f}{2} \int_{-1}^1 (v_f - \bar{v}) dy_f + \frac{h_s}{2} \int_{-1}^0 (v_s^+ - \bar{v}) dy_s = 0 \quad (16)$$

식(6), (8), (10)을 식(15)에 대입하여 적분하면

$$-\rho \delta^f + C_0^f + \frac{1}{3} C_2^f + \frac{\rho h_s h}{8} \phi^s = 0 \quad (17)$$

여기서

$$\rho = \frac{h_s}{h_f}$$

가 된다.

$\bar{v}$  에 대하여도 같은 과정을 반복하면

$$\rho B_0^f + \frac{\alpha_s \rho h_s^2}{24} \phi_{,x}^{f,x} + D_0^f - \frac{h_f}{12} C_{f,x}^f - \frac{h\rho}{4} B_{f,y}^f = 0 \quad (18)$$

이 된다.

각층사이의 변위는 다음식을 만족한다.

$$u_f|_{\frac{h_f}{2}} = u_s^-|_{\frac{h_s}{2}} \quad (19)$$

$$u_f|_{\frac{h_f}{2}} = u_s^+|_{\frac{h_s}{2}} \quad (20)$$

식(6), (8), (10)을 식(19), (20)에 대입하면 다음과 같다.

$$C_0^f + C_2^f = -\delta^f + \frac{h_s h}{4} \phi_{,y}^{f,y} \quad (21)$$

$$C_1^f = \frac{h}{2} \bar{u}_s^f - \frac{h}{2} \delta_{,y}^f + \frac{h_s}{2} \phi^f \quad (22)$$

식(17), (21)을 이용하면

$$C_0^f = \frac{1+3\rho}{2} \delta^f - \frac{h_s h (2+3\delta)}{16} \phi_{,y}^{f,y} \quad (23)$$

$$C_2^f = -\frac{3}{2} (1+\rho) \rho^f + \frac{3h_s h (2+\rho)}{16} \phi_{,y}^{f,y} \quad (24)$$

를 얻는다.

위의과정을  $v$ 의 연속조건에 대해 반복하면 다음과 같다.

$$B_0^f - \frac{h}{2} B_{f,y}^f + \alpha_s \frac{h_s^2}{8} \phi_{,x}^{f,x} = D_0^f - \frac{h_s}{4} C_{f,x}^f \quad (25)$$

$$\frac{h}{2} \bar{v}_s^f + \frac{h}{2} B_{0,y}^f - B_1^f = D_1^f - \frac{h_s}{6} C_{2,x}^f \quad (26)$$

식(22), (26)을 미분하면 다음과 같다.

$$C_{f,x}^f = \frac{h_s}{2} \phi_{,x}^{f,x} \quad (27)$$

$$B_{f,y}^f = -D_{f,y}^f \quad (28)$$

윗식을 이용하여 식(18)(25)를  $B_0$ 와  $D_0$ 에 대해 풀면

$$B_0^f = -\frac{h_s h_f}{24(1+\rho)} [2 + \rho \alpha_s (3+\rho)] \phi_{,x}^{f,x} - \frac{h_f}{4} (2+\rho) D_{f,y}^f \quad (29)$$

$$D_0^f = \frac{h_s h_f}{24(1+\rho)} [1 + \rho(3+2\alpha_s \rho)] \phi_{,x}^{f,x} + \frac{\rho h_f}{4} D_{f,y}^f \quad (30)$$

을 얻는다.

식(24)(29)를 식(26)에 대입하면

$$B_1^f = -D_1^f + \frac{h}{2} \bar{v}_s^f - \frac{h}{4} \delta_{,x}^f \quad (31)$$

가 된다.

마지막으로 각층의 경계면에서의 평형조건인

$$\delta_{,y_s}^- |_{\frac{h_s}{2}} = \delta_{,y_f} |_{\frac{h_f}{2}}, \quad \delta_{,y_s}^+ |_{\frac{h_s}{2}} = \delta_{,y_f} |_{\frac{h_f}{2}} \quad (32)$$

을 다음과 같이 하나의 조건으로 나타낸다.

$$\delta_{,y_s}^- |_{\frac{h_s}{2}} + \delta_{,y_s}^+ |_{\frac{h_s}{2}} = \delta_{,y_f} |_{\frac{h_f}{2}} + \delta_{,y_f} |_{\frac{h_f}{2}} \quad (33)$$

위의 근사적인 표현과 식(6)~(9), 식(10)(14)를 이용하면 다음식을 얻는다.

$$\frac{2}{h_s} B_1^f + \alpha_s (\bar{u}_s^f - \delta_{,x}^f) = R [\alpha_f (\bar{u}_s^f + C_{0,x}^f) + \frac{2}{h_f} D_1^f - (1-\alpha_f) C_{2,x}^f] \quad (34)$$

여기서  $R = \frac{3K_f + 4\mu_f}{3K_s + 4\mu_s}$  이다.

식(23)(24)(31)을 윗식에 대입하면  $D_1^f$ 의 값을 다음과 같다.

$$D_1^f = \frac{h_s a_1}{2} \left[ \frac{h}{h_s} \bar{v}_s^f + a_2 \bar{u}_s^f - \frac{1}{2} (3R\eta + 2a_2 + \frac{h}{h_s}) \delta_{,x}^f \right] \quad (35)$$

여기서

$$\eta = 1 + \rho$$

$$a_1 = \frac{1}{1 + \rho R}$$

$$a_2 = \alpha_s - \alpha_f R$$

따라서 식(29)(30)(31)은 다음과 같이 된다.

$$B_0^f = -\frac{h_s h_f}{24\eta} [2 + \rho \alpha_s (3+\rho)] \phi_{,x}^{f,x} \quad (36)$$

$$B_1^f = \frac{h_s a_1}{2} [R\eta \bar{v}_s^f - a_2 \bar{u}_s^f + (R\eta + a_2) \delta_{,x}^f] \quad (37)$$

$$E_0^f = \frac{h_s h_f}{24\eta} [1 + \rho(3+2\alpha_s \rho)] \phi_{,x}^{f,x} \quad (38)$$

식(22)~(24)와 (35)~(38)을 식(3)(5)(10)(14)에 대입하면 변위에 대한 최종결과를 얻는다.

$$u_s = \bar{u}^s - \delta^s - \frac{h_s}{2} \phi^s y_s \quad (39)$$

$$v_s = \bar{v}^s - \frac{h_s h_f}{24\eta} [2 + \rho \alpha_s (3+\rho)] \phi_{,x}^{f,x} + \frac{h_s a_1}{2} [R\eta \bar{v}_s^s - a_2 \bar{u}_s^s + (R\eta + a_2) \delta_{,x}^s] y_s + \alpha_s \frac{h_s^2}{8} \phi_{,x}^s y_s^2 \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
u_f = & \bar{u}^f + \frac{(1+3\rho)}{2} \delta^f - \frac{h_s h (2+3\rho)}{16} \phi^f, \\
& + \left( \frac{h}{2} \bar{u}^f - \frac{h}{2} \delta^f + \frac{h_s \phi^f}{2} \right) y_f \\
& + \left[ -\frac{3}{2} \eta \delta^f + \frac{3h_s h (2+\rho)}{16} \phi^f \right] y_f^2
\end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
v_f = & \bar{v}^f + \frac{h_s h_f}{24\eta} [1 + \rho(3+2\alpha_s \rho)] \phi^f_x \\
& + \frac{a_1 h_s}{2} \left[ \frac{\eta}{\rho} \bar{v}^f_{,x} + a_2 \bar{u}^f_{,x} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (3R\eta + 2a_2 + \frac{\eta}{\rho}) \delta^f_{,x} \right] y_f \\
& - \frac{h_s h_f}{8} \phi^f_{,x} y_f^2 + \frac{h}{4} \delta^f_{,x} y_f^2
\end{aligned} \quad (42)$$

따라서 각재료의 변형률은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x_f} = & \bar{u}^f_{,x} + \left[ \rho + \frac{1}{2} \eta (1-3y_f^2) \right] \delta^f_{,x} \\
& + \frac{h_s}{2} \phi^f_{,x} y_f
\end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{y_f} = & a_1 \{ a_2 \rho \bar{u}^f_{,x} + \eta \bar{v}^f_{,x} - [R\rho\eta + \rho a_2 \\
& + \frac{\eta}{2a_1} (1-3y_f^2)] \delta^f_{,x} - \frac{h_f}{2} \phi^f_{,x} y_f \}
\end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy_f} = & \eta (\bar{u}^f_{,y} - \delta^f_{,y}) + \rho \phi^f + \bar{v}^f_{,x} \\
& - \left[ \frac{6\eta}{h_f} \delta^f - \frac{3\rho h (2+\rho)}{4} \phi^f_{,y} \right] y_f
\end{aligned} \quad (45)$$

$$\varepsilon_{x_s} = \bar{u}^s_{,x} - \delta^s_{,x} - \frac{h_s}{2} \phi^s_{,x} y_s \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{y_s} = & a_1 [-a_2 \bar{u}^s_{,x} + \eta R \bar{v}^s_{,x} \\
& + (R\eta + a_2) \delta^s_{,x}] + \frac{h_s a_s}{2} \phi^s_{,x} y_s
\end{aligned} \quad (47)$$

$$\gamma_{xy_s} = \bar{v}^s_{,x} - \phi^s \quad (48)$$

### 3. 복합해석(Composite F.E. Analysis)

복합체의 변형에너지는 “s”재료들과 “f”재료들의 적분의합으로서 나타낼 수 있다. 즉  $U = U_s + U_f$  이다. 일반적인 경우로 N개의 연성층과 M개의 강성층을 가진 복합체의 “f”재료로부터 생기는 변형에너지  $U_f$  는 다음과 같이 표현된다

$$\begin{aligned}
U_f = & \sum_{n=1}^N \iint_{A_n} \frac{1}{2} [(\beta R(\varepsilon_{x_f}^2 + \varepsilon_{y_f}^2 \\
& + 2\alpha_f \varepsilon_{x_f} \varepsilon_{y_f}) + \mu_f \gamma_{xy_f}^2)] dA
\end{aligned} \quad (49)$$

여기서

$$\beta = \frac{3K_s + 4\mu_s}{3}$$

$A_n$ 는 n 번째 “f”층의 면적이다.

$u_s$  역시 이와같은 식으로 나타낼수 있으며 식 (49)와 합하여 총변형에너지를 이룬다.

$$U = \frac{1}{\eta} \iint_A \frac{1}{2} \langle d \rangle [D] \{d\} dA \quad (50)$$

여기서

$\langle d \rangle = \langle \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{v}_x, \bar{v}_y, \delta, \delta_{,x}, \delta_{,y}, \phi, \phi_{,x}, \phi_{,y} \rangle$  이다.

$$[D] : D_{1,1} = \beta [R + \rho(1 - a_1 a_2^2)]$$

$$D_{6,1} = \rho \beta (a_1 a_2 a_3 + R - 1)$$

$$D_{3,6} = \rho \mu_s + \mu_f$$

$$D_{2,2} = D_{4,4} = D_{7,7} = \mu_f \eta^2$$

$$D_{7,2} = -\mu_f \eta^2$$

$$D_{8,2} = \mu_f \rho \eta$$

$$D_{3,5} = 12\mu_f \left( \frac{\eta}{h_f} \right)^2$$

$$D_{6,6} = \beta \{ -\rho a_1 a_3^2 + R\eta^2 (1 - \alpha_f) \}$$

$$\left[ \frac{2}{5} + \rho a_1 R (1 - \alpha_f) \right] + \frac{\rho}{a_1} \}$$

$$D_{8,7} = -\mu_f \rho \eta$$

$$D_{8,8} = \rho (\mu_s + \rho \mu_f)$$

$$D_{9,9} = \frac{\beta h_s^2 [\rho (1 - \alpha_f^2) + 2R(1 - \alpha_f)]}{12}$$

$$D_{10,5} = \frac{-3\rho(2+\rho)\eta^2\mu_f}{2}$$

$$D_{10,10} = \frac{3[h_s \eta (2+\rho)] \mu_f}{16}$$

이다.

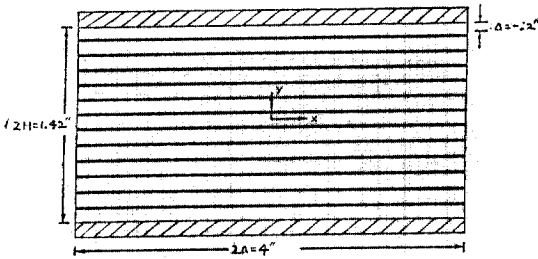
유한요소해석 프로그램은 식(50)을 최소변형 에너지의 원리를 이용개발하였다. 4 개의 미지수  $\bar{u}, \bar{v}, \delta, \phi$  의 admissibility 조건은  $C^0$  연속이다. 4 node isoparametric 요소가 사용 되었으며 각 node 는 4 개의 미지수를 가진다. 4 점적분이 사용되었으며  $\gamma_{xy_f}$  에 의해 생기는 변형에너지항은 reduced integration 을 하였다.

### 4. 복합체 해석에 및 고찰

개발된 이론과 이를 이용한 유한요소법 해석의 정당성과 정확도의 입증을 위해 압축, 전단, 휨에 관한 세가지 예제를 풀이하였다.

#### 4.1 압축을 받는 경우

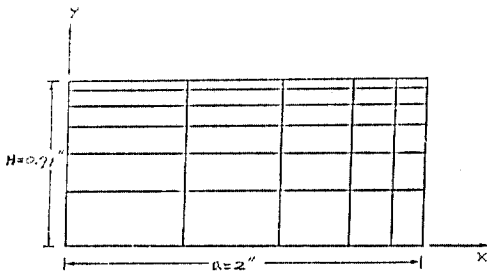
그림 5에 나타난 12개의 shim 과 상하에 고정판을 가지는 평면변형률 하의 탄성지수가 압



재료성질 :  $E_s=10^7 \text{ psi}$      $E_f=10^4 \text{ psi}$   
 $\nu_s=0.25$      $\nu_f=0.49$   
 $h_s=0.01''$      $h_f=0.1''$

그림 5. 단면형상(압축, 전단의 경우)

축을 받는 경우를 해석하였다. 본연구에서 개발된 복합이론, (10)에서 개발된 복합이론(변형상태들의 중첩), (11)의 이론(microstructure continuum) 들과 이산화해석의 결과치 들이 비교 검토되었다. 모든 복합해석에서는 한 node 에 4 개의 미지수를 가지는 4 node 요소 30 개가 사용되었다. 이산화해석의 결과치는 (11)에서 취한 값으로 95 개의 "reformulated" 8 node 요소<sup>(12)</sup>가 사용되었다. 복합해석에서 사용된 유한요소 grid 와 경계조건은 그림 6에 나타나있으며 축에 대한 대칭을 이용하여 전체지승의 1/4 만 해석하였다. 그림 7은 위의 4 가지방법에 의한 자유단부의 횡방향 변위를 비교한 것이다. 현이론의 결과치가 (10)의 결과치보다 좋은 이유는 다음과 같이 분석할 수 있다. 첫째, (10)에서 무시되었던  $\delta, \nu, \phi, y$  량이 변형에너지에 포함되어  $\delta$  와  $\phi$  의  $y$  방향으로의 변화를 고려하게 되었으



경계조건 :  $x=0$      $\bar{u}=\bar{\delta}=\phi=0$   
 $y=0$      $\bar{u}=\bar{\phi}=0$   
 $y=H$      $\bar{u}=\bar{\delta}, \bar{\nu}=-0.1'', \phi=0$

그림 6. 요소 분할형성과 경계조건(압축)

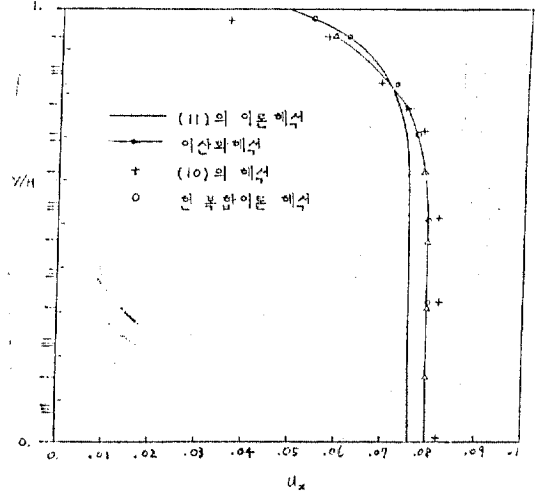


그림 7. 자유단부의  $f$ 층 횡방향 변위(압축)

며 둘째, 이로 인해  $y=H$ 에서의 경계조건(고정)을 보다 정확하게 즉  $u_x=0(\bar{u}=\delta)$ 로서 나타낼 수 있었기 때문이다. 위의 두항이 포함되지 않은 (10)에서는  $y$  방향으로의 oscillation 을 피하기 위해  $\bar{u}=\bar{\delta}=0$ 로 경계조건을 줄 수 밖에 없었다. 사실상 본 연구에서 사용된  $\bar{u}=\bar{\delta}$  라는 경계조건 역시 정확한 표현 이라고는 할수가 없다. 그 이유는  $\bar{u}, \bar{\delta}$  란 기본세포내의 평균값을 뜻하기 때문이다. 이점이 경계근처의 정확도를 어느정도 감소시키는 원인이 되며 복합해석이 치투어야할 뎡가인것이다. 그림 8,9,10은 각각 고정단의 "f"층의 횡변위, bulging, 횡방향축응력과 전단 응력을 나타낸다. 그림 10의 응력계산은 고정단으로부터 "f"층두께의 1/4 되는 곳에서 행해

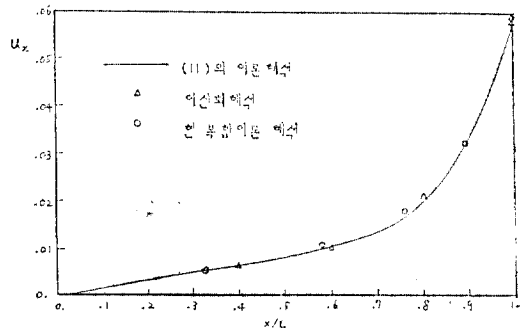


그림 8. 고정단  $f$ 층의 횡방향 변위(압축)

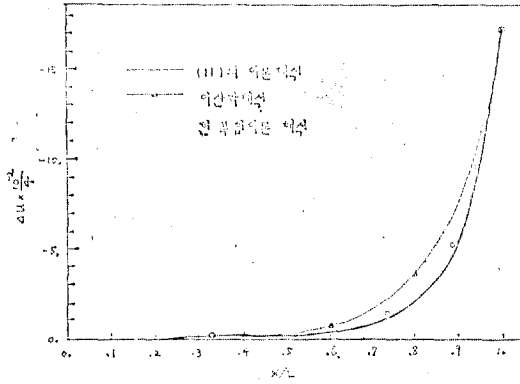
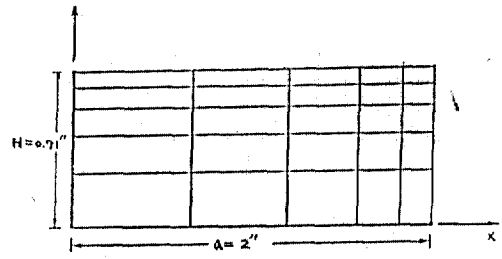


그림 9. 고정단  $f$  층의 bulge  $\Delta u$ (압축)

졌다.

#### 4.2 전단을 받는 경우

그림 5의 탄성지층이 전단을 받을때, 즉 한쪽 고정단이 다른쪽고정단에 대해 상대적 변위를 일으킬 경우가 해석되었다. 본 연구의 이론, (11)의 이론, 이산화해석에 의한 결과치가 비교검토되었다. 본 연구에서는 지층의 축비대칭을 이용하여 전체지층의 1/4을 사용하였다. 해석에 사용된 유한요소 grid와 경계조건이 그림 11에 나타나있다. (11)에서는 전체지층을 사용하였으



경계조건 :  $x=0 \quad \bar{v}=0$   
 $y=0 \quad \bar{v}=\phi=0$   
 $y=H \quad \bar{u}=0.2'', \quad \bar{v}=0, \quad \phi=0$

그림 11. 요소 분할형상과 경계조건(전단)

며 node 당 4 개의 미지수를 가지는 4 node 요소 42 개를 이용하였다. 이산화해석의 결과치는 역시(11)에서 취한값으로 270 개의 “reformulated” 8 node 요소가 사용되었다. 그림 12는 자유단부에서의 횡변위의 결과 비교이다. 그림 13, 14는 각각 고정단을 따라 발생하는  $\delta_y$ 와  $\delta_x$ 의 분포를 나타낸다. 그림 15는 자유단부 근처에 생기는  $\delta_y$ 의 값의 비교이다. 이상의 비교에서는 본 연구의 결과치는 (11)의 결과치와 함께 이산화해석치에 매우 근접함을 알 수 있다.

#### 4.3 휨을 받는 경우

그림 16에 나타난 9개의 shim과 상하 고정판을 가지는 탄성지층이 그림 17의 휨을 받는 경우를 해석하였다.  $h_s/h_f=0.001$ 을 사용하여 “s”층의 휨강성이 거의 없는 탄성지층을 대상으

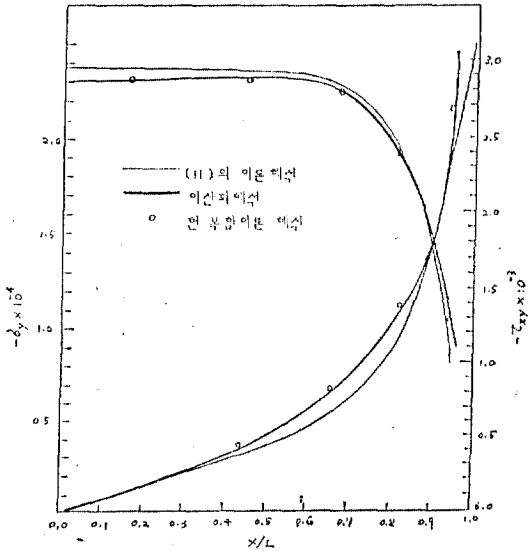


그림 10. 고정단  $f$  층의  $\delta_y$ 와  $\tau_{xy}$  (압축)

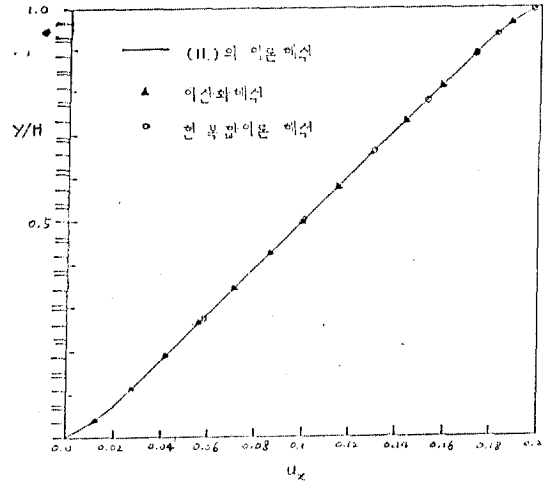


그림 12. 자유단부의  $f$  층 횡방향 변위(전단)



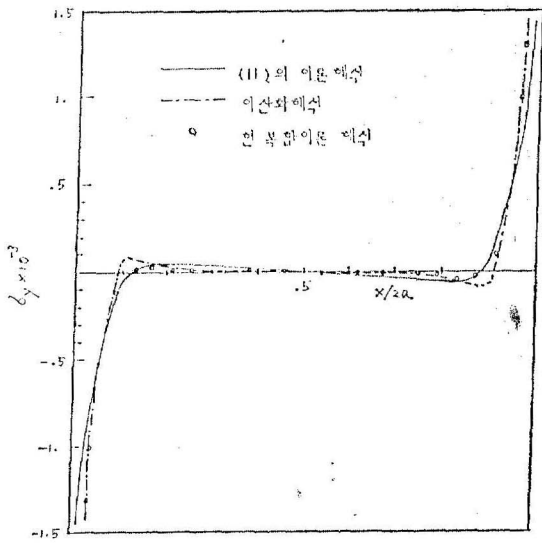


그림 13. 고정단의  $\delta_y$ (전단)

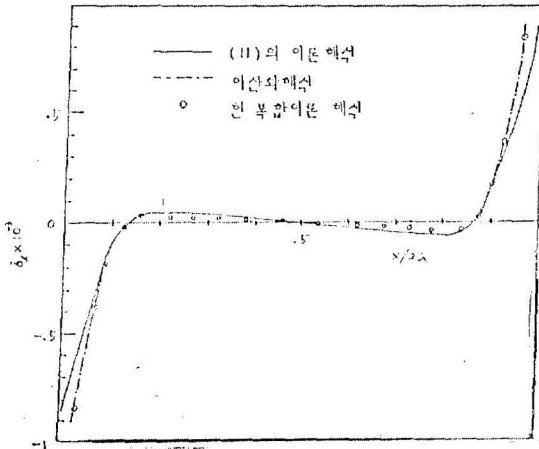


그림 14. 고정단의  $\delta_y$ (전단)

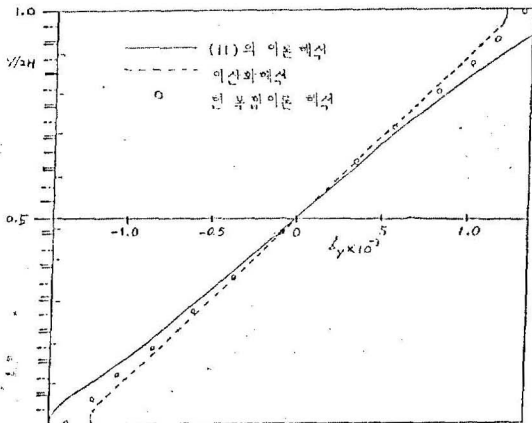
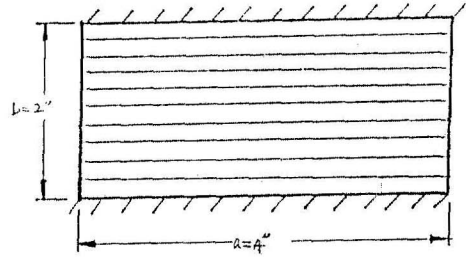


그림 15. 자유 단부 부근의  $\delta_y$ (전단)



재료성질 :  $E_s = 3 \times 10^{10} \text{ psi}$      $E_f = 3 \times 10^8 \text{ psi}$   
 $\nu_s = 0.3$                              $\nu_f = 0.49$   
 $h_s = 0.2''$                              $h_f = 0.0002''$

그림 16. 단면형상(휨)

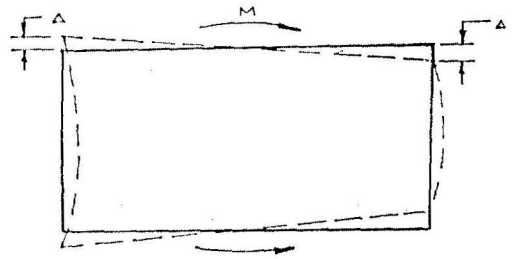


그림 17. 휨을 받는 경우의 변화형태

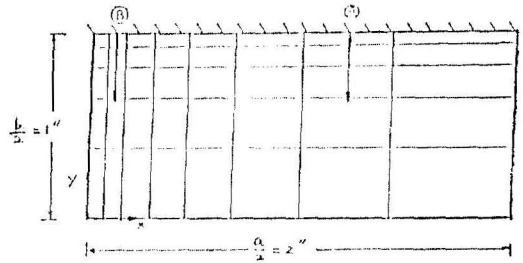
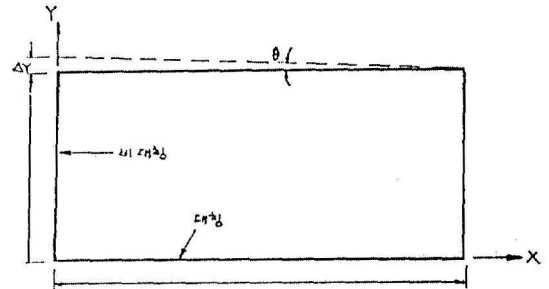
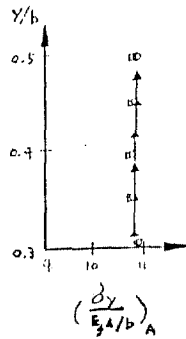
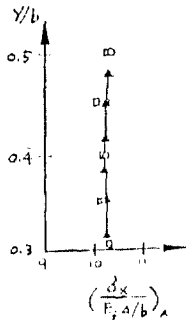
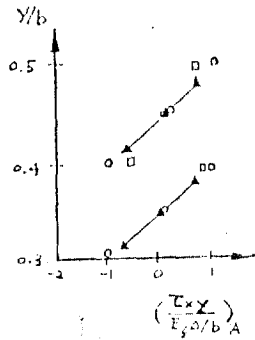


그림 18. 요소분할 형상(휨)



경계조건 :  $x = \frac{a}{2} \quad \bar{v} = 0$   
 $y = 0 \quad \bar{v} = \phi = 0$   
 $y = \frac{b}{2} \quad \bar{u} = \delta, \quad \bar{v} = x\phi, \quad \phi = -\theta, \quad \Delta Y = 0.2''$

그림 19. 경계조건(휨)

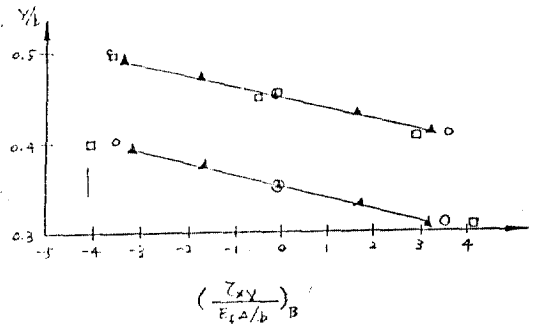
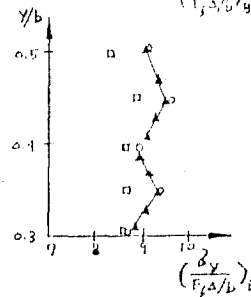
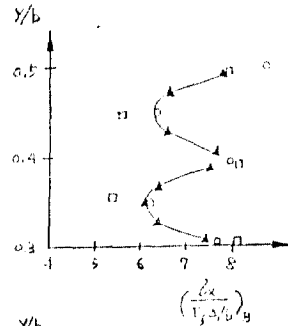


- △ 이산화해석
- (9)의 해석
- 현 복합이론 해석

그림 20. A 단면 f 층의 응력(휨)

로 하였다. 이는 "s"층 대신 토목섬유로 보강된 경우로 생각할 수 있는 것이다. 본 연구에 의한 해석, (9)의 복합해석, 이산화해석의 결과치를 비교 검토하였다. (9)의 해석에서는 (10)의 변형상태 중첩이론중 상태"e"를 제외하여 shim의 휨영향을 무시하였고 각 node 당 4개의 미지수를 가지는 8 node 요소를 사용하였다. 본 연구와 (9)에서는 축대칭을 이용하여 전체지층의 1/4을 해석에 이용하였고 40개의 요소를 사용하였

다(그림 18). 그림 19는 본 연구에 사용된 경계조건을 나타내고 있다. 이산화해석의 결과치는 (9)에서 취하였으며 325개의 8 node 요소가 쓰여졌다. 그림 18의 A 단면과 B 단면에서의  $\delta_x, \delta_y, \tau_{xy}$ 의 값이 각각 그림 20, 21에 나타나 있다. 그림 22는 중앙 "s"층의  $\delta_x$ 의 x 방향으로의 변화를 표시한 것이다. 이상의 비교에서 현복합이론이 (9)의 결과보다 다소 나은 정확도를 보이는 이유는 압축을 받는 경우에서와 같은 이유에서 기인한 것이다.



- △ 이산화해석
- (9)의 해석
- 현 복합이론 해석

그림 21. B 단면 f 층의 응력(휨)

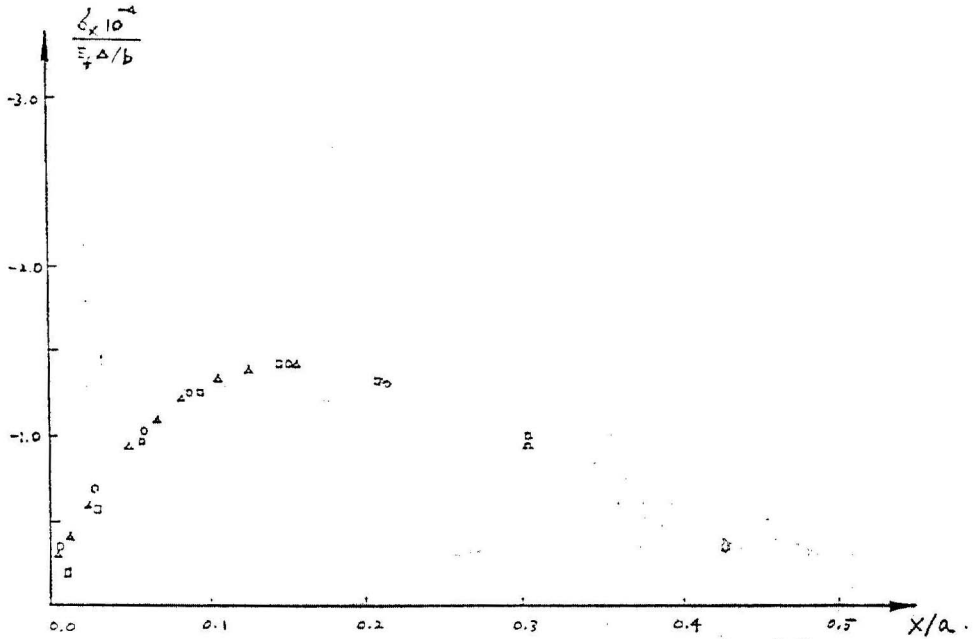


그림 22. 중앙금속층의  $\delta_x$  (휨)

## 5. 결 론

복합체에 대한 2차원, 선형, 등가균질성 연속체이론과 이에 따른 유한요소해석법이 개발되었다. 본 연구에 의한 결과치들은 다른방법의 복합이론과 이산화해석의 결과치들과 비교되었으며 아주좋은 일치율을 보이고있어 이론의 정당성과 정확도가 입증되었다. 작은변형, 선형탄성의 이론에 바탕을둔 본 복합이론은 2차원복합체의 전체적인 거동과 부분적 응력과 변형률을 정확히 경제적으로 해석하고 있다. 선형 2차원의 경우 이산화해석과 대등한 정확도를 얻으면서 드는비용은 1/5 내지 1/10 정도로 나타났다. 이차이는 선형 3차원의 경우 더 커질것이며 비선형 3차원의 경우 연립방정식을 풀이하는 횟수를 기준한다면 1/100 내지 1/1000 정도의 차이를 예측할수가 있다. 비선형 3차원, 즉 큰변형 큰변위와 비선형, 비탄성의 재료성질을 포함시킨 이론의 개발은 앞으로의 과제이며 복합이론의 장점을 최대한 나타낼 수 있을 것이다. 현 복합이론이 (11)의 이론과 비교할 때 가지는 상대

적인 장점은 다음과 같다. (11)은 이론개발이 매우 수학적이며 따라서 복합체의 거동에 대한 사전이해를 필요로 하지 않는 반면 매우 복잡하고 많은 량의 계산을 필요로 한다. 유한요소해석의 측면에서 볼 경우 현이론의 4개의 변수는  $C_0$  연속이 요구되고 있으나 (11)에서는 4개의 변수중 2개의  $C_1$  연속이 요구되어 현 이론의 유한요소법 사용이 훨씬 간단함을 알수 있다. 또한 해석에에서 현 이론은 (11)의 이론의 결과치보다 약간 나은결과를 나타내고 있다. 이것은  $\delta_x$ 에 의한 "s"층의 변형을 포함시킨 결과로 볼수 있다. 현 이론의 (10)의 이론에 대한 상대적인 장점은 다음과 같다. 현 이론의  $\epsilon_{xy}$ 에 포함된 "f"층의 "bending"단부 영향에 의한 항과 이로 인한 Poisson의 영향으로  $\epsilon_{xy}$ 에 포함된 항은 해석의 정확도를 높혀주었으며 또한 (10)에서 무시되었던  $\delta$ 와  $\phi$ 의 y방향으로의 변화를 나타내는  $\delta_{,y}$ ,  $\phi_{,y}$  항의 출현은 y방향으로의 cescillation 문제점을 해결하였다. 위에 열거한 본 이론의 상대적인 장점과 탄성지층의 시방규정(미국)이 선형이후에의해 만들어졌음을 감안할때 본연

구는 우리나라 탄성지층에 대한 시방 규정설정에 큰도움이 되리라 생각한다.

또한 문헌 (10)에서 사용된 층첩의 원리를 벗어나 개발된 본 이론은 앞으로의 비선형해석이론 전개에 발판이 되리라고 생각한다.

#### 감사의 말

본 연구는 1986년도 한국과학재단 연구비의 지원으로 수행된 것이며 이에 감사의 뜻을 전한다.

#### 참고 문헌

1. Clark, E.V. and Moulthrop, K., "Load-Deformation Characteristics of Elastomeric Bridge Bearing Pads," Highway Research Record 34, 1963.
2. Brown, B.B., "Design of Fabric Reinforced Retaining Structures," *Proceedings of Symposium on Earth Reinforcement*, ASCE, April 1978.
3. Derham, C.J. and Thomos, A.G., "The Design and Use of Rubber Bearings for Vibration Isolation and Seismic Protection of Structures," *Engineering Structures*, Vol. 2, No. 3, July 1980.
4. "Development of an Elastomeric Seal for Omniaxial Movable Nozzles (lockseal)." Technical Report No. AFRPLTR-66-112, Lockheed propulsion Co., 1966.
5. Kulkarni, S.B., "Design Criteria for Elastomeric Bearings, Volume II-design Manual," Thiokol/Wasatch Division, AD/A-024767, March 1976.
6. Herrmann, L.R., "Finite Element Modeling of Composite Edge Effects," *ASCE, 7th Conf. on Electronic Computations*, St. Louis, August 1979.
7. Schamber, R.A., "Plane Strain Composite Analysis Including Edge Effects," M.S. Thesis, Dept. of Civil Engr., Univ. of Calif., Davis, 1980.
8. Welch, K., "Analysis of Axisymmetric Layered Systems Including Edge Effects," M.S. Thesis, Dept. of Civil Engr., Univ. of Calif., Davis, 1981.
9. Herrmann, L.R. and Schamber, R.A., "Finite Element Analysis of Layered Systems with Edge Effects," *Numerical Methods for Coupled Problems*, eds. E. Hinton, P. Bettess, R.W. Lewis, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1981.
10. Herrmann, L.R., Welch, K.R. and Lim, C.K., "Composite FEM Analysis for Layered Systems," *J. of Engin, Mechanics ASCE*, Vol. 110, No. 9, September 1984.
11. Soni, M.L., "A Microstructure Continuum Theoro for Laminated Elastic Composites," Ph.D. Dissertation, Univ. of Texas, Austin, May 1977.
12. Herrmann, L.R., "Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Therom," *AIAA Journal*, Vol. 3, No.10, Oct., 1965.

(接受: 1988. 4. 6)