

螺旋形 曲線部材의 自由振動에 관한 研究

A Study on the Free Vibration of the Helically Curved Members

任	性	淳*
Yhim,	Sung	Soon
張	丞	弼**
Chang,	Sung	Pil

Abstract

The curved structures in space, such as multi-level inter-changes, ramped structures, and circular curved structures etc., are modelled as helically curved members with constant helix angle in this study.

Equilibrium equations are derived, considering the geometrical properties and initial curvatures of helix.

Modal equations of the simply supported helically curved members which can calculate the normalized natural frequencies are derived from these equations by assuming the modal shape function.

These equations are used to calculate the normalized natural frequencies of the simply supported helically curved members and verify the distribution of the natural frequencies of them.

요 지

본 논문에서는 인터체인지나 램프시설 등에서 볼 수 있는 공간 곡선부재들을 나선형 곡선부재로 이상화시켰다.

나선의 기하학적 특성치와 초기 곡률을 고려하여 평형방정식을 유도하였으며 모우드 형상합수를 가정하여 단순지지된 나선형 곡선부재의 규준화된 고유진동수를 계산할 수 있는 모우드 방정식을 유도하였다.

이러한 모우드 방정식을 이용하여 나선형 곡선부재의 고유진동수, 모우드 형상 그리고 고유진동수의 분포를 규명하였다.

* 正會員 · 檀國大學校 工科大學 講師

** 正會員 · 서울大學校 工科大學 教授

1. 서 론

산업발전은 대형교통 및 유통을 위한 유기적인 교통시설물을 필요로 하며 지역이 협소한 도심 내에서는 신속한 교통흐름을 위해 입체교차로나 램프시설이 요구된다. 이와같은 교통시설물들은 곡선부재들로 구성된 대표적인 구조물들이며 한 평면상에서 원호의 형상을 갖거나 연직방향으로 기울기를 갖는 나선형 곡선부재들이다.

본 논문에서는, 보다 일반적인 곡선부재의 해석을 위해, 나선형 곡선부재를 해석모델로 선택하였고 나선형 곡선부재의 기하학적 특성과 좌표계, 그리고 초기 곡률을 고려하여 힘과 변위와의 관계와 평형방정식을 유도하고 D'Alembert의 원리를 적용하여 관성력을 구하여 단순지지된 나선형 곡선부재의 자유진동에 대한 동적해석을 수행하였다.

2. 나선형 곡선부재의 기하학적 특성

본 논문에서는 입체교차로나 램프시설 등에 실제적인 곡선형교 모델로 적합한 나선형 곡선부재를, 나선좌표계를 적용시켜, 일반적인 관계식을 유도하였다.

Struik⁽¹⁾과 Connor⁽⁴⁾에 의하면 그림 2.1(a)는 오른손 나선좌표계를, 그림 2.1(b)는 왼손 나선좌표계를 나타내며 본 논문에서는 그림 2.1(b)와 같은 왼손 나선좌표계를 사용하였고 자세한 왼손 나선좌표계에 대한 기호와 명칭은 그림 2.2와 같다.

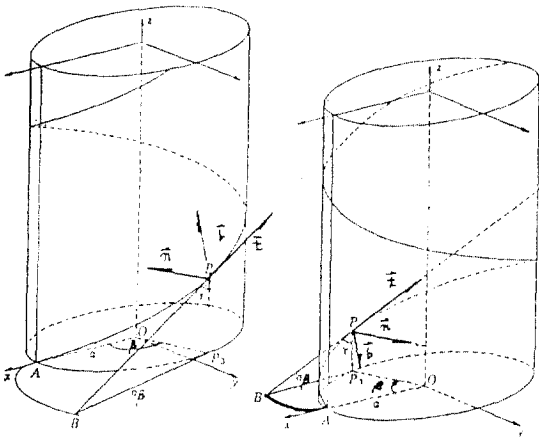


그림 2.1 Definition of Coordinate Systems of Helix

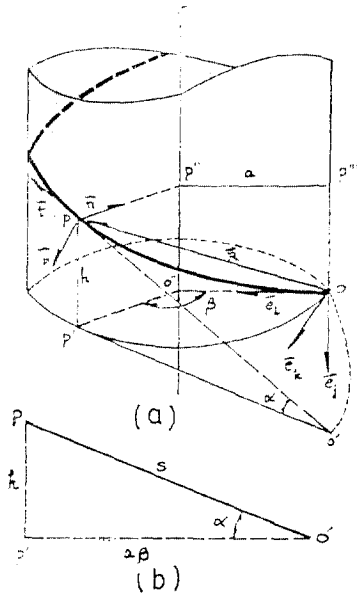


그림 2.2 Configuration of Helically Curved Member

그림 2.2에서 알 수 있듯이 나선형 곡선부재는 반경이 a 인 원통면상에서 일정한 기울기 즉 나선 기울기 α 를 갖는 두점간의 최단거리를 나타내는 궤적으로 표시된다. 원점 O 에서 원통의 종방향 축 $O''z$ 을 향한 단위 벡터는 \vec{e}_i , O 점을 지나며 $O''z$ 축과 평행한 단위 벡터는 \vec{e}_j , 그리고 O 점을 지나며 $O''z$ 축과 수직인 면과 접선방향인 단위벡터는 \vec{e}_k 로 표시된다. 나선의 임의의 점 P 에서 단위접선벡터 \vec{t} 는 나선의 부재축과 접선을 이루며 반경방향 단위벡터 \vec{n} 는 $O''z$ 축과 수직을 이루며 그리고 \vec{t} 벡터와 \vec{n} 벡터의 외적관계를 이루는 2축수직 벡터 \vec{b} 는 나선의 부재축과 수직하며 원통면과 접선을 이룬다.

나선의 임의의 점 P 까지의 위치 벡터를 \vec{R} 로 표시하면 \vec{t} 벡터, \vec{n} 벡터 및 \vec{b} 벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{t} = \frac{d\vec{R}}{ds} \quad (2.1.a)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|} \frac{d\vec{t}}{ds} \quad (2.1.b)$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \quad (2.1.c)$$

여기서, s 는 나선의 부재축방향의 거리들의

미하며 Moving Trihedron 을 형성하는 $\vec{n}, \vec{t}, \vec{b}$ 벡터를 각각 Normal Vector, Tangential Vector, Binormal Vector 라고 하며 이러한 세벡타가 형성하는 면 즉, $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ 벡타와 수직한 면을 각각 Normal Plane, Rectifying Plane, Osculating Plane 이라고 하며 그림 2.3 과 같다.

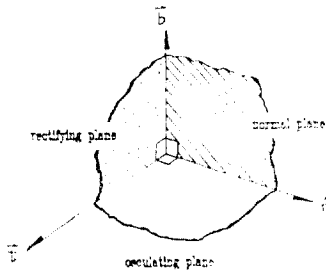


그림 2.3 Definition of Local Planes

그림 2.2 에서 나선중심각 β , 나선 반경 a , 원점에서 P 까지의 거리 벡타 $\vec{R}(s)$ 는 전체 좌표계의 단위 벡타 $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$ 와 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$\vec{R}(s) = a(1 - \cos\beta)\vec{e}_i - s(\sin\alpha)\vec{e}_j + a(\sin\beta)\vec{e}_k \quad (2.2)$$

또한 $s \cdot \cos\alpha = a \cdot \beta$
이므로 $\beta = s \cdot \cos\alpha / a$
가 된다.

식(2.1a)의 접선 단위 벡타 \vec{t} 의 정의에 식(2.2)를 대입하면

$$\vec{t} = \frac{d\vec{R}}{ds} = \sin\beta \cdot \cos\alpha \vec{e}_i - \sin\alpha \vec{e}_j + \cos\beta \cdot \cos\alpha \vec{e}_k$$

가 되며 나선의 곡률을 k 라고 하면 $k = |dt/ds|$
이므로 $k^2 = \left| \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dt}{ds} \right|$ 로부터 나선의 곡률 k 는 다음과 같이 계산된다.

$$k^2 = (\cos\beta \cdot \cos^2\alpha / a)^2 + \left(-\sin\beta \cdot \frac{\cos^2\alpha}{a} \right)^2 = \left(\frac{\cos^2\alpha}{a} \right)^2$$

즉, $k = \frac{\cos^2\alpha}{a}$
가 된다.

normal vector \vec{n} 은 식(2.1.b)와 같이 정의되므로 $n = \frac{1}{k} \frac{dt}{ds}$ 가 된다.

그러므로

$$\vec{n} = \frac{1}{k} \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{a}{\cos^2\alpha} \left(\cos\beta \cdot \frac{\cos^2\alpha}{a} \vec{e}_i - \sin\beta \cdot \frac{\cos^2\alpha}{a} \vec{e}_k \right)$$

$$\text{혹은, } \vec{n} = \cos\beta \vec{e}_i - \sin\beta \vec{e}_k \quad (2.5)$$

가 된다.

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \vec{e}_i + \cos\alpha \cdot \vec{e}_j + \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \vec{e}_k \quad (2.6)$$

가 되며 나선의 기하학적 특성치인 torsion τ 에 대한 정의^(1,2)로부터

$$\tau = -\vec{n} \cdot d\vec{b}/ds = -\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{a} \quad (2.7)$$

가 된다. 여기서, τ 가 음의 부호를 갖는 이유는 왼손 나선좌표계를 이용하였으므로 \vec{b} 벡타의 방향은 그림 2.1 의 z 축 방향으로 負 부호를 갖기 때문이다.

식(2.4)의 k 와 식(2.7)의 τ 는 나선의 기하학적 특성 즉, 초기 곡률을 나타내는 계수들이며 $\tau=0$ 이면 한 평면내에서 원호를 나타내는 원형 곡선부재를 의미하고 $k=0, \tau=0$ 이면 직선부재를 의미한다.

3. 힘과 변위와의 관계

나선형 곡선부재의 단면은 그림 3.1 과 같이 단면의 주응력축 \vec{i}_x, \vec{i}_y 축을 \vec{n}, \vec{b} 와 일치하는 대칭 박벽 들보 단면이라 가정하고 다음과 같은 Vlasov⁽³⁾의 가정조건을 적용시켰다.

- 1) 斷面크기는 들보의 축방향 크기에 비해 작다
- 2) 전단류 응력으로 인해 단면 도심내에 전단 변형은 발생하지 않는다.
- 3) 나선축에 수직한 단면은 변형후에도 변형된 나선축에 수직하다.

3.1 나선형 곡선부재의 변위와 곡률과의 관계

나선형 곡선부재의 전체 자유도는 그림 3.2 와 같이 moving trihedron $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ 벡타 방향의 변위성분과 회전각 변위성분과 회전각 변위 성

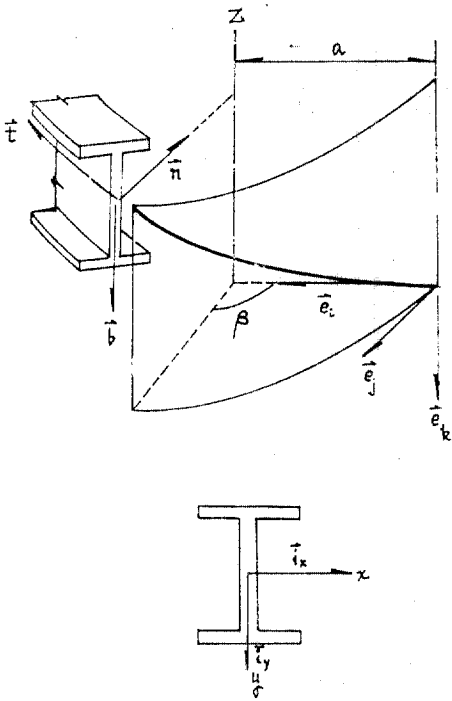
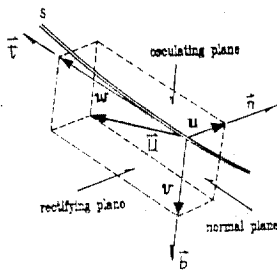
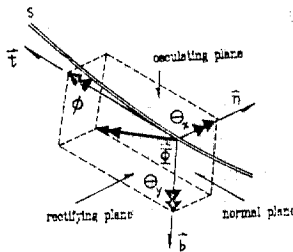


그림 3.1 Local and Global Unit Vectors of Helix



$$\vec{U} = u\vec{n} + v\vec{b} + w\vec{t}$$



$$\vec{\Phi} = \theta_x\vec{n} + \theta_y\vec{b} + \phi\vec{t}$$

그림 3.2 Total Displacement and Rotation Vectors of Helix

분으로 표시되고 이들을 각각 $w, u, v, \phi, \theta_x, \theta_y$ 로 표시하며 회전각 변위의 방향은 오른손 나선 법칙을 따른다.

전체 변위벡터를 \vec{U} , 전체 회전각 변위벡터를 $\vec{\Phi}$ 라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$\vec{U} = u\vec{n} + v\vec{b} + w\vec{t} \quad (3.1.a)$$

$$\vec{\Phi} = \theta_x\vec{n} + \theta_y\vec{b} + \phi\vec{t} \quad (3.1.b)$$

나선형 곡선부재의 변위와 곡률과의 관계식을 유도하기 위해 다음과 같은 Frenet-Serret의 공식을 이용한다.

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \quad (3.2.a)$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{t} + \tau\vec{b} \quad (3.2.b)$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n} \quad (3.2.c)$$

전체 변위벡터 \vec{U} 를 chain rule에 의해 s 로 미분하고 식(3.2)의 Frenet-Serret 공식을 적용하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = (u' - \tau v + kw)\vec{n} + (\tau u + v')\vec{b} + (-ku + w')\vec{t} \quad (3.3)$$

식(3.3)의 \vec{t} 벡터 성분 $(-ku + w')$ 는 나선형 곡선부재의 축방향 변형도 ϵ_c 를 의미하며 \vec{n} 벡터 성분은 osculating plane의 회전각 θ_y , \vec{b} 벡터 성분은 rectifying plane의 회전각 $(-\theta_x)$ 를 의미한다.

$$\epsilon_c = -ku + w' \quad (3.3.a)$$

$$\theta_y = u' - \tau v + kw \quad (3.3.b)$$

$$\theta_x = -(\tau u + v') \quad (3.3.c)$$

여기서, θ_x 가 음의 부호를 갖는 이유는 변위 u, v, w 가 증가하면 θ_y 가 증가하지만 θ_x 는 감소하기 때문이다.

전체 곡률벡터 \vec{K} 는 $\vec{K} = d\vec{\Phi}/ds$ 이며 식(3.1.b)를 s 에 대해 미분하여 Frenet-Serret 공식을 적용시키면 다음과 같은 관계식이 된다.

$$\vec{K} = (-2\tau u' - v'' + \tau^2 v - k\tau w + k\phi)\vec{n} + (u'' - \tau^2 u - 2\tau v' + kw')\vec{b} + (k\tau u + kv' + \phi')\vec{t} \quad (3.4)$$

그러므로 trihedral vector 방향의 곡률성분을 각각 k_x, k_y, Ω 라고 하면

$$k_x = -2\tau u' - v'' + \tau^2 v - k\tau w + k\phi \quad (3.5.a)$$

$$k_y = u'' - \tau^2 u - 2\tau v' + kw' \quad (3.5.b)$$

$$\Omega = k\tau u + kv' + \phi' \quad (3.5. c)$$

이 되며 Kollbrunner⁽⁵⁾는 Ω 를 뒤틀림수(warping function)이라고 설명하였으며 식(3.5)는 Love가 유도한 결과⁽⁴⁾와 기존 논문⁽⁶⁾과 일치한다. 특히 Love⁽⁴⁾는 $\epsilon_c = 0$ 즉, $w' = ku$ 인 나선형 곡선부재에 대한 식을 유도하였다.

3.2 나선형 곡선부재의 변형도와 변위와의 관계

Tabbia와 Turkstra⁽⁷⁾의 연구결과를 보면 비대칭 단면을 갖는 곡선부재의 초기 곡률 반경이 단면 치수의 10배 이상이 되면 전단중심과 도심의 편차를 무시하고 계산한 결과는 이 편차를 정확하게 고려한 해석 결과와 큰 오차가 없음을 밝혔다. 그러므로 본 연구에서도 전단 중심과 도심의 편차를 무시하고 \vec{n} , \vec{b} 방향으로 대칭인 단면 성질⁽³⁾을 적용하였다.

$$\iint xy dx dy = 0 \quad (3.6. a)$$

$$\iint y \omega dx dy = 0 \quad (3.6. b)$$

$$\iint x \omega dx dy = 0 \quad (3.6. c)$$

여기서, ω 는 단면의 기하학적 특성치인 扇座標(sectorial coordinate)라고 하며 단면의 단위 뒤틀림(unit warping)이라고도 한다.

나선형 薄壁 곡선부재의 변형도는 \vec{n} , \vec{b} 방향의 휨모멘트에 의해 야기되는 변형도($yk_x - xk_y$)와 뒤틀림(warping)에 의한 변형도 ($-\omega\Omega'$), 그리고 축방향 변형도 ϵ_c 의 합으로 되어 있다. 전체 변형도를 ϵ 으로 표시하면 ϵ 은 다음과 같다.

$$\epsilon = -xk_x + yk_y - \omega\Omega'\epsilon_c \quad (3.7. a)$$

$$\begin{aligned} \text{혹은, } \epsilon = & -x(u'' - \tau^2 u - 2\tau v' + kw) \\ & + y(-2\tau u' - v'' + \tau^2 v - k\tau w + k\phi) \\ & + \omega(k\tau u' + kv'' + \phi'') + (w' - ku) \end{aligned} \quad (3.7. b)$$

3.3 나선형 곡선부재의 힘과 변위와의 관계

그림 3.3에서와 같이 축력 N , \vec{n} , \vec{b} 벡타 방향의 휨모멘트 M_x , M_y , 바이모멘트를 B_i 로 표시하면

$$N = \iint \sigma dx dy \quad (3.8. a)$$

$$M_x = \iint \sigma y dx dy \quad (3.8. b)$$

$$M_y = \iint -\sigma x dx dy \quad (3.8. c)$$

$$B_i = \iint \omega \sigma dx dy \quad (3.8. d)$$

가 된다. 여기서 x , y 는 단면도심으로 부터 단면내 임의의 점까지의 거리이다.

식(3.7)에 Hooke의 법칙 $\sigma = E\epsilon$ 를 적용시키

고 식(3.6)과 식(3.7. b)를 대입하면

$$N = AE\epsilon_c = AE(w' - ku) \quad (3.9. a)$$

$$M_x = EI_x k_x = EI_x (-2\tau u' - v'' + \tau^2 v - k\tau w + k\phi) \quad (3.9. b)$$

$$M_y = EI_y k_y = EI_y (u'' - \tau^2 u - 2\tau v' + kw') \quad (3.9. c)$$

$$B_i = -EI_\Omega \Omega' = -EI_\Omega (k\tau u' + kv'' + \phi'') \quad (3.9. d)$$

이 된다. 여기서, E 는 탄성계수, A 는 단면적, I_x , I_y 는 각각 x , y 축에 대한 단면 2차 모멘트이며 I_Ω 는 식(3.10)과 같이 정의되는 뒤틀림상수(warping constant)이다.

$$I_\Omega = \iint \omega^2 dx dy \quad (3.10)$$

또한 薄壁 두께에 대해 전단응력이 일정하게 분포하지 않으므로 발생하는 비틀림모멘트 즉 St. Venant 비틀림모멘트는 다음과 같다.

$$T_{sv} = GK_t \Omega = GK_t (k\tau u + kv' + \phi') \quad (3.11)$$

여기서, G 는 전단 탄성계수이며 K_t 는 비틀림상수(torsional constant)이다.

전체 비틀림모멘트 T 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T = T_{sv} + B_i' = & GK_t (k\tau u + kv' + \phi') \\ & - EI_\Omega (k\tau u' + kv'' + \phi'') \end{aligned} \quad (3.12)$$

특히, 원형 곡선부재인 경우 $\tau = 0$, $k = \frac{1}{a}$ 이므로 식(3.9)와 식(3.12)는 다음과 같이 표현되며 이는 기존 연구^(3, 4, 6, 8)와 일치한다.

$$N = AE(w' - u/a) \quad (3.13. a)$$

$$M_x = EI_x (-v'' + \phi/a) \quad (3.13. b)$$

$$M_y = EI_y (u'' + w'/a) \quad (3.13. c)$$

$$B_i = -EI_\Omega (v''/a + \phi'') \quad (3.13. d)$$

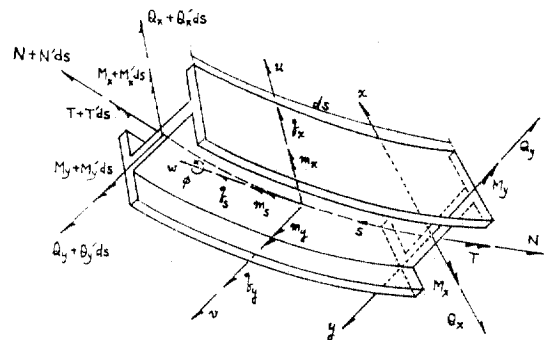


그림 3.3 Stress Resultants and Uniform Loads of Differential Element

$$T = GK_t(v'/a + \phi') - EI_\Omega(v'''/a + \phi''') \quad (3.13. e)$$

$$직선 부재인 경우는 \tau=0, k=0 이므로$$

$$N = AEw' \quad (3.14. a)$$

$$M_x = -EI_x v'' \quad (3.14. b)$$

$$M_y = EI_y u'' \quad (3.14. c)$$

$$B_i = -EI_\Omega \phi'' \quad (3.14. d)$$

$$T = GK_t \phi' - EI_\Omega \phi''' \quad (3.14. e)$$

이 된다. 이는 일반적인 들보이론식^(3,4)과 잘 일치한다.

4. 나선형 곡선부재의 평형 방정식

변형에너지는 수직응력 σ 와 변형도 ϵ 에 의한 값과 St. Venant 비틀림모멘트가 작용하므로 발생하는 전단응력에 의한 값으로 구별된다. W_{int} 를 변형에너지라고 하면

$$W_{int} = \int_{vol} \frac{\sigma \epsilon}{2} dV + \int_L T_{,sv} \cdot \Omega ds \quad (4.1)$$

여기서, $dV = (1 - xk) dx dy ds = (1 - \frac{x \cos^2 \alpha}{a}) dx dy ds$ 인 미소요소의 부피이며 두번째 항은 미소한 값이므로 이를 무시하면 $dV = dx dy ds$ 가 된다.

그림 3.3에서, 외부 하중 m_x, m_y 는 실제 구조물에서 영향이 작으므로^(6,8,9) 외부하중 q_x, q_y, q , 그리고 m , 만을 고려하였으며 이러한 외부하중이 한 외적일 W_{ext} 는 다음과 같다.

$$W_{ext} = \int_L (q_x u + q_y v + q_s w + m_s \phi) ds \quad (4.2)$$

가상일의 원리를 적용하여 식(4.1)에 식(3.7.b)와 식(3.5)를 대입하고 1차 변분을 취하고 이를 부분적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & [M_y \delta u']_0^L - [M_x \delta u]_0^L - [2\tau M_x \delta u]_0^L \\ & - [B_i k \tau \delta u]_0^L + \int^L (M_y' - \tau^2 M_y + 2\tau M_x' + B_i' k \tau - kN + T_{,sv} \cdot k\tau) \delta u ds - [M_x \delta v']_0^L \\ & + [M_x \delta v]_0^L - [B_i k \delta v']_0^L + [k B_i' \delta v]_0^L \\ & + [k T_{,sv} \delta v]_0^L - [2\tau M_y \delta v]_0^L + \int_0^L (2\tau M_y' - M_x'' + \tau^2 M_x - k B_i'' - k T_{,sv}') \delta v ds \\ & + [N \delta w]_0^L + [k M_y \delta w]_0^L + \int_0^L (-k M_y' - k \tau M_x - N') \delta w ds - [B_i \delta \phi']_0^L \\ & + [B_i' \delta \phi]_0^L + [T_{,sv} \delta \phi]_0^L + \int_0^L (k M_x - B_i' - T_{,sv}') \delta \phi ds \quad (4.3) \end{aligned}$$

식(4.2)의 외적일을 1차 변분하면

$$\delta W_{ext} = \int_L (q_x \delta u + q_y \delta v + q_s \delta w + m_s \delta \phi) ds \quad (4.4)$$

가 되므로 $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$ 라고 놓으면 다음과 같은 평형 방정식을 구하게 된다.

$$\begin{aligned} M_y' - \tau^2 M_y + 2\tau M_x' + k \tau B_i' - kN + k \tau T_{,sv} &= q_x, \\ 2\tau M_y' - M_x'' + \tau^2 M_x - k(T_{,sv}' + B_i') &= q_y, \\ -k M_y' - k \tau M_x - N' &= q_s, \\ k M_x - (T_{,sv}' + B_i') &= m_s. \end{aligned} \quad (4.5)$$

식(4.5)는 Love⁽⁴⁾의 평형 방정식에서 전단력 Q_x, Q_y 를 소거하면 동일한 식이 된다.

5. 나선형 곡선부재의 자유 진동 해석

\vec{t}, n, \vec{b} 벡타방향의 변위성분, w, u, v 와 \vec{t} 벡타방향의 회전각 변위성분 ϕ 로 구성된 변위 벡타를 $\{d\}$ 라고 표시하면

$$\{d\} = \{w, u, v, \phi\} \quad (5.1)$$

가 된다. 여기서 w, u 는 면내 거동을 하는 변위이며 v, ϕ 는 면외 거동을 하는 변위이다.

4장에서와 같이 q_x, q_y, q_s, m_s 의 외부 하중을 다음과 같이 D'Alembert 힘으로 대치하면

$$q_s = -\rho A \ddot{w} \quad (5.2. a)$$

$$q_x = -\rho A \ddot{u} \quad (5.2. b)$$

$$q_y = -\rho A v \quad (5.2. c)$$

$$m_s = -\rho I_p \ddot{\phi} \quad (5.2. d)$$

가 되며 ρ 는 밀도, I_p 는 단면도심에 대한 극관성 모멘트를 나타내며 $(\ddot{\quad}) = \frac{d^2(\quad)}{dt^2}$ 즉, 시간에 대한 2차 도함수를 표시한다.

식(5.2)와 식(3.9), 식(3.11) 그리고 식(3.12)를 평형 방정식, 식(4.5)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} AE(w'' - ku') + kEI_y(u'''' - 2\tau v'' + kw'' - \tau^2 u') \\ + k\tau EI_x(k\phi - v'' - 2\tau u' + \tau^2 v - k\tau w) = \rho A \ddot{w}, \end{aligned} \quad (5.3. a)$$

$$\begin{aligned} -EI_y(u^{iv} - 2\tau v'''' + kw'''' - \tau^2 u'''' - 2\tau EI_x(k\phi' - v'''' - 2\tau u'' + \tau^2 v' - k\tau w') + \tau^2 EI_y(u'' - 2\tau v' + kw' - \tau^2 u) - k\tau \{GK_t(\phi' + kv' + k\tau u) - EI_\Omega(\phi'' + kv'' + k\tau u')\}) + kAE(w' - ku) = \rho A \ddot{u}, \end{aligned} \quad (5.3. b)$$

$$\begin{aligned} EI_x(k\phi'' - v^{iv} - 2\tau u'''' + \tau^2 v'' - k\tau w'') - 2\tau EI_y(u'''' - 2\tau v'' + kw'' - \tau^2 u') - \tau^2 EI_x(k\phi - v'' - 2\tau u' + \tau^2 v - k\tau w) - kGK_t(\phi'' + kv'' + k\tau u') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+kEI_{\Omega}(\phi^{iv}+kv^{iv}+k\tau u''')=\rho Av, \quad (5.3.c) \\
 GK_t(\phi'''+kv''+k\tau u'')-EI_{\Omega}(\phi^{iv}+kv^{iv}+k\tau u''') \\
 &-kEI_x(k\phi-v''-2\tau u'+\tau^2 v-k\tau w)=\rho I_p \ddot{\phi}. \quad (5.3.d)
 \end{aligned}$$

식(5.3)을 $\{w, u, v, \phi\}$ 의 순서로 정리하고 매트릭스 형태로 표시하면

$$[K]\{d\}=\frac{\rho A}{E}[M]\{\ddot{d}\} \quad (5.4)$$

가 되며 $[M]$ 매트릭스는 $M_{11}=M_{22}=M_{33}=1, M_{44}=I_p/A$ 이며 비대각 요소는 모두 0인 대각 행렬이다. $[K]$ 매트릭스는 4×4 의 매트릭스이며 각 요소들은 식(5.5)와 같다.

$$\begin{aligned}
 K_{11} &=AD^2+k^2I_yD^2-k^2\tau^2I_x, \\
 K_{12} &=-kAD+kI_yD^3-k\tau^2I_xD-2\tau^2I_xD, \\
 K_{13} &=-k\tau I_xD^2+I_y(-2k\tau D^2)-k\tau^3I_x, \\
 K_{14} &=k^2\tau I_x, \\
 K_{21} &=-kI_yD^3+2k\tau^2I_xD+k\tau^2I_yD \\
 &\quad +kAD=-K_{12}, \\
 K_{22} &=4\tau^2I_xD^2+I_y(2\tau^2D^2-D^4-\tau^4) \\
 &\quad -\frac{GK_t}{E}k^2\tau^2+k^2\tau^2I_{\Omega}D^2-k^2A, \\
 K_{23} &=I_x(2\tau D^3-2\tau^3D)+I_y(2\tau D^3 \\
 &\quad -2\tau^3D)-k^2\tau\frac{GK_t}{E}D+I_{\Omega}k^2\tau D^3, \\
 K_{24} &=-2k\tau I_xD-k\tau\frac{GK_t}{E}D+I_{\Omega}k\tau D^3 \\
 K_{31} &=I_x(k\tau^3-k\tau D^2)-2k\tau I_yD^2=K_{13}, \\
 K_{32} &=(I_x+I_y)(-2\tau D^3+2\tau^3D) \\
 &\quad +\frac{GK_t}{E}k^2\tau D-I_{\Omega}k^2\tau D^3=-K_{23}, \\
 K_{33} &=I_x(-D^4+2\tau^2D^2-\tau^4)+ \\
 &\quad I_y(4\tau^2D^2)+\frac{GK_t}{E}k^2D^2-I_{\Omega}k^2D^4, \\
 K_{34} &=I_x(kD^2-k\tau^2)+\frac{GK_t}{E}kD^2 \\
 &\quad -I_{\Omega}kD^4, \\
 K_{41} &=k^2\tau I_x=K_{14}, \\
 K_{42} &=I_x(2k\tau D)+\frac{GK_t}{E}k\tau D-I_{\Omega}k\tau D^3 \\
 &=-K_{24}, \\
 K_{43} &=I_x(kD^2-k\tau^2)+\frac{GK_t}{E} \\
 &\quad kD^2-I_{\Omega}kD^4=K_{34}, \\
 K_{44} &=-k^2I_x+\frac{GK_t}{E}D^2-I_{\Omega}D^4.
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

여기서, D 는 $\frac{d}{dx}$ 를 의미하는 미분 연산자이다.

특히 $[K]$ 매트릭스가 비대칭이 되는 이유는 n 벡터의 곡률중심이 음의 방향에 위치하기 때문이다.

5.1 단순지지된 나선형 곡선부재

식(5.4)는 어떤 특별한 경계조건을 만족시키는 변위함수를 대입하면 常係數 偏微分方程式이 되며 이는 변수분리법에 의해 풀 수 있다.

$$\{d\}=\{d_n\}\sin p_n t \quad (5.6)$$

이라고 하면 식(5.4)는

$$[K]\{d_n\}=-\frac{\rho A}{E}p_n^2[M]\{d_n\} \quad (5.7)$$

가 된다. 식(5.7)은 표준화된 모우드(normal mode) 즉, 고유벡터 $\{d_n\}$ 과 고유진동수 p_n 을 결정하는 常微分방정식이 된다.

고유벡터 $\{d_n\}$ 을 식(5.8)과 같이 가정하면 단순지지된 나선형 곡선부재의 고유치 문제가 되며 $\lambda_n=n\pi/L$, $\{w_n, u_n, v_n, \phi_n\}$ 은 모우드 진폭(modal amplitude), L 은 나선형 곡선부재의 길이를 의미한다.

$$\{d_n\}=\begin{Bmatrix} \sin\lambda_n s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda_n s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\lambda_n s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\lambda_n s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_n \\ u_n \\ v_n \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

단순 지지된 나선형 곡선부재에 대해 식(5.8)의 모우드 형상은 $s=0, s=L$ 인 경우 $v=\phi=M_x=B_z=0$ 의 조건을 만족시키며 원형 곡선부재에 대해서 즉, $\tau=0$ 의 경우, 양단에서 $u'=0$ 의 경계조건을 만족시킨다. 그러므로 u 를 cosine mode shape로 가정한 것은 원형 혹은 나선형 곡선부재에 대해서 타당하다.

나선형 곡선부재와 동일한 길이 L 을 갖는 직선부재의 연직방향 고유진동수를 p_v , 반경방향 고유진동수를 p_u , 축방향 고유진동수를 p_w , 축방향 비틀림에 대한 고유진동수를 p_ϕ 라고 하면 식(5.9)가 성립되며 식(5.10)과 같은 무차원 변수를 사용하여 식(5.7)을 다시 정리하면 식(5.11)과 같은 무차원 요소를 갖는 매트릭스식이 된다.

$$\left. \begin{aligned} p_v^2 &= \lambda_n^4 \frac{EI_x}{\rho A} \\ p_u^2 &= \lambda_n^4 \frac{EI_y}{\rho A} \\ p_w^2 &= \lambda_n^2 \frac{EA}{\rho A} = \lambda_n^2 \frac{E}{\rho} \\ p_\xi^2 &= \frac{\lambda_n^2}{\rho I_p} (GK_t + EI_\Omega \lambda_n^2) \end{aligned} \right\} (5.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{p_u^2}{p_v^2} = \frac{I_y}{I_x} \\ \eta &= \frac{p_w^2}{p_v^2} = \frac{A}{(\lambda_n^2 I_x)} \\ \zeta &= \frac{p_\xi^2}{p_v^2} = \frac{GK_t + EI_\Omega \lambda_n^2}{EI_x} \frac{A}{\lambda_n^2 I_p} \\ &= \gamma \frac{A}{\lambda_n^2 I_p} \\ \gamma &= \frac{GK_t + EI_\Omega \lambda_n^2}{EI_x} \end{aligned} \right\} (5.10)$$

여기서 γ 는 비틀刚性比(rigidity ratio)이다.

$$\frac{p_v^2}{p_v^2} [M] \{d_n\} = [H] \{d_n\} \quad (5.11)$$

식(5.11)의 무차원 요소들은 식(5.12)와 같다

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= \frac{k^2 \tau^2}{\lambda_n^4} + \frac{k^2}{\lambda_n^2} \xi + \eta, \\ H_{12} &= -\frac{2k\tau^2}{\lambda_n^3} - \frac{k}{\lambda_n^3} (\lambda_n^2 + \tau^2) \xi - \frac{k}{\lambda_n} \eta, \\ H_{13} &= -\frac{k\tau}{\lambda_n^4} (\lambda_n^2 + \tau^2) - \frac{2k\tau}{\lambda_n^2} \xi, \\ H_{14} &= -\frac{k^2 \tau}{\lambda_n^4}, \\ H_{21} &= H_{12}, \\ H_{22} &= \frac{4\tau^2}{\lambda_n^2} + \frac{1}{\lambda_n^4} (\lambda_n^2 + \tau^2)^2 \xi \\ &\quad + \frac{k^2 \tau^2}{\lambda_n^2} \frac{I_p}{A} \zeta + \frac{k^2}{\lambda_n^2} \eta \\ H_{23} &= \frac{2\tau}{\lambda_n^3} (\lambda_n^2 + \tau^2) (1 + \xi) + \frac{k^2 \tau}{\lambda_n} \frac{I_p}{A} \zeta \\ H_{24} &= \frac{2k\tau}{\lambda_n^3} + \frac{k\tau}{\lambda_n} \frac{I_p}{A} \zeta, \\ H_{31} &= H_{13}, \\ H_{32} &= H_{23}, \\ H_{33} &= \frac{1}{\lambda_n^4} (\lambda_n^2 + \tau^2)^2 + \frac{4\tau^2}{\lambda_n^2} \xi + \frac{k^2 I_p}{A} \zeta, \\ H_{34} &= \frac{k}{\lambda_n^2} + \frac{k\tau^2}{\lambda_n^4} + \frac{k I_p}{A} \zeta, \\ H_{41} &= H_{14}, \\ H_{42} &= H_{24}, \end{aligned} \right\} (5.12)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{43} &= H_{34}, \\ H_{44} &= \frac{k^2}{\lambda_n^4} + \frac{I_p}{A} \zeta, \end{aligned} \right\}$$

6. 해석 예

곡률계수 $Cur = I_p / Aa^2$ 으로 정의하면 곡률계수와 단면 특성치 I_x, I_y, I_p, I_t 및 무차원 계수 ξ, η, ζ, γ 의 관계식은 다음과 같은 식(6.1)이 성립된다.

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_p / (1 + \xi) = A \cdot a^2 Cur / (1 + \xi), \\ I_y &= \xi \cdot I_x = \frac{\xi}{1 + \xi} A a^2 Cur, \\ I_p &= A \cdot a^2 \cdot Cur, \\ \eta &= (1 + \xi) / (\lambda_n^2 a^2 Cur), \\ \zeta &= \gamma \frac{A}{I_p \lambda_n^2} = \gamma / (a^2 \cdot Cur \cdot \lambda_n^2). \end{aligned} \right\} (6.1)$$

본 논문에서는 나선기울기 α 와 나선중심각 β 을 입력시켜 $\lambda_n = n\pi/L, k = \cos^2/a, \tau = -\sin\alpha \cdot \cos\alpha/a$ 를 계산하고 무차원 계수 ξ, η, ζ 를 중분시키면서 고유진동수를 계산하였다.

6.1 Christiano의 모델⁽¹⁰⁾

그림 6.1과 표 6.1에 주어진 Christiano 모델에 대해 나선기울기 α 를 $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ 로 증가시켜 해석한 첫번째 고유진동수와 모우드 형상은 표 6.2와 같다.

나선 반경 $a = 96''$, 부재 길이 $L = 94''$,
 나선 중심각 $\beta = 56^\circ, \xi = 11.8138, \zeta = 1.4636$
 곡률계수 $Cur = I_p / Aa^2 = 0.0089$

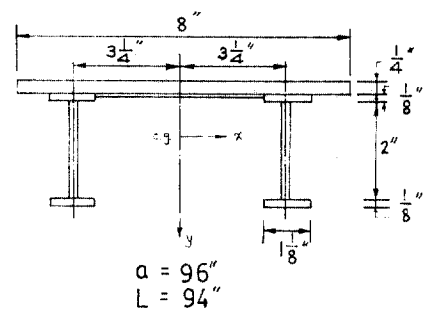


그림 6.1 Experimental Model's Cross Section of Christiano's

표 6.1 Properties of Christiano's Model

Notation	Values	Unit	Notation	Values	Unit
A	3.0625	in ²	E	402000	psi
I_x	1.858	in ⁴	G	149400	psi
I_y	21.95	in ⁴	ρ	0.000114	lb-sec ² /in ⁴
K_t	0.0472	in ⁴	a	96	in
I_D	16.85	in ⁶	L	94	in
I_p	25.05	in ⁴			

표 6.2 Frequencies and Mode Shapes of Christiano's Model

Helix Angle	Frequency	Mode Shape			
		w_n	u_n	v_n	ϕ_n
0°	0.6156	0.	0.	1.	-0.0601
	1.7749	0.	0.	1.	0.2027
	2.9224	0.3564	1.	0.	0.
	12.5403	1.	-0.3563	0.	0.
10°	0.6091	0.0397	0.1286	1.	-0.0592
	1.7621	0.0759	0.2351	1.	0.2131
	2.9813	0.3512	1.	-0.1684	-0.0053
	12.7077	1.	-0.3502	0.0056	0.00005
20°	0.5913	0.0728	0.2475	1.	-0.0563
	1.7321	0.1351	0.4409	1.	0.2423
	3.1424	0.3349	1.	-0.3123	-0.0087
	13.2404	1.	-0.3318	-0.0087	0.00008
30°	0.5668	0.0947	0.3498	1.	-0.0524
	1.6989	0.1699	0.6069	1.	0.2860
	3.3721	0.3068	1.	-0.4223	-0.0101
	14.2401	1.	-0.3019	0.0113	0.00008

6.2 나선형 곡선부재에 대한 예

다음과 같이 계수들을 변화시키면서 나선형 곡선부재에 대한 고유진동수를 계산하여 그림 6.2~6.8 과 같은 결과를 얻을 수 있다.

모우드 數 $n : 1, 2$

$\xi : 0.5, 1, 25, 100$

$p_h/p_v : 0 \sim 4$

나선 중심각 $\beta : 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 360^\circ$

곡률계수 $Cur : 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

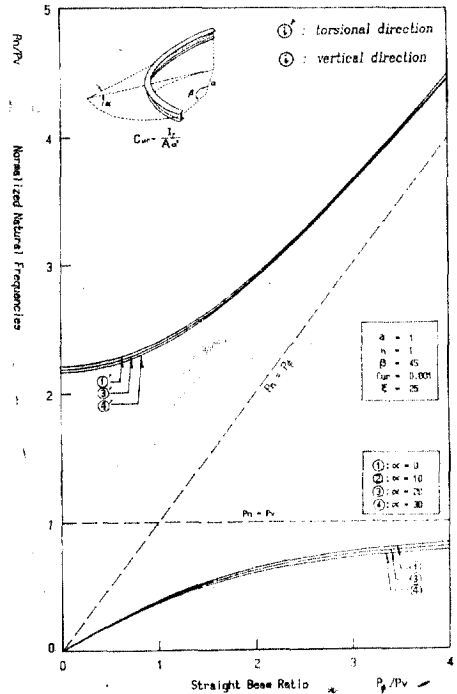


그림 6.2 (a) Out-of-Plane Normalized Natural Frequencies of Helically Curved Beam with $a=1, n=1, \beta=45^\circ, Cur=0.001$, and $\xi=25$

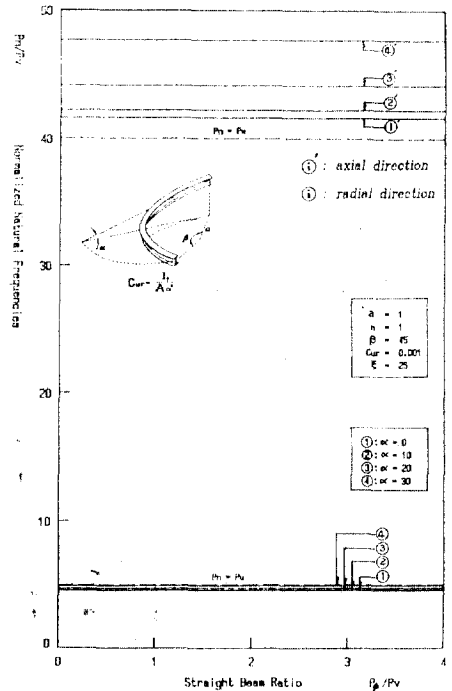


그림 6.2 (b) In-Plane Normalized Natural Frequencies of Helically Curved Beam with $a=1, n=1, \beta=45^\circ, Cur=0.001$, and $\xi=25$

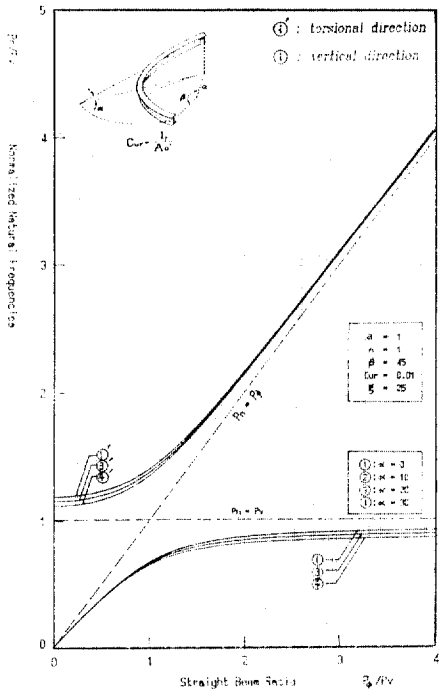


그림 6.3 (a) Out-of-Plane Normalized Natural Frequencies of Helically Curved Beam with $a=1$, $n=1$, $\beta=45^\circ$, $Cur=0.01$, and $\xi=25$

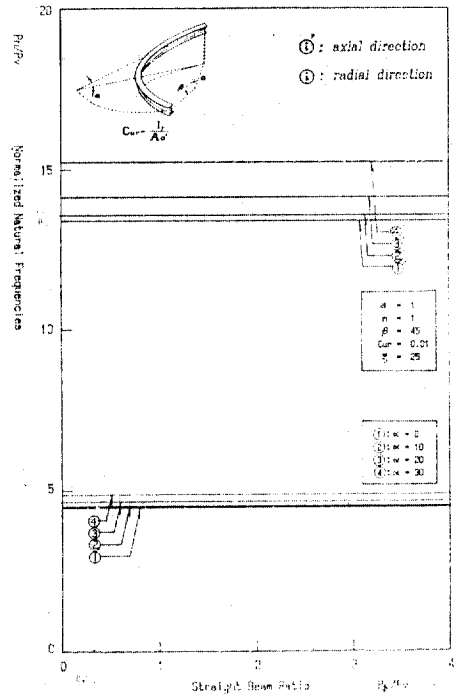


그림 6.3 (b) In-Plane Normalized Natural Frequencies of Helically Curved Beam with $a=1$, $n=1$, $\beta=45^\circ$, $Cur=0.01$, and $\xi=25$

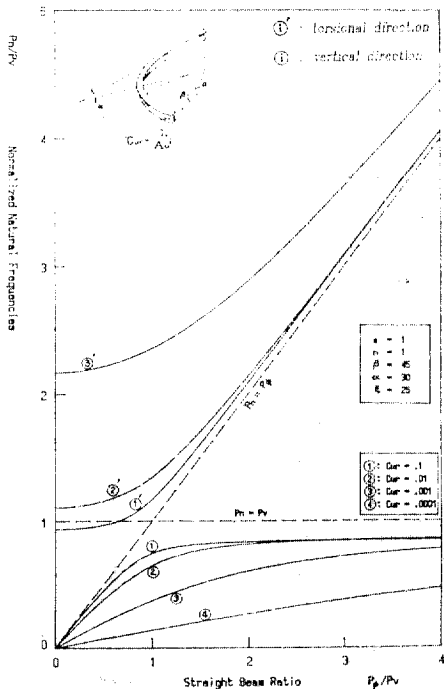


그림 6.4 (a) Out-of-Plane Normalized Natural Frequencies of Helically Curved Beam with $a=1$, $n=1$, $\beta=45^\circ$, $\alpha=30^\circ$, and $\xi=25$

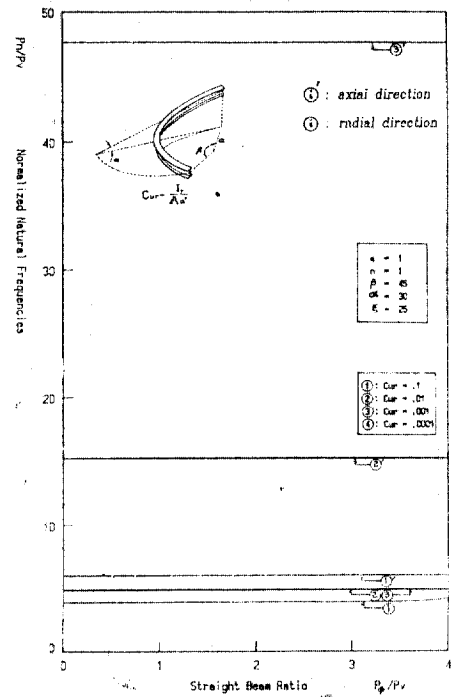


그림 6.4 (b) In-Plane Normalized Natural Frequencies of Helically Curved Beam with $a=1$, $n=1$, $\beta=45^\circ$, $\alpha=30^\circ$, and $\xi=25$

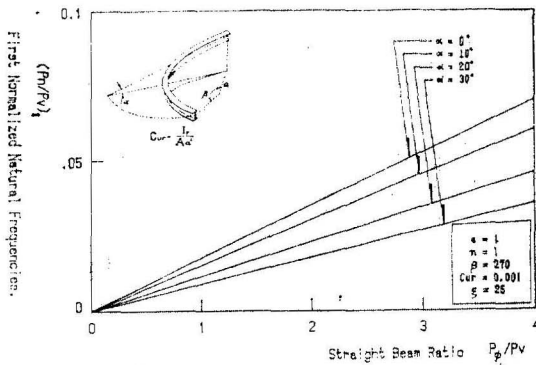


그림 6.5 First Vertical Normalized Natural Frequencies of Helically Curved Beam with $a=1$, $n=1$, $\beta=270^\circ$, $Cur=0.001$, and $\xi=25$

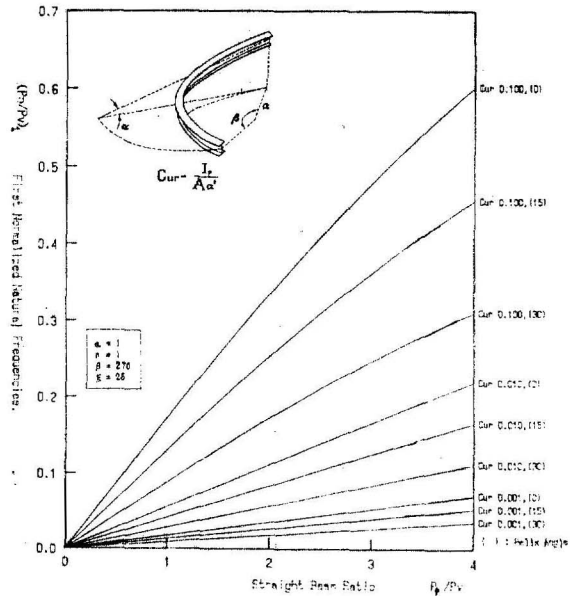


그림 6.6 First Vertical Normalized Natural Frequencies of Helically Curved Beam with $a=1$, $n=1$, $\beta=270^\circ$, and $\xi=25$

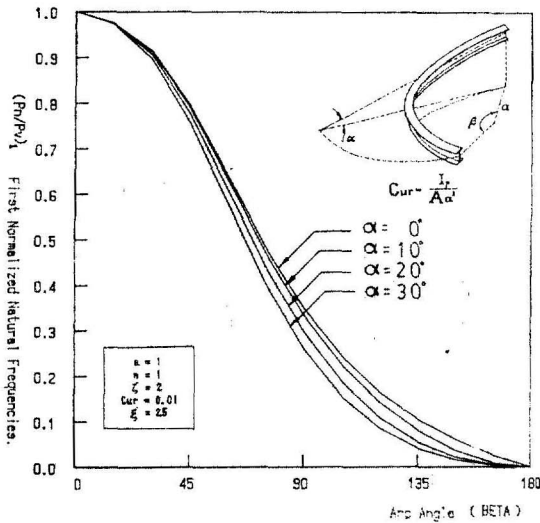


그림 6.7 (a) First Vertical Normalized Natural Frequencies of Helically Curved Beam with $a=1$, $n=1$, $\zeta=2$, $Cur=0.01$, and $\xi=25$

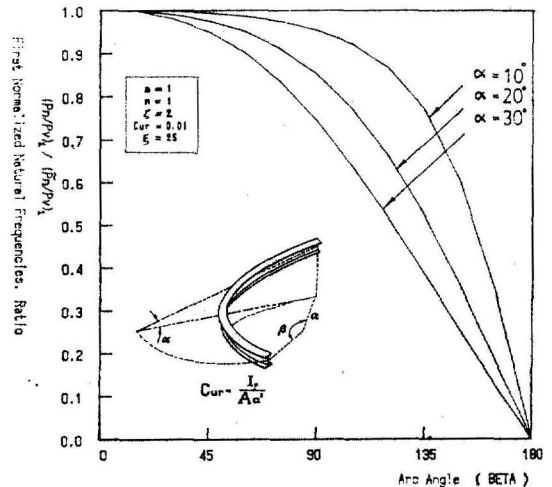


그림 6.7 (b) First Vertical Normalized Natural Frequency Ratio of Helically Curved Beam with $a=1$, $n=1$, $\zeta=2$, $Cur=0.01$, and $\xi=25$

7. 결 론

본 논문에서는, 보다 일반적인 곡선부재의 해석을 위해, 나선형 곡선부재를 해석모델로 선택하였고 나선의 기하학적 특성인 초기 곡률과 나선 좌표계를 이용하여 힘과 변위와의 관계와 평형 방정식을 유도하였다. 가상일의 원리와 D' Alembert의 원리를 적용시켜 관성력을 구하고

단순지지된 나선형 곡선부재의 모우드 형상합수를 가정하여 나선형 곡선부재의 자유진동에 대한 모우드 방정식을 유도하였다.

나선형 곡선부재에 대한 자유진동 및 강제진동에 대한 기존 연구가 없으므로 본 논문의 해석에 대해 결과를 원형 곡선부재의 자유진동 해석결과와 비교 검토하여 본 논문에서 제시한 나선형 곡선부재의 모우드 방정식의 정당성을 입증하였다.

6장의 해석결과를 정리하면 다음과 같다.

- 1) Tabbia와 Turkstra⁽⁷⁾가 연구한 원형곡선부재의 자유진동 해석결과를 보면 면내거동(w_n 과 u_n)과 면외거동(v_n 과 ϕ_n)은 서로 독립된 거동을 함을 알 수 있다. 표 6.2에서 나선기울기 α 가 0일 때가 원형곡선부재이며 해석결과도 Tabbia의 해석결과와 마찬가지로 면내거동과 면외거동은 서로 독립된 거동으로 나타난다. 그러나 나선기울기가 증가하면 면내거동과 면외거동의 복합성(coupling)은 점점 증가함을 알 수 있다.
- 2) 나선 중심각 β 가 45° 일 때 나선기울기 α 가 증가하면 면외거동을 하는 고유진동수는 감소하지만 면내 거동을 하는 고유진동수는 증가한다.
- 3) 그림 6.2. b와 그림 6.3. b에서 알 수 있듯이 면내거동에 대한 고유진동수는 p_ϕ/p_0 가 증가하여도 거의 변하지 않으며 직선으로 나타난다.
- 4) 그림 6.2. a와 그림 6.3. a에서 알 수 있듯이 면외거동에 대한 고유진동수는 나선기울기 α 가 증가하면 감소하지만 감소하는 크기가 매우 적음을 알 수 있다.
- 5) 그림 6.2~6.4에서 알 수 있듯이 나선형 곡선부재의 고유진동수는 나선기울기보다 곡률계수 Cur 의 영향을 크게 받는다. 즉, 나선형 곡선부재가 좌우단의 연직방향 고저차보다는 나선형 곡선부재를 수평면에 투사했을 때 투영되는 원호의 곡률반경이 고유진동수에 더 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다.
- 6) 그림 6.5와 그림 6.6에서 보듯이 나선 중심각이 90° 보다 클 때 연직방향 고유진동수는 p_ϕ/p_0 의 선형 함수로 나타나며 나선기울기가 증가해도 마찬가지로 고유진동수는 p_ϕ/p_0 의 선형함수로 나타난다.

또한 곡률계수가 변할 경우 나선형 곡선 부재의 고유진동수는 원형곡선부재의 고유진동

수에 거의 정수배로 나타난다(그림 6.6).

- 7) 원형 곡선부재의 경우 나선 중심각 β 가 180° 일 때 $k = \frac{1}{a}$, $\tau = 0$ 이므로 비틀모멘트방향의 고유진동수는 0이 되어 강제운동을 하게 된다. 이는 Tabbia와 Turkstra의 해석결과와 일치한다. 그림 6.7에서 보듯이 나선형 곡선부재에 대해서는 나선 중심각이 180°이면 원형 곡선부재의 경우와 마찬가지로 강제운동을 함을 알 수 있다.

본 논문에서 제시한 나선형 곡선부재의 모우드 방정식에 의해 원형 곡선부재와 나선형 곡선부재의 고유진동수를 구한 결과를 비교할때 원형 곡선부재의 경우 Tabbia의 해석결과에 잘 일치함을 알 수 있으며 나선형 곡선부재에 대한 고유진동수와 모우드 형상의 변화도 쉽게 알 수 있다.

그러므로 원형 곡선부재 및 나선형 곡선부재의 자유진동해석을 위해서는 본논문에서와 같이 보다 일반적인 나선형곡선부재의 자유진동에 대한 모우드 방정식이 요구된다.

참 고 문 헌

1. D.J. Struik, *Lecture on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesely Press Inc., Cambridge, Maa., 1950.
2. J.J. Connor, *Analysis of Structural Member System*, The Ronald Press Co., 1976.
3. V.Z. Vlasov, *Thin-Walled Elastic Beams*, OTS 61-11400, National Science Foundation, Washington, D.C.
4. A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Dover Publications, New York, 1944, pp.381~454.
5. C. F. Kollbrunner and K. Basler, *Torsion in Structures-An Engineering Approach*, Springer-Verlag, 1969.
6. 정진환, 곡선 프리스트레스트 콘크리트 형교의 정적 탄성 해석, 공학 박사 학위 논문, 서울대학교 1985.
7. M.M. Tabbia and C.S. Turkstra, Free Vibration of Curved Box Girders, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 54, No. 4, 1977, pp.501~514.
8. C.P. Heins, *Bending and Torsional Design in Structural Members*, Lexington Books, 1975.
9. R.O. Rabizadeh, *Static and Dynamic Analysis of Horizontally Curved Box Girder*, Ph.D. Thesis, Univ. of Pennsylvania, 1974.
10. P. P. Christiano, *The Dynamic Responses of Horizontally Curved Bridge Subject to Moving Loads*, Ph. D. Thesis, Carnegie-Mellon Univ., 1967.
11. R. Dabrowski, *Thin-Walled Girders, Theory and Analysis*, Cement and Concrete Association, Translation 114, London, England, 1972.

(接受: 1988. 4. 29)