

## 탄성계의 진동제어

# Vibration Control of Elastic Systems

\*이 상 조 (Lee, S. J.)  
\*\*하 영 균 (Ha, Y. K.)  
\*\*\*박 영 필 (Park, Y. P.)

### 요 약

본 논문은 최적조절기, 최적추적제어, 최단시간제어 및 힘상쇄 관측기이론 등을 이용하여 탄성계 진동을 능동적으로 제어하기 위한 제어기 개발에 관한 연구로 탄성계의 모달해석방법을 통하여 작동기의 설치위치, 가중치의 선정 등 각종 파라미터가 제어기의 제어성능에 미치는 영향에 대하여 검토하였다.

### ABSTRACT

The feedback controllers for the active vibration control of elastic systems are developed using optimal regulator, optimal tracking, time optimal and noise observer algorithms.

Using the modal analysis of the elastic systems, the effects of the actuator positions, the input weighting factor and the magnitude of the constraint of the actuator force are investigated.

\*연세대학교 기계공학과 조교수  
\*\*연세대학교 기계공학과 박사과정  
\*\*\*연세대학교 기계공학과 교수

## I. 서 론

대부분의 공학구조물 및 기계장치는 강체가 아닌 탄성계로 이루어져 있어 가해지는 외력에 의해 진동을 유발하며, 특히 외력의 가진주파수가 구조물의 고유진동수 부근에 있을 때에는 계가 공진을 일으키는 등 심각한 문제를 야기시킨다. 이러한 진동은 전체계의 성능에 커다란 악영향을 미치게되므로 계의 정도 및 성능향상과 안정성 증대를 위하여 이의 제어는 필수적인 것이 된다.

탄성계의 진동제어방법은 수동제어와 능동제어로 나눌 수 있으며 수동제어에서는 탄성계에 감쇠기를 부착하거나 감쇠효과가 큰 재질을 구조물의 재질로 선택하여 수동적으로 계의 진동을 줄이는데 반해 능동제어에서는 계의 진동상태를 측정하여 이 신호를 토대로 적절한 제어알고리즘으로부터 계산된 제어력을 계에 가하여 능동적으로 진동을 제어하는 방법으로, 측정장소와 제어장소의 분리, 비접촉제어의 가능성, 계에 따른 다양한 제어 알고리즘의 적용 등의 장점으로 인하여 최근 이에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다<sup>(1~15)</sup>.

본 연구에서는 탄성계의 능동적 진동제어를 위해, 대상 탄성계를 수학적으로 모델링하고 이에 대해 최적조절기(optimal regulator), 최적 추적(optimal tracking), 최단시간제어(time optimal control) 및 힘상쇄관측기(force cancelling observer) 등을 이용한 제어알고리즘을 개발하고 제어 시뮬레이션 및 실험을 행하여 제어기의 적용가능성 및 각종 파라미터가 제어기의 제어성능에 미치는 영향에 대하여 검토하였다.

## II. 이 론

### II - 1. 최적조절기(optimal regulator)<sup>(16)</sup>

탄성계의 지배방정식에 대해 Galerkin의 모우드 합 방법 및 각 모우드간의 직교성조건을 이용하면 다음과 같은 유한차분화된 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{X} = AX + bf \quad (1)$$

$$y = CX \quad (2)$$

탄성계의 진동제어문제는 상태변수들의 값이 영(zero)이 되도록 제어하는 것과 동일하며, 식(1)로 표시되는 계에 상태피드백(state feedback) 방법에 의한 최적제어 이론을 도입하면 제어력은

$$f = -KX \quad (3)$$

으로 표시되어 제어는 다음과 같은 2 차성능지수

$$J = \int_0^{\infty} (X^T QX + Rf^2) dt \quad (4)$$

를 최소화 시키는 것이 목적이며, 여기서 Q, R 은 계의 상태변수 및 제어력에 대한 가중치이다. 식(4)를 최소화시키는 귀환계수행렬K는 다음의 Riccati 방정식을 만족시키는 행렬 P를 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$PA + A^T P - R^{-1} P b b^T P = -Q \quad (5)$$

$$K = P b R^{-1}$$

계의 측정불가능한 상태변수들을 추정하는 상태 관측기는

$$\dot{Z} = Fz + G_1 y + G_2 f \quad (6)$$

와 같은 식으로 표시되는 Luenberger 관측기를 이용하여 실제적인 제어력 f는 추정된 상태 변수벡터 Z를 이용하여

$$f = -KX = -(hZ + gy) \quad (7)$$

과 같이 결정된다.

식(1), (2) 및 (6), (7)을 이용한 탄성계의 최적제어계의 구성도는 그림 1과 같다.

### II - 2. 최적 추적 제어<sup>17)</sup>

주어진 입력을 추적하는 계가 탄성계를 포함하고 있는 경우, 이에 대한 상태방정식은

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + bu \quad (8)$$

로 표시될 수 있으며 상태변수벡터  $X$ 는

$$\bar{X} = X - X_r \quad (9)$$

로서  $X$ 는 계의 상태변수,  $X_r$ 은 주어진 목표상태변

수이며  $X$ 가  $X_r$ 을 추적하는 형태로 계가 제어되게 된다. 이러한 최적추적제어의 경우, 식(8)에서 가정한  $L$ 개의 전 모우드를 모두 제어하는 것은 매우 복잡하여 제어기의 설계 및 적용시 불합리하므로 실제 설계시에는 어중 중요한  $N$ 개의 모우드( $N < L$ )만을 제어하는 방법을 택한다. 단 spillover가 제어효과에 미치는 영향을 분석하여 적당한  $N$ 을 선택하는 것이 필요하다. 이 경우 식(8)은 다음과 같이 제어 모우드부(하첨자 $N$ )와 잔류모우드부(하첨자 $R$ )로 나뉘게 되어

$$\dot{\bar{X}}_N = A\bar{X}_N + b_N u \quad (10)$$

$$\dot{\bar{X}}_R = A\bar{X}_R + b_R u \quad (11)$$

제어이론은 제어 모우드부만의 식(10)에 대하여 적용한다. 최적제어력은

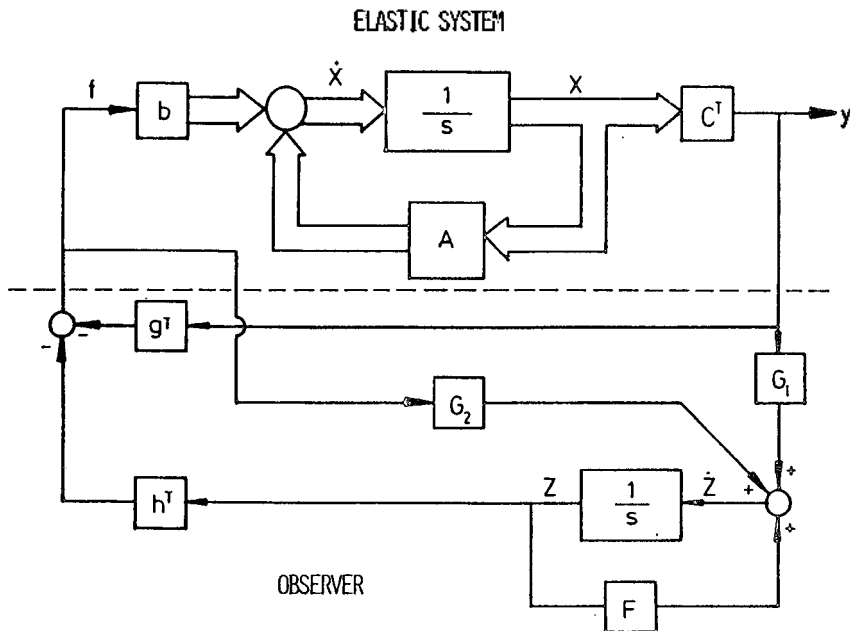


그림 1 Optimal Regulator Problem.

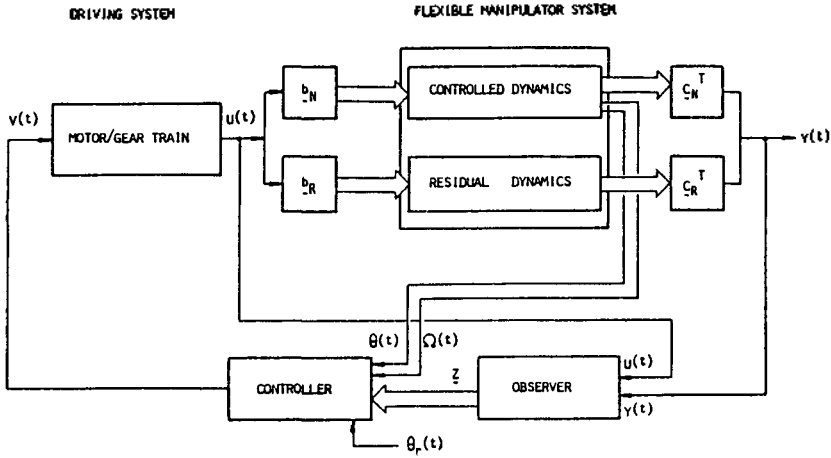


그림 2 Optimal Tracking Problem

$$u = -K\bar{X}_N \tag{12}$$

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f \tag{14}$$

과 같이 결정되며 최적 귀환계수행렬 K를 구하는 방법 및 관측기의 설계는 최적조절기 문제와 거의 유사하며 식(4), (5) 및 (6)은 다음과 같이 약간 변형되게 된다.

로 표시된다. 제어력 f는 실제상황에서 다음과 같은 구속조건이 있는 것으로 가정한다.

$$J = \int_0^{\infty} (\bar{X}_N^T Q_N \bar{X}_N + Ru^2) dt$$

$$PA_N + A_N^T P - R^{-1} P b_N b_N^T P = -Q_N \tag{13}$$

$$K = P b_N R^{-1}$$

$$\dot{Z}_N = F Z_N + G y + b_N u$$

$$|f(t)| \leq M \text{ (상수)} \tag{15}$$

이러한 최단시간제어문제는 경계조건

$$X(0) = X_0, \quad X(t_f) = 0 \tag{16}$$

탄성계를 포함하고 있는 계의 일부 중요모우드만에 대한 추적제어계의 구성도는 그림 2와 같다.

을 만족하여 식(1), (15)를 구속조건으로 하여 식(14)의 성능지표 즉, 제어소요시간  $t_f$ 를 최소화시키는 문제가 된다.

### II - 3. 최단 시간 제어<sup>10)</sup>

식(14)의 성능지표는 제어대상계의 Hamiltonian

식(1)의 상태방정식에 대해 초기상태  $X(0)$ 로부터 목적상태인 정지상태  $X(t_f) = 0$ 로 이동하도록 제어할 때 소요되는 시간  $t_f$ 를 최소화시키는 최단시간 제어 문제의 경우, 식(4)의 성능지수 J는

$$H = 1 + P^T [AX + bf] \tag{17}$$

을 이용하면

$$J = \int_0^1 (H - P^T \dot{X}) dt \quad (18)$$

와 같으며 여기서 P는 보조상태벡터이다.

Pontryagin's maximum principle 을 이용하면 최적제어력  $f^*(t)$  는

$$f^*(t) = \begin{cases} M, & p^{*T} b < 0 \text{ 일때} \\ -M, & p^{*T} b > 0 \text{ 일때} \end{cases} \quad (19)$$

와 같은 Bang-Bang 제어방식이 된다. 여기서  $p^*$  는

$$p^* + A^T p^* = 0 \quad (20)$$

$$1 + p^{*T} [AX_0 + bf^*(0)] = 0, \quad t=0 \text{ 일때} \quad (21)$$

$$1 + p^{*T} (tf)bf^*(tf) = 0, \quad t=tf \text{ 일때}$$

들을 만족하므로 위 식들로부터  $p^*$  를 구하면  $f^*(t)$  를 결정할 수 있다. 그러나  $p^*$  를 구하기가 용이하지 않으며 또한 케루프제어를 하기 위해서 스위칭 함수  $S(x(t))$  를 도입하면

$$f^*(t) = -\text{SGN} \{ S(X(t)) \} \quad (22)$$

가 된다.

제어계의 구성도는 그림 3 과 같다.

#### II-4. 힘 상쇄 관측기<sup>19)</sup>

탄성계가 미지의 외력을 받아 진동이 발생하는 경우, 이를 적절히 제어하기 위해서는 외력을 관측하여 상반되는 제어력을 계에 가해주는 것이 효과적이다. 식(1)의 상태방정식에 대해 계에 가해지는 미지의 외력  $f_a$  이외에 제어력  $f_a$  가 가해진다고 하면 계의 상태방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{X} = AX + b(f_a + f_a) = AX + b\epsilon \quad (23)$$

여기서 제어목적은  $f_a$  와  $f_a$  를 상쇄시켜  $\epsilon$  이 없이 되도록 하는 것이 된다. 관측기에서  $\epsilon$  의 예측값  $\hat{\epsilon}$  을 산출하면 제어력은

$$f_a = -K\hat{\epsilon} \quad (24)$$

이 되며

$$f_a = \epsilon + K\hat{\epsilon} \quad (25)$$

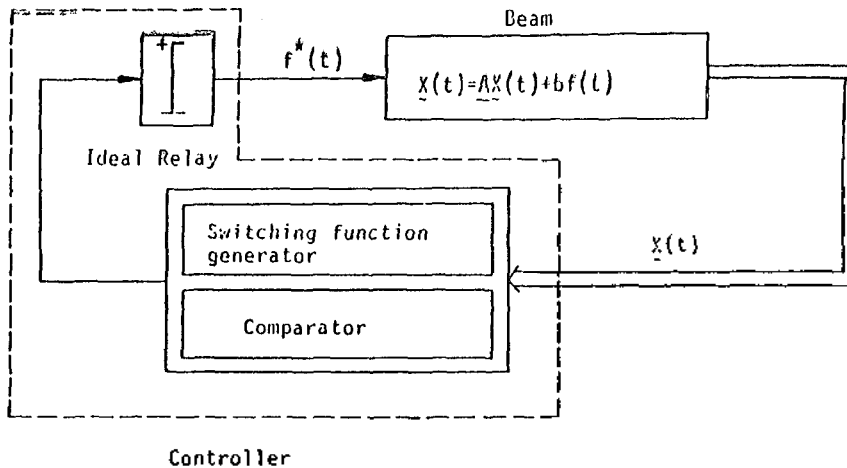


그림 3 Time Optimal Problem.

이므로 관측기가  $\varepsilon$  을 근사하게 예측한다면  $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$  이 되어 식(25)는

$$\hat{\varepsilon} = \frac{f_a}{1+K} \quad (26)$$

로 된다. 만약  $K \gg 1$  이라면  $\varepsilon$  가 영에 가까워져서 제어목적을 만족시킨다.

힘 상쇄관측기를 이용한 제어계의 구성도는 그림 4 와 같다.

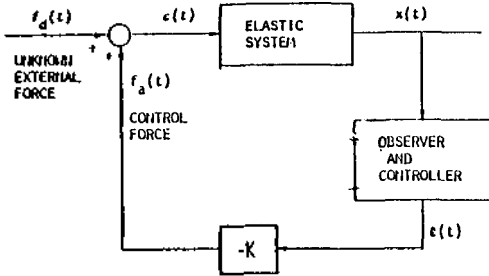


그림 4 Force Cancelling Problem.

### III. 실험 및 수치해석 결과

#### III. 1. 최적 조절기

실험대상계로 그림 5 와 같이 외팔보를 이용하여 gap 센서, Op Amp 로 구성된 관측기 및 제어기, 전자석을 이용한 작동기로 제어계를 구성하였다. 센서 및 작동기의 위치, 식(4)의 제어력에 대한 가중치 R 등의 파라미터변화가 제어효과에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

작동기의 위치( $\varepsilon_a$ ) 에 따른 외팔보진동의 첫번째 모우드에 대한 감쇠율의 변화 및 pole 의 위치변화가 그림 6 및 7 에 나타나 있으며 제어력에 대한 가중치 R 의 변화에 따른 첫번째 모우드에 해당하는 pole 의 변화가 그림 8 에 나타나 있다.

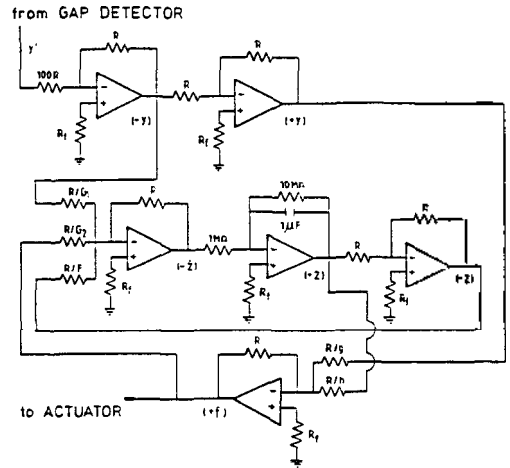
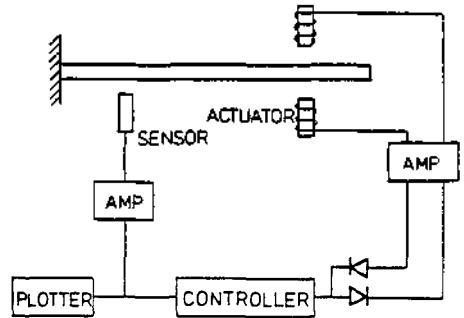


그림 5 Experimental set-up and Controller circuit.

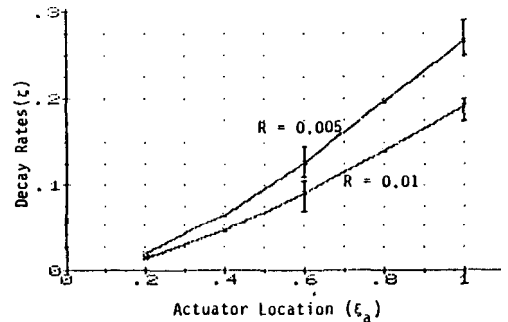


그림 6 Theoretical and Experimental Results; Dependence

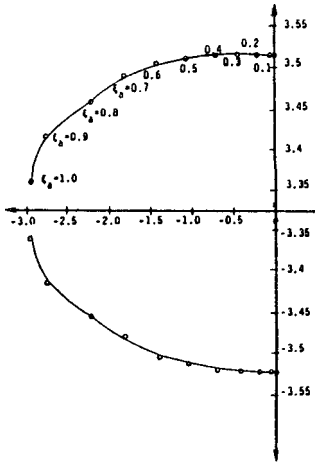


그림 7 Dependence of the First mode pole upon the actuator location ( $\xi_a$ )

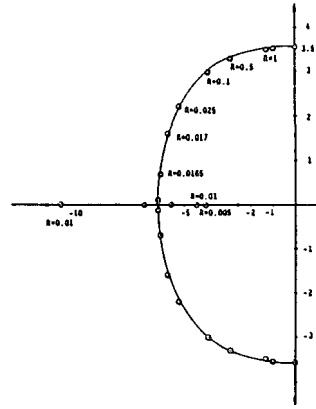
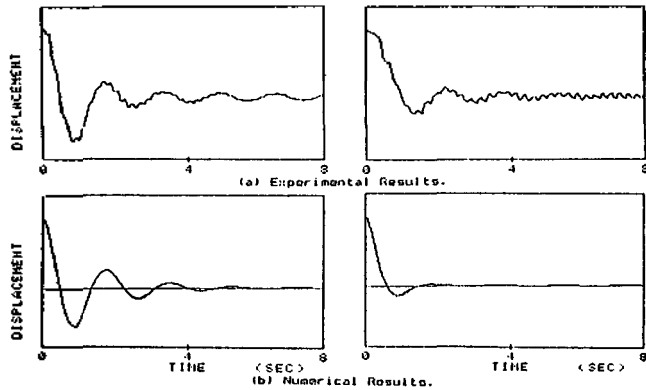
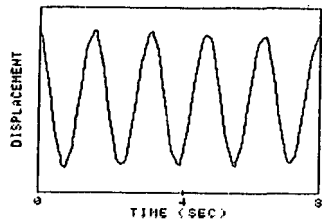


그림 8 Dependence of the first mode pole upon the weighting factor ( $R$ ).



CONTROLLED ( $\xi_a = 0.4$ )

CONTROLLED ( $\xi_a = 0.8$ )



UNCONTROLLED

그림 9 Experimental and numerical Results of the active control of the Beam.

$R=0.1$ 로 고정하고, 센서의 위치를 외팔보 고정단으로부터 전체길이의  $2/10$ 지점에 고정시키고 ( $\xi_s=0.2$ ), 작동기의 위치를 전체길이의  $4/10$  및  $8/10$  지점으로 변화시켰을 경우에 대한 ( $\xi_a=0.4$  및  $0.8$ ) 이론 및 실험결과가 그림 9에 나타나 있다. 이들로부터 작동기의 위치가 외팔보의 자유단으로 갈수록 제어효과가 커지며,  $R$ 의 값이 작을수록 감쇠효과는 크나 작동기의 힘이 과대하게 커짐에 따른 제어기의 설계상의 문제가 발생하므로 적절한  $R$ 의 선택이 필요함을 알 수 있다.

III-2. 최적 추적제어

최적 추적제어 문제를 그림10과 같은 유연한 조작기의 위치 및 진동제어에 적용하여 그림11과 같은 제어계를 구성하고 수치해석 및 실험을 행하였다.

조작기 팔의 모드 수  $L=4$ 로 고정하고, 첫번째 모드만을 제어하는 경우와 ( $N=1$ ) 처음 두 모드만을 제어하는 경우 ( $N=2$ )에 대해 spillover 효과가 계의 제어정도에 미치는 영향을 조사한 결과, 이는 관측기의 상태추정성능 및 잔류 모드의 진동에 다소 영향을 미치나 전체적인 제어정도에는 커다란 영향을 미치지 않음을 알 수 있었다. 식 (13)의 제어력에 대한 가중치  $R$ 의 변화가 계의 제어효과에 미치는 영향과 조작기의 회전 및 진동감쇠상황을 시뮬레이션한 것이 그림12 및 13에 나타나 있다.

$R=0.001$ ,  $N=1$ 인 경우에 대한 수치해석 및 실험결과와 진동제어를 하지 않은 경우의 실험결과를 비교한 것이 그림14에 나타나 있다. 이들로부터  $R$ 의 값이 적을수록 조작기팔의 진동( $\epsilon(t)$ )의 제어효과는 좋아지나 제어력( $V(t)$ )은 커지며, 조작기팔의 회전각( $\theta(t)$ )은  $R$ 의 변화에 큰 영향을 받지 않음을 알 수 있으며, 진동제어를 하지 않은 경우에 조작기의 진동이 조작기의 회전이 끝난 뒤에도 계속 남아 있어 조작기 끝단의 정밀도에 악영향을 미침을 알 수 있다.

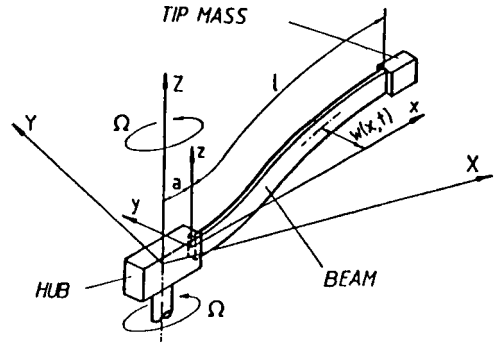


그림10 Flexible robotic manipulator model.

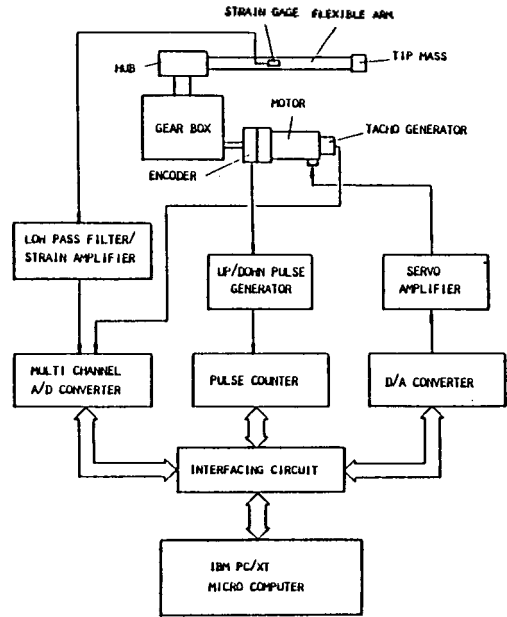


그림11 Experimental set-up.



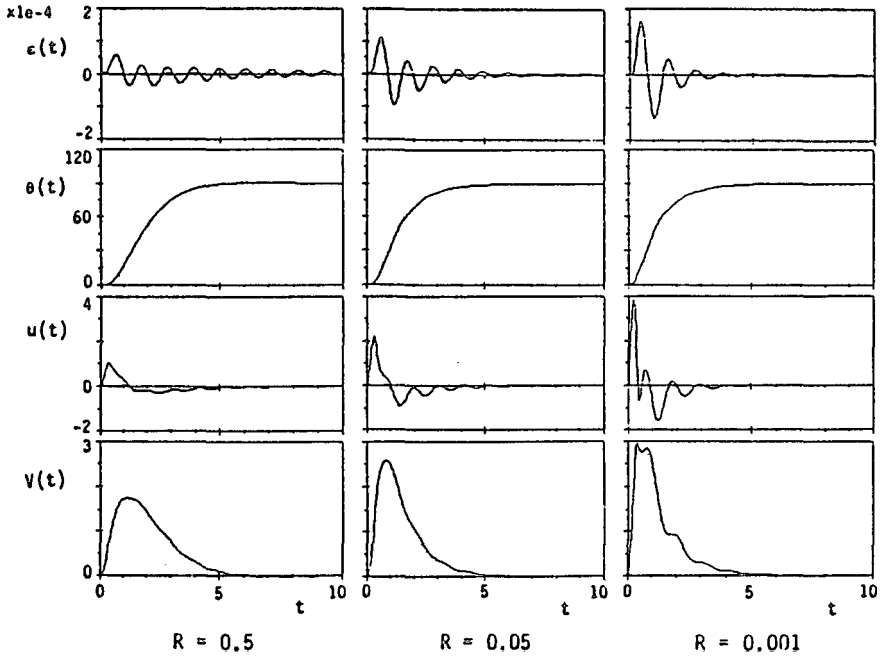


그림12 Dependence of control performance upon the weighting factor(R). (L, N= 4)

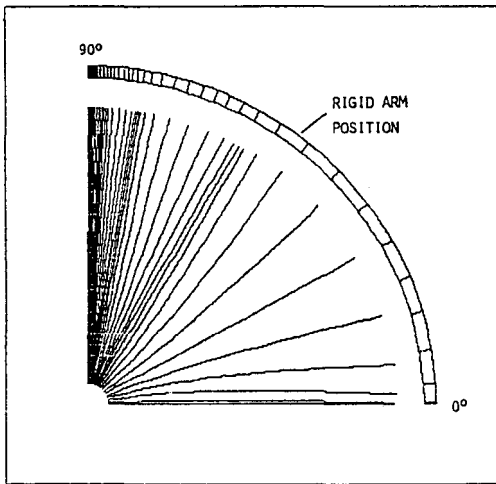


그림13 Computer Simulation of the rotating flexible manipulator (L, N= 4, R=0.001)

### III-3. 최단 시간 제어

외팔보를 제어대상계로 선택하여 그림15와 같이 Bang-Bang 제어기를 사용한 제어계를 구성하여 해석을 행하였다.

외팔보에 대한 스위칭 함수는 그림16과 같으며 초기상태의 변화가 제어시간과 진동상태에 미치는 영향이 그림17에, 제어력 크기, 구속조건의 변화에 의한 영향이 그림18 및 19에, 동작기의 위치변화에 의한 영향이 그림20에 나타나 있다. 이들로부터 진동의 진폭이 매주기마다 일정한 진폭으로 줄고 있으므로 시간최적제어 이론을 이용한 능동제어는 계에 Coulomb 감쇠효과를 줄일 수 있으며, 제어력의 구속조건이 크면 클수록, 작동기의 위치가 외팔보의 자유단에 가까울수록 제어시간이 짧아져 제어효과가 증대됨을 알 수 있다.

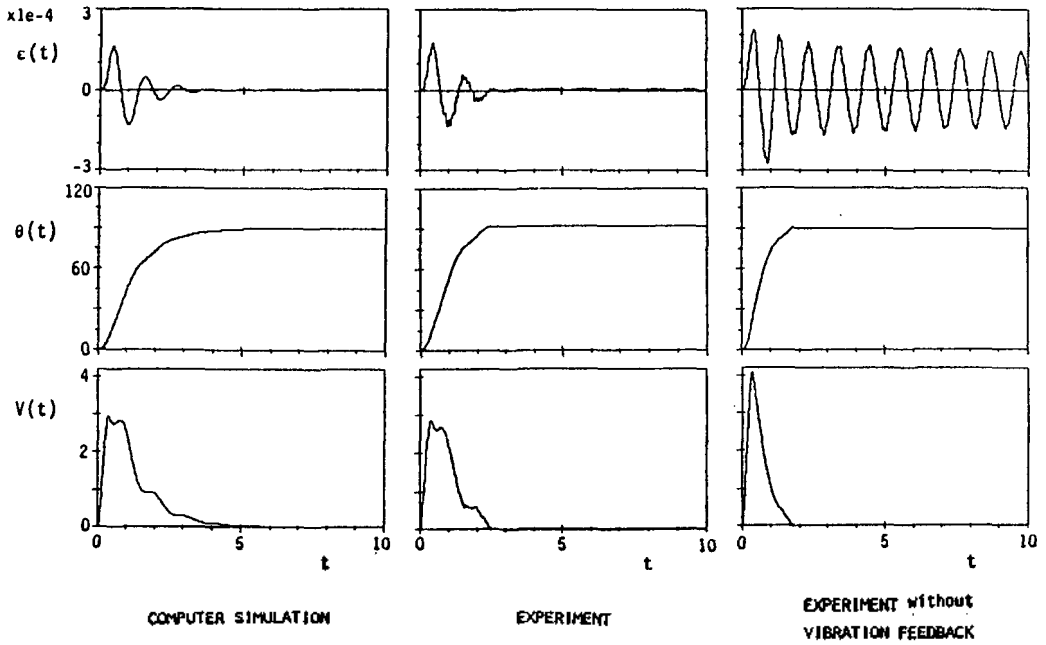


그림14 Comparison of experiment with computer simulation.

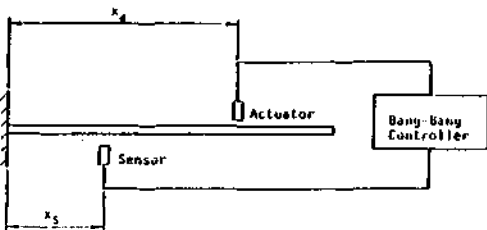


그림15 Active Bang-Bang control system of the Beam.

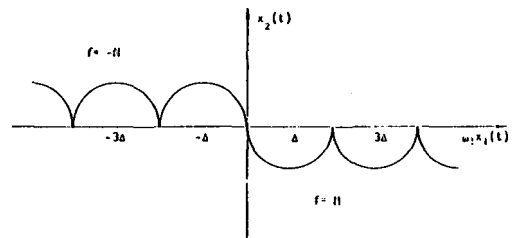


그림16 Switching curve.

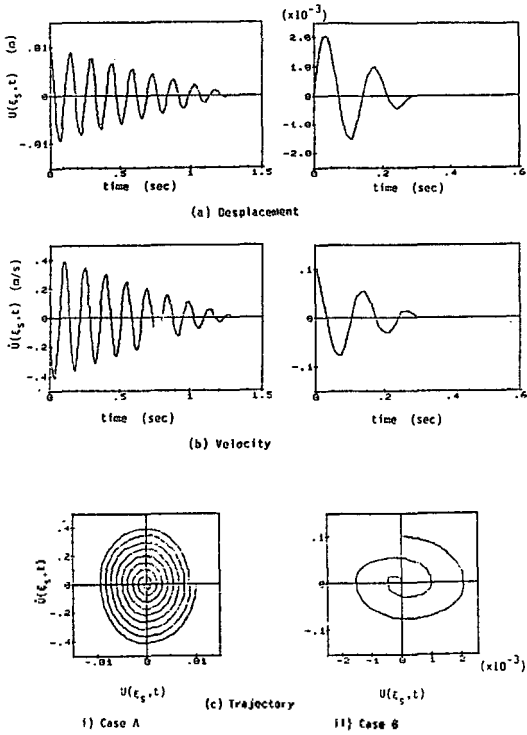


그림17 Effect of the Initial states on the control states.

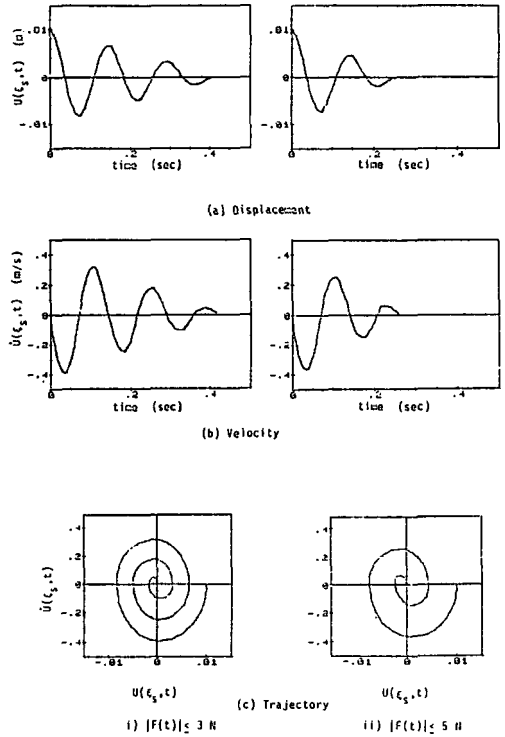


그림18 Effect of the control force constraints on the control state.

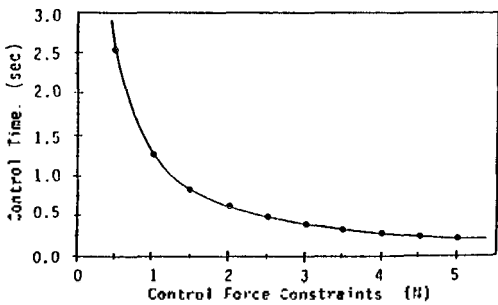


그림19 Dependence of the control time upon the control force constraints.

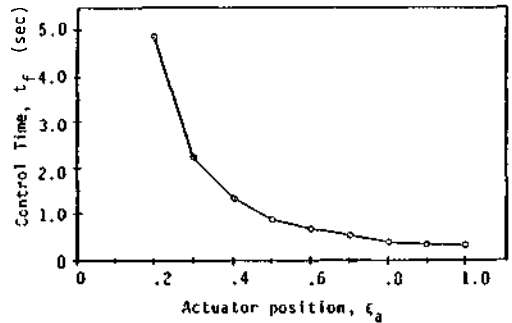


그림20 Dependence of the control time upon the actuator position.

III-4. 힘 상쇄 관측기

실험대상계로 그림21과 같이 한쪽 끝이 고정된 비틀림진동을 하는 균일봉을 택하였으며 그림22와 같이 실험장치를 구성하여 수치해석 및 실험을 행하였다.

관측기의 고유치  $p$  및 관측기에서 사용되는 예상 감쇄비  $\xi$ , 예상고유진동수  $\omega$ , 이득  $K$ 들의 파라미터 및 외력의 종류가 제어효과에 미치는 영향에 대해 연구하였다.

외력이 정현파인 경우, 이득  $K$ 의 변화가 제어효과에 미치는 영향에 대해 시뮬레이션 및 실험을 행한 결과가 그림23에, 외력이 충격력, 한 주기의 구형파 및 pseudo-random 함수인 경우에 대한 제어실험결과가 그림24, 25 및 26에 나타나 있다.

이들로부터 이득  $K$ 가 증가함에 따라 진동제어 효과가 커지며,  $p$ 가 가진력의 주된 주파수보다 클수록 관측기의 성능이 향상되며,  $\omega$ 를 계의 고유진동수보다 작게,  $\xi$ 를 계의 감쇄비보다 충분히 크게 하여줌으로써 안정도가 향상됨을 알 수 있으며 제어기는 가진력의 형태에 상관없이 계의 진동을 효과적으로 제어함을 알 수 있다.

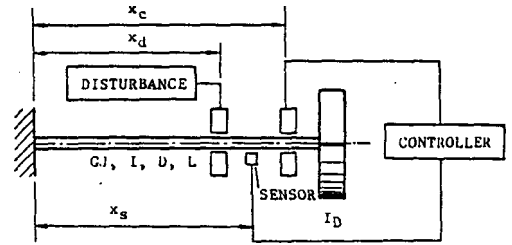


그림21 Force cancelling control system.

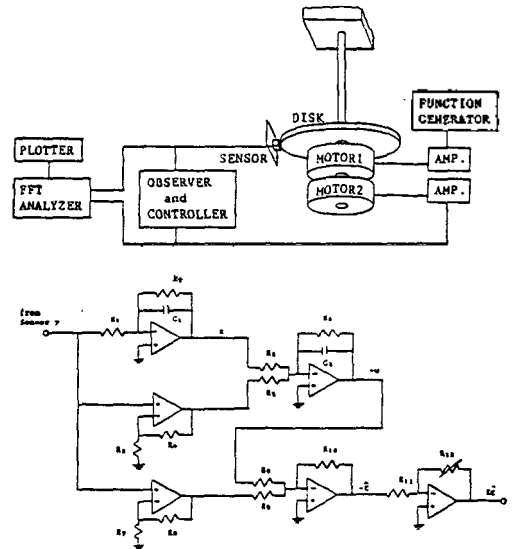


그림22 Experimental set-up and controller circuit.

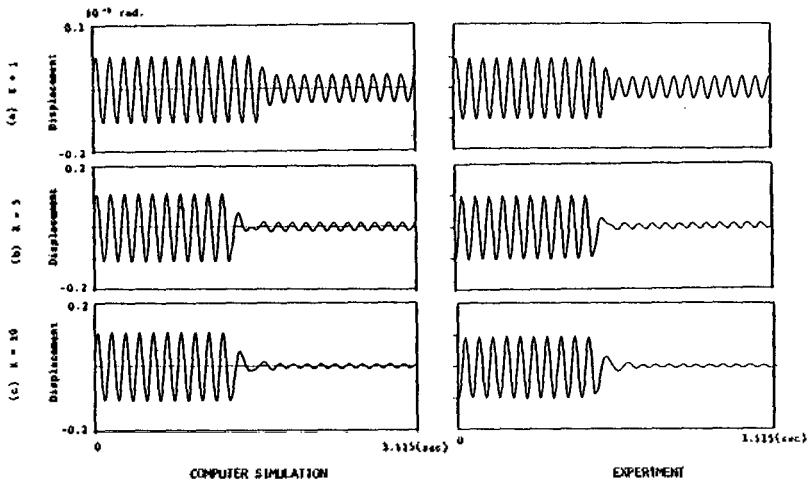


그림23 Computer simulation and Experiment with the change of the gain  $K$ .

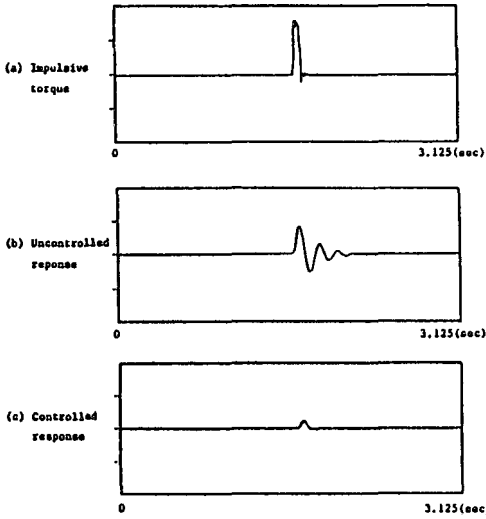


그림24 Response of uncontrolled(b) and controlled(c) system to impulsive torque(a) ( $p=70, \hat{\omega}=5\text{Hz}, \hat{\zeta}=0.7, k=2$ ).

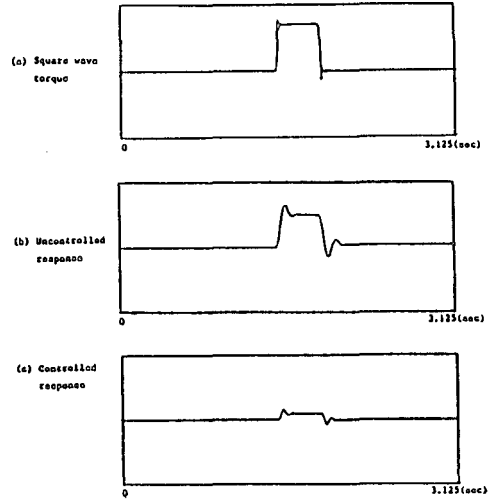


그림25 Response of uncontrolled(b) and controlled(c) system to square wave torque(a) ( $p=70, \hat{\omega}=10\text{Hz}, \hat{\zeta}=0.7, k=5$ ).

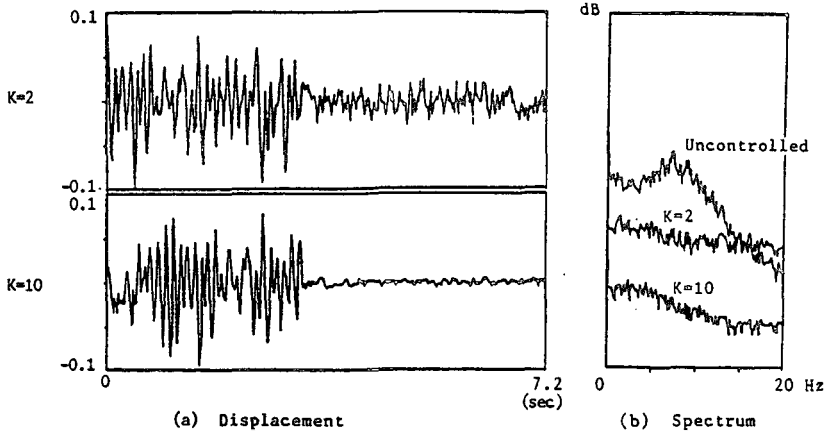


그림26 Time and frequency response of controlled system to random disturbance ( $p=70, \hat{\omega}=5\text{Hz}, \hat{\zeta}=0.7$ ).

#### IV. 결 론

공학구조물 및 기계장치의 성능을 저하시키는 탄성계의 진동을 최적조절기, 최적추적, 최단시간제어 및 힘상쇄관측기 제어이론을 이용하여 제어하는 연구를 수치해석 및 실험을 통하여 수행하여 다음과 같은 다소의 결론을 얻었다.

- (1) 탄성계의 해석시 널리 사용되는 모델해석방법을 이용하여 계를 상태방정식으로 표시하고 이에 대해 제어이론을 적용함으로써 효과적인 탄성계 진동의 능동제어를 행할 수 있다.
- (2) 최적제어시 제어력에 대한 가중치의 선택은 제어 효과 및 제어기의 구성상 매우 중요한 역할을 한다.
- (3) 최적제어계의 구성시 작동기의 위치는 제어효과

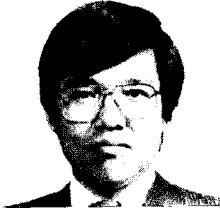
에 큰 영향을 미친다.

- (4) 탄성계를 모델링할 때 계의 모드수를 충분히 가정하고 spillover 의 영향을 조사하여 이중 중요 모드 몇개만 제어하여도 충분한 제어효과를 얻을 수 있다.
- (5) 힘상채관측기를 이용하면 어떠한 종류의 미지의 외력에 대해서도 유발되는 탄성계의 진동을 효과적으로 제어할 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. Wang, P.K.C. and Tung, F., "Optimal Control of Distributed Parameter System," *Journal of Basic Engineering*, 1964, pp.67-79.
2. Komkov, v., "The Optimal Control of a Transverse Vibration of a Beam," *SIAM Journal of Control*, Vol.6, No.3, 1966, pp.401-421.
3. Simon, J.D. and Mitter, S.K., "A Theory of Modal Control," *Inform. Contr.*, Vol.13, 1968, pp.316-353.
4. Klein, R.G. and Nachtigal, C.L., "A Theoretical Basis for Active Control of a Boring Bar Operation," *Trans. ASME, Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, 1975, pp.172-178.
5. Ellis, R.W. and Mote, C.D., "A Feedback Vibration Controller for Circular Saws," *Trans. ASME, Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, vol.101, 1978, pp.44-49.
6. Balas, M.J., "Active Control of Flexible System," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.25, No.3, pp.425-436.
7. Balas, M.J., "Modal Control of Certain Flexible Dynamic System," *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol.16, No.3, 1978, pp.450-462.
8. Balas, M.J., "Feedback Control of Flexible System," *IEEE Trans, Automatic Control*, 1978, pp.673-679.
9. Longman, R.W. and Alfriend, K.T., "Optimal Control of Large Angle Attitude Maneuvers for Flexible Spacecraft," *Proc. of the 8th IFAC Symp. on AC in Space*, Pergamon Press, 1979.
10. 野波健藏, 東成昭, 戸谷隆美, "回転軸系の起動・停止時のあじり振動制御" *日本機械学会論文集 (C編)*, 51巻463号, pp. 535-543.
11. Fukuda, T., "Control of Flexible Robot Arm," *J. of JSME*, Vol.51, No.468, 1985, pp.2140-2144.
12. Sakawa, Y. and Matsuno, F., "Modeling and Control of Flexible Arm," *Measurement and Control*, Vol.1, 1986.
13. Skaar, S.B. and Tucker, d., "Point Control of a One-Link Flexible Manipulator," *Trans. ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol.53, 1986, pp.23-27.
14. Park, Y.P. and Mote, C.D. "The Maximum Controlled Follower Force on a Free-Free Beam Carrying a Concentrated Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.98, No.2, 1985, pp.247-256.
15. Park, Y.P., "Dynamic Stability of a Free Timoshenko Beam under Controlled Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.112, No.2, 1987.
16. 박영필, 최환영, "외팔보 진동의 능동제어" *대한기계학회 '85년도 동력학 및 제어부문 학술강연회 초록집*, 1985, pp. 30-33.
17. 하영균, 박영필, "유연한 로봇트 조각기의 능동 제어" *대한기계학회 '86년도 동력학 및 제어부문 학술강연회 초록집*, 1986, pp. 49-53.
18. 박영필, 정승호, "외팔보 진동의 시간최적제어" *연세대학교 산업기술연구소 논문집*, Vol. 18, No. 1, 1986, pp. 99-105.
19. 이규섭, 김종호, 최봉환, 박영필, "탄성계 진동의 능동제어를 위한 Force Cancelling Observer의 설계" *대한기계학회 '86년도 춘계학술대회*, 1986, pp. 267-270.

▲박 영 필



1948년 4월 17일생  
1971년 2월 연세대학교 기계공학과 졸업  
1977년 7월 텍사스 공과대학 졸업 Ph. D.  
1977년 9월~현재 연세대학교 기계공학과 교수

△이 상 조



1953년 9월 6일생  
1977년 2월 연세대학교 기계공학과 졸업  
1980년 5월 위스콘신 대학교 졸업 Ph. D  
1979년 2월~1985년 7월 울산대학교 기계공학과 조교수  
1986년 9월~현재 연세대학교 기계공학과 조교수

▲하 영 균



1962년 7월 6일생  
1984년 2월 연세대학교 기계공학과 졸업  
1987년 9월~현재 연세대학교 대학원 기계공학과 박사과정 2학기