

垂直 自然對流의 水動力學的 安定性 계산에 관한  
數值解析 方法

Numerical Techniques in Calculation of Hydrodynamic Stability  
for Vertical Natural Convection Flows

黃 英 奎\*  
Hwang, Young-kyu

ABSTRACT

The hydrodynamic stability equations for natural convection flows adjacent to a vertical isothermal surface in cold or warm water (Boussinesq or non-Boussinesq situation for density relation), constitute a two-point-boundary-value (eigenvalue) problem, which was solved numerically using the simple shooting and the orthogonal collocation method. This is the first instance in which these stability equations have been solved using a computer code COLSYS, that is based on the orthogonal collocation method, designed to solve accurately two-point-boundary-value problem.

Use of the orthogonal collocation method significantly reduces the error propagation which occurs in solving the initial value problem and avoids the inaccuracy of superposition of asymptotic solutions using the conventional technique of simple shooting.

1. 서 론

層流 自然對流의 水動力學的 不安定(Hydrodynamic instability)은 流動에 개재된 작은 교란에 대하여 浮力과 압력 및 黏性力의 총합이 교란을 流動方向으로 증대시킬 때 야기된다. 즉, 層流인 基本流動(base flow) 및 溫度場에 중첩된 속도, 압력, 온도의 작은 교란에 대한 水動力學的 安定性 方程式(hydrodynamic stability equation)의

解를 求하여 어떠한 파장과 주파수를 가진 교란이 시간 또는 공간상 증폭되어 亂流로 천이 될 것인가, 아니면 감소하여 安定할 것인가 하는 水動力學的 安定性(hydrodynamic stability)의 문제는 自然對流 현상을 연구하는 중요한 방법으로 발전되었다.<sup>1)~3)</sup>

본 논문에서는 水動力學的 安定性 方程式의 數值解를 求할 때 기존의 漸近解를 利用한 simple shooting 方法과 새로운 orthogonal collocation 方法을 等溫 垂直 벽

\*正會員: 成均館大學校 機械設計學科

이 論文은 韓國科學財團의 1985 年度 전반기 研究費 支援에 의하여 研究되었음.

면 주위의 자연대류 문제에 적용하여 그 결과를 상호 비교하고, 제반 數值解析上 문제점을 다루었다. 安定性 方程式을 반드시 두點 境界值 문제(two-point-boundary-value problem)로 정확히 다루어야 할 경우, 어떻게 컴퓨터 코드를 이용한 orthogonal collocation 방법을 적용할 것인가를 제시하였다.

自然對流의 水動力學的 問題의 對象은 대부분 온도와 밀도의 관계를 표현할 때 Boussinesq 가정이 적용되는 경우이다. 그러나 차가운 물속에 잠겨있는 물체 주위에 형성되는 층류, 자연대류에 대하여는 경계층내에 최대밀도점이 존재함으로 일반적인 Boussinesq 가정이 적용되는 경우와는 판이하게 다르다.

일반적인 Boussinesq 가정이 적용되는 경우는 그 전형적인 기본유동의 형태는 Ostrach<sup>4)</sup>에 의해 구해진 속도 분포곡선 Fig.1과 같으며, 수직등온벽 근처에서 부력에 의하여 야기되는 자연대류에 관한 수동역학적 안정성 방정식은 Plapp<sup>5)</sup>에 의해 최초로 유도되었다. 이 線形 安定性 方程式(linear stability equation)들은 온도와 속도의 변동식(즉, 교란에 대한 모멘텀 방정식 및 에너지 방정식)이 결합되어 있기 때문에 그 解를 구하기가 용이하지 않다. 이러한 이유로 자연대류에 관한 安定性 方程式의 數值解는 強制대류의 경우보다는 본질적으로 어렵다.

Plapp<sup>5)</sup>에 의해 유도된 安定性 方程式의 解는 Plapp<sup>5)</sup>, Szewczyk<sup>6)</sup>, Kurtz와 Crandall<sup>7)</sup>에 의하여 近似的인 계산방법 또는 有限差分法을 이용하여 求하였으나 온도와 속도를 결합하지 않은 解(uncoupled solution)이었다. 온도와 속도가 결합된 解는 최초로 Nachtsheim<sup>8)</sup>에 의하여 공기(Pr = 0.733)의 경우에 simple shooting 方法( $\eta = 0$ 에서  $\eta = \eta_e$ 로)을 사용하여 求하여졌고 그의 계산결과는 놀랄만큼 정확했다.

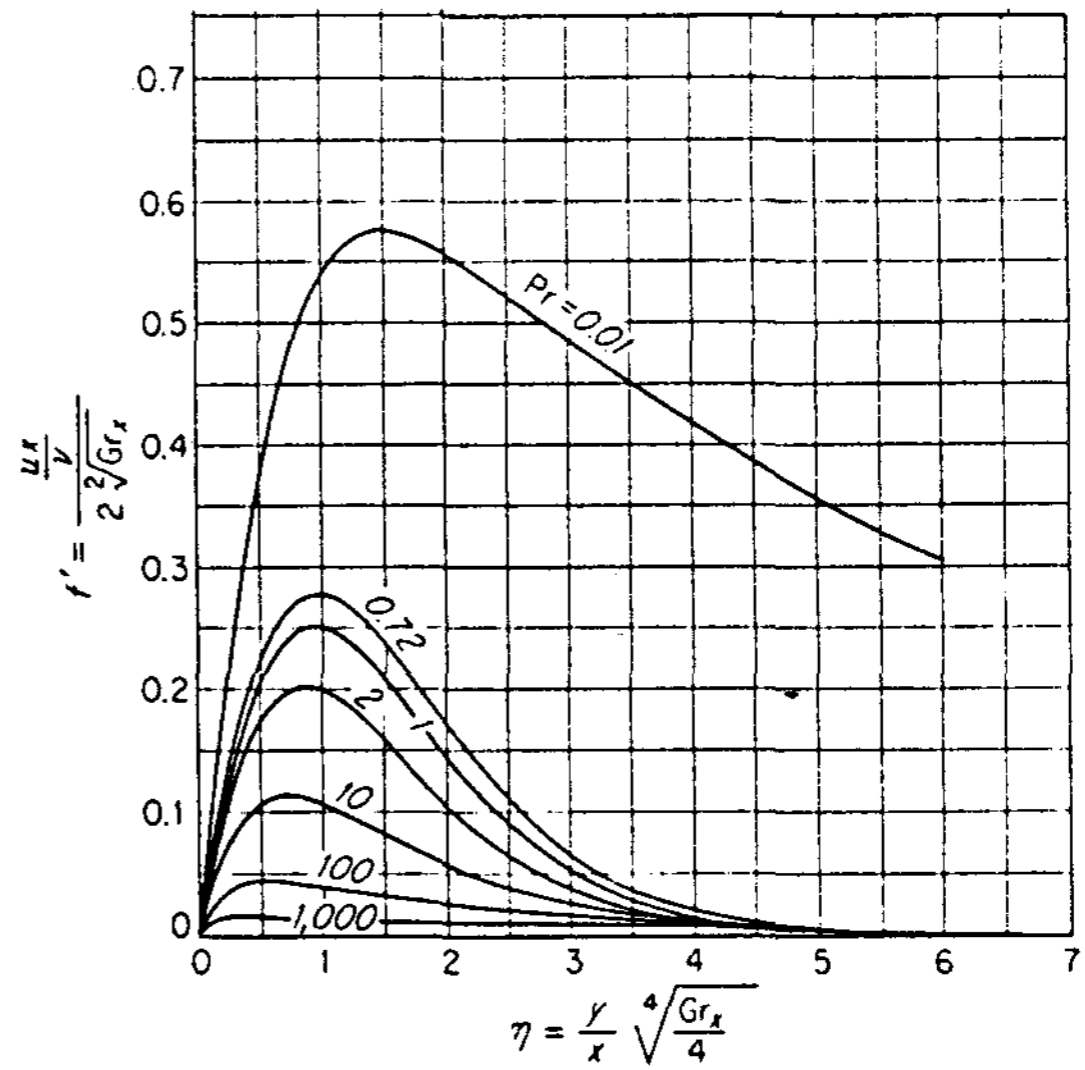


Fig. 1 Velocity Distributions for Natural Convection on a vertical, Isothermal Plate for Laminar Boundary-Layer Flow Conditions [From Ostrach<sup>4)</sup>]

Dring과 Gebhart<sup>9)</sup>는 Pr = 7.7 에서 균일열속 표면에 대한 中立 安定曲線(neutral stability curve)와 공간에 대한 교란 증폭선도(spatial disturbance amplification contour)를 구했다.

Hieber<sup>10)</sup>는 漸近解와 重疊法을 이용한 simple shooting 方法으로( $\eta = \eta_e$ 에서  $\eta = 0$ 으로) 광범위한 Plandtl 수에서 수직 균일 열속 및 등온표면 부근에서의 자연대류에 대한 중립안정곡선과 교란 증폭선도를 구하였다.

온도와 밀도 관계에서 Boussinesq 가정이 적용되지 않는 경우(non-Boussinesq approximation)인 차가운 물속에 수직등온 또는 균일열속 벽이 잠겨 있을 때 형성되는 자연대류에 대하여는 Qureshi<sup>11)</sup>가 Gebhart - Mollendorf의 밀도관계식<sup>12)</sup>을 사용하여 수동역학적 안정성 방정식을 유도하였다. 기본유동의 속도분포곡선은 Fig.2와 같으며,

온도의 경계층내 최대 밀도 온도가 존재하여 최대 밀도 변수 (density extremum Parameter)  $R$ 이  $0 < R < 0.5$ 인 범위내에서는 두 방향의 부력 (bidirectional buoyancy force) 발생으로 인하여 국소 유동 반전(local flow reversal)의 복잡한 유동형태가 되며, 정상상태 다중해 (multiple steady state solution) 까지 존재한다.<sup>13)</sup> 기본유동을 구하기 위하여는 수치적으로 두 점 경계치( $\eta=0, \eta=\infty$ )의 문제로서 다루지 않으면 안된다.

이 때 무한대의 가정치  $\eta_\infty$ 는 최소 30 ~

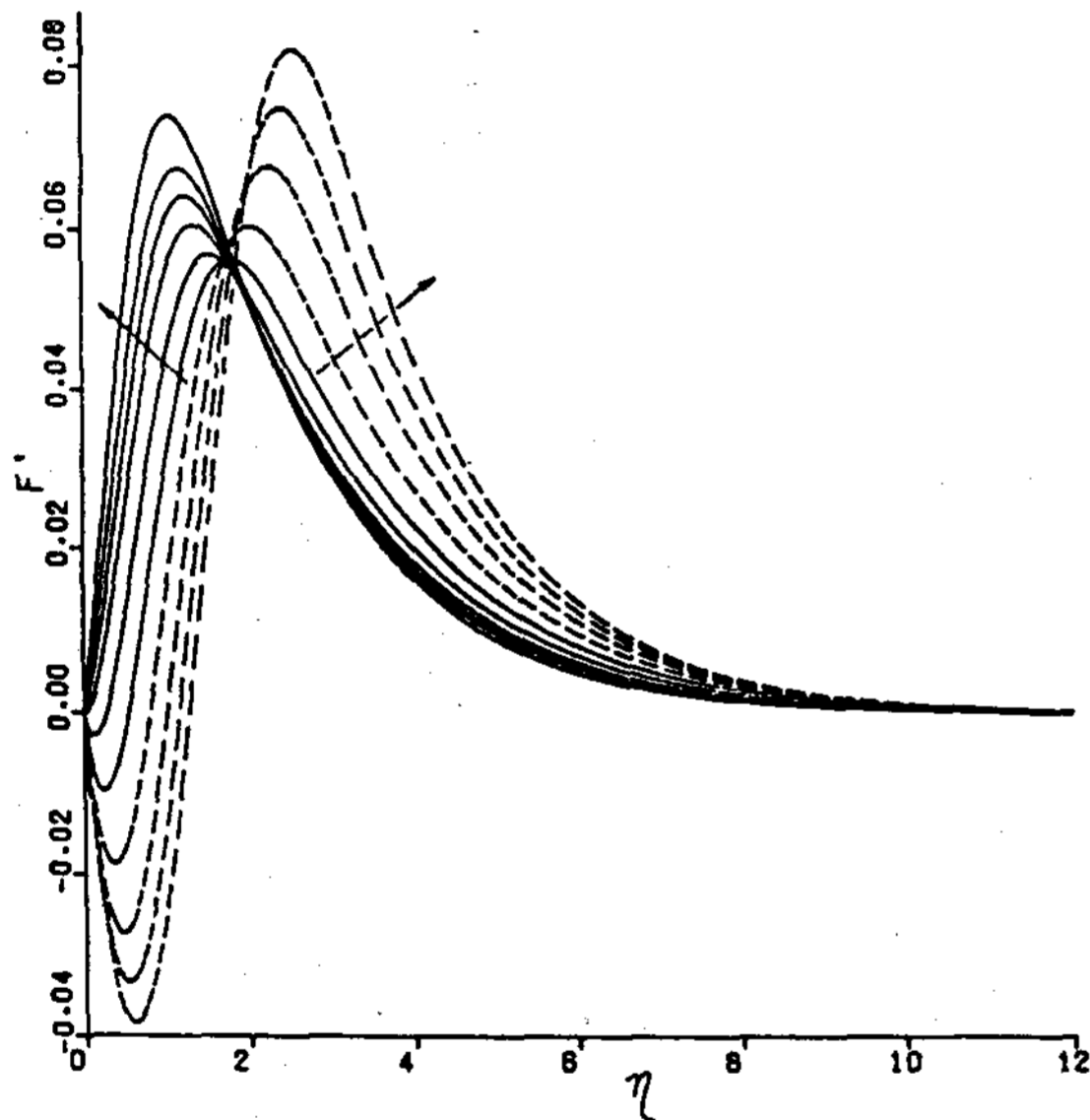


Fig. 2 Dimensionless Vertical Velocity Component  $f'_b$  for More Vigorous Flows. For the Upper Solutions (—), the Arrow Indicates Increasing  $R$  for  $R=0.2918, 0.30, 0.32, 0.34, 0.36,$  and  $0.40$ . for the Lower Solutions (-----), the Arrow Indicates Increasing  $R$  for  $R=0.30, 0.32, 0.34,$  and  $0.36$

200의 값을 취해야만 한다. 그러므로 이러한 기본유동에 대한 수동력학적 안정성 방정식의 수치결과는 거의 없고, 매우 단순한 경우에만 계산이 수행 되었다.

즉, Qureshi<sup>11)</sup>는 주위 물의 온도가 최대 밀도 온도와 같을 때 (즉,  $R=0$ ), Higgins<sup>14)</sup>는 최대 밀도 변수  $R$ 의 값이  $R=0.4$ 인 경우에 Hieber<sup>10)</sup>의 simple shooting 계산방법으로 안정계산결과를 얻었다.

기존 대부분의 안정 계산 결과들은 Simple shooting 방법으로 求하여졌다. 대표적인 것은 Hieber<sup>10)</sup>의 계산 방법으로서 충분히 큰 값의  $\eta_e$ 를 설정하고,  $\eta$ 가  $\eta_e$ 보다 큰 값에서는 안정성 방정식 및  $\eta=\infty$ 에서의 경계조건들을 단순 감소함수로서 만족시키는 일련의 점근해(asymptotic solutions)들을 구하여,  $\eta=\eta_e$ 에서  $\eta=0$ 으로 각각 적분을 한 後 중첩(superposition)을 하여  $\eta=0$ 에서의 경계조건들을 만족하는 고유값(eigenvalue)을 구한 것이다. 따라서 적분 및 중첩에서 오는 誤差 축적으로 인하여, 이 방법으로 구하여진 고유값은 근사치(approximation)이다. 만약 이 방법을 기본유동이 non-Boussinesq 모델인 경우에 적용한다면 계산이 不可能할 만큼 적분 구간이 길어지므로 사용할 수 없다.

本 論文에서는 이러한 문제를 극복하고, 두점 경계치 문제로서 수동력학적 안정성 방정식을 만족시키는 고유벡터, 고유값을 구하기 위해 새로운 계산 방법인 orthogonal collocation 方法을 제시하였다.

기존 Nachtsheim<sup>8)</sup>, Qureshi<sup>11)</sup>, Higgins<sup>14)</sup>의 계산결과들과 Hieber의 simple shooting 및 새로운 orthogonal collocation 방법들을 사용하여 求하여진 수치 결과들을 상호·비교·검토하였다. 이때

사용한 수동력학적 안정성 방정식은 Boussinesq 또는 non-Boussinesq 경우에도 적용시키기 위해 Hwang<sup>15)</sup>의 안정성 방정식을 사용했다. 또한 simple shooting 方法을 위해서는 Deuflhard와 Bader<sup>16)</sup>가 작성한 컴퓨터 코드 BOUNDS를 사용하였으며, orthogonal collocation 方法을 위해서는 Ascher<sup>17)</sup> 등에 의해 작성된 코드 COLSYS를 이용하였다.

2. 지배 방정식

순수한 차거운 물 속에 수직 등은 벽이 잠겨 있을 때, 수직 등은 벽 주위에서 부력에 의하여 야기되는 2차원 층류 자연대류를 기본 유동 (base flow)으로 할 때, 기본 유동에 대한 경계층 방정식을 상사변환 (similarity transformation)을 하여 표현을 하면<sup>13,15)</sup> 다음과 같다.

$$f_b''' + \delta [ |\theta_b - R|^q - |R|^q ] - 2(f_b')^2 + 3f_b f_b'' = 0 \quad \dots\dots\dots (1.a)$$

$$\theta_b'' + 3Pr f_b \theta_b' = 0 \quad \dots\dots\dots (1.b)$$

경계조건은

$$f_b(0) = f_b'(0) = f_b'(\infty) = 1 - \theta_b(0) = \theta_b(\infty) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

여기서 상향유동에 대하여  $\delta = +1$ , 하향유동에 대하여는  $\delta = -1$  이다. Pr은 Prandtl 수이며, R은 최대밀도변수 (density extremum parameter) 이고 Gebhart와 Mollendorf<sup>12)</sup>에 의하여 다음과 같이 정의되었다.

$$R = \frac{T_m - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

또한 q는 Gebhart-Mollendorf의 온도

와 밀도의 관계식<sup>12)</sup>에 사용되는 상수이다.

Hwang<sup>15)</sup>이 압력 교란항을 소거하지 않고 적절히 부력항을 취급하여 표현한 안정방정식 (즉 Orr-Sommerfeld 방정식)은 다음과 같다.

$$(f_b' - C) \phi' - f_b'' \phi = -H + \frac{1}{i\alpha G} (\phi''' - \alpha^2 \phi' + Z_0 S) \quad \dots\dots\dots (3.a)$$

여기서

$$Z_0 = \delta \frac{(\theta_b - R)}{|\theta_b - R|} \cdot q \cdot |\theta_b - R|^{q-1},$$

$$(f_b' - C) \phi = -\frac{H'}{\alpha^2} + \frac{1}{i\alpha G} (\phi'' - \alpha^2 \phi), \quad \dots\dots\dots (3.b)$$

$$(f_b' - C) S - \theta_b' \phi = \frac{1}{i\alpha G Pr} (S'' - \alpha^2 S), \quad \dots\dots\dots (3.c)$$

여기서  $C = \beta/\alpha$ 이다.

경계조건은

$$\phi(0) = \phi'(0) = S(0) = \phi'(\infty) = S(\infty) = H(\infty) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

열용량이 큰 등은 표면에서 ( $\eta=0$ ) 온도 교란은 0이므로  $S(0)=0$ , 벽에서 먼 곳 ( $\eta \rightarrow \infty$ )은 교란은 0이므로  $S(\infty)=0$ 이다. 벽 표면에서 수직 및 수평방향의 속도 교란은 0이므로  $\phi(0) = \phi'(0)$ 이고, 벽에서 먼 곳에서 수직방향의 속도 교란은 0이므로  $\phi'(\infty) = 0$ 이다.

여기서 압력에 대한 경계조건  $H(\infty) = 0$ 가 사용된 것은  $\eta = \eta_\infty$ 에서 압력교란이 존재하지 않는다는 가정이다.

위의 문제 식 (3.a) - (3.c)는 고유값 (eigenvalue)  $\alpha, \beta$ 를 求하는 문제로서, 제차의 선형 6차 복소수 상미분 방정식 (complex-valued, sixth-order, linear system of homogeneous differential

equations)이며 두점 경계치 문제 (two-point-boundary-value problem) 식 (4)로 다루어져야한다.

온도와 밀도의 관계에서 비선형적인 경우(즉 non-Boussinesq 모델)에 해당되는 기본 유동식 (1.a) - (1.c)과 안정성 방정식 (3.a) - (3.c)은  $R=0$ ,  $q=1$ ,  $\delta=1$ 로 놓으면, Boussinesq 모델의 경우(즉, 온도와 밀도의 관계가 선형적인 경우)에 적용할 수 있다. 이 때 식 (3.a) - (3.b)에서 압력교란항  $H$ 를 소거하면 다음과 같이 Plapp<sup>5)</sup>의 안정성 방정식과 동일하다.

$$(f'_b - C)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - f_b''' \phi = \frac{1}{i \alpha G} (\phi'''' - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi + S') \dots \dots \dots (5.a)$$

$$(f'_b - C) S - \theta'_b \phi = \frac{1}{i \alpha G Pr} (S'' - \alpha^2 S) \dots \dots \dots (5.b)$$

경계조건은  $H(\infty)$  대신  $\phi(\infty)$ 가 사용되어 다음과 같다.

$$\phi'(0) = \phi(0) = S(0) = \phi'(\infty) = \phi(\infty) = S(\infty) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

본 논문에서는 유동의 Boussinesq 및 non-Boussinesq 모델인 경우들에 대한 안정성 방정식의 수치해석을 위하여 식 (1)~(4)가 사용되었다.

**3. 수치해석 방법**

Boussinesq 모델이 적용되는 유동의 경우에는 Prandtl 수가 6.7일 때, non-Boussinesq 모델의 경우에는 최대밀도변수  $R$ 의 값이 0.4일 때, 안정성 방정식 (3)-(4)의 數値解를 각각 구하기 위하여 두가지 방법, 즉 simple shooting 방법과 orthogonal colloc-

ation 방법을 사용하였다. 또한 최대밀도변수  $R$ 의 값이 0인 경우에는 orthogonal collocation 方法을 사용하였다. Simple shooting 방법으로는 기본유동의  $\eta_\infty$ (무한대의 가정치)가 증가함에 따라 적분이 불가능하거나, 또는 적분오차의 누적과 이에 수반되는 중첩할 때의 誤差 등으로 수치해석 상의 난점들이 야기된다. 本 研究에서는 컴퓨터 코드 BOUNDS와 COLSYS를 이용하였다.

**3.1 simple shooting 방법**

본 연구에서는 Hiber<sup>10)</sup>의 simple shooting 방법이 사용되었다. 이 방법을 이용하기 위하여 식 (3)에 대한  $\eta$ 가  $\eta_\infty$ 에 접근할 때의 漸近解(asymptotic solution)는 다음과 같다.

i) 비점성해(inviscid solution)

$$\begin{aligned} \phi_1 &= e^{-\alpha \eta} \\ S_1 &= 0 \\ H_1 &= -\beta e^{-\alpha \eta} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

ii) 온도와 속도가 결합되지 않은 점성해(uncoupled viscous solution)

$$\begin{aligned} \phi_2 &= e^{-\alpha_2 \eta} \\ S_2 &= 0 \\ H_2 &= 0 \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

iii) 온도항과 속도항이 결합된 점성해(viscous coupled solution)

$$\begin{aligned} \phi_3 &= -\frac{\alpha_3 Z}{(\alpha C G)^2 Pr (Pr-1)} e^{-\alpha_3 \eta} \\ S_3 &= e^{-\alpha_3 \eta} \\ H_3 &= -\frac{Z}{C Pr G^2} e^{-\alpha_3 \eta} \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

여기서

$$C = \beta / \alpha,$$

$$\alpha_2^2 = \alpha^2 - i\alpha CG,$$

$$\alpha_3^2 = \alpha^2 - i\alpha PrCG,$$

$$z = -\delta \cdot \frac{R}{|R|} \cdot q \cdot |R|^{q-1} \cdot q^{-1}$$

단, Boussinesq 모델의 경우에는

$$z = 1$$

경계조건 式 (4)의  $\eta = \infty$ 에서 만족되어야 할 조건들은 단순 감소 함수인 漸近解, 式 (7)-(9)에 의하여 만족된다. 그러나  $\eta = 0$ 에서는 重疊法 (superposition principles)에 의한

$$\vec{\phi} = C_1 \vec{\phi}_1 + C_2 \vec{\phi}_2 + C_3 \vec{\phi}_3$$

가 경계조건들을 만족 시키는 固有值 (eigenvalue) 들을 구하여야 한다. 여기서

$C_1 = 1 + i$ 로 놓고, 상수  $C_2, C_3$ 를 결정하기 위해 경계조건  $\phi(0) = S(0) = 0$ 를 사용하였다. 각각의 固有벡터 (eigenvector)는  $\eta = \eta_\infty$  (즉, 무한대의 가정치)에서  $\eta = 0$ 로 각각 적분된 後에 疊해졌다. 이렇게 重첩된 함수는 또 다른 경계조건  $\phi'(0) = 0$ 를 만족시키는 固有值  $\alpha, \beta$ 를 구해야만 한다.

중립 안정 (neutral stability)에 관한 문제는 固有值의 허수부  $\alpha_1, \beta_1$ 를 0으로 놓고, 안정성 방정식과 경계조건을 만족하는 실수부  $\alpha_R, \beta_R$ 을 求하는 문제이다. 수정된 Grashof 수  $G$ 의 값을 고정시키고  $\alpha_R$ 과  $\beta_R$ 의 값을 가정한 後, 적절한  $\eta_\infty$ 에서 式 (7)-(9)를 사용하여 초기값 적분 문제로서 필요한 값들을 정의한다. 그 다음  $\eta_\infty$ 에서 안쪽으로  $\eta = 0$ 까지 固有벡터  $(\phi_1, S_1, H_1), (\phi_2, S_2, H_2), (\phi_3, S_3, H_3)$ 를 동시 또는 별도로 각각 적분하고, 앞에서 언급한 바와 같이  $\eta = 0$ 에서 重첩한  $\phi'(0)$ 의 값이 충분히 작아서 오차 한계  $|\phi'(0)| \leq 10^{-5}$ 를 만족하는가를 확인한다. 만약 이 조건을 만족시키지 않을 때에

는 새로운 값의  $\alpha_R, \beta_R$ 을 Newton의 수정 방법으로 가정하고 반복계산을 수행하여 수렴하는  $\alpha_R, \beta_R$ 을 구하였다.

(경우에 따라서는  $\beta_R$ 의 값을 고정시키고  $G$  값을 구하는 방법을 사용하였다.)

위의 계산과정中 초기값 적분문제에서 편의상 기본유동 방정식과 안정성 방정식을 결합한다면 17개의 1차 미분방정식이 각각의 固有벡터 구성요소를 구하기 위하여 적분되어야 한다. 만일, 기본유동을 계산한 後 B-Spline로 저장하여 기본유동의 값들을 단순한  $\alpha_R$ 을 가정하여 새로운  $\alpha_R, G$  값 계수로서 취급하면  $(\phi_i, S_i, H_i)$  ( $i = 1, 3$ )를 각각 적분時 12개의 1차 미분방정식을 적분해야 한다. 이러한 적분 문제를 취급하기 위하여 BOUNDS의 Runge-Kutta-Fehlberg integration routine (MTH=2)와 Bulirsch-Stoer rational extrapolation routine (MTH=1)이 사용되었다. 또한 기본유동을 B-spline으로 처리하기 위하여 COLSYS가 이용되었다.

무한대의 근사치  $\eta_\infty$ 의 대표적인 값은  $\eta_\infty = 15$ 로 취하였으나  $\eta_\infty$ 의 변화에 따른 적분오차의 누적으로 因하여 계산된 결과는 예민하게 변하였다. Runge-Kutta-Fehlberg 방법 사용시 오차 한계 (tolerance)를  $10^{-8}$ 까지 작게 잡고, Step의 크기는 Variable Step Size로 하였으나 그 누적오차에 따른 결과치는 부정확하여  $\eta = 0$ 에서의 경계조건을 만족하기는 거의 어려웠다. 이 문제를 해결하기 위하여 보다 정확한 Bulirsch-stoer 외삽법을 사용하여 현저하게 개선하였다. (즉, Runge-Kutta-Fehlberg 사용시 보다  $10^{-3}$  또는  $10^{-4}$  이상의 정확한 결과를 갖는다) 그러나 이 외삽법은 고유함수가 급격하게 변동할 경우, 또는  $\eta_\infty$ 의 값이 매우 큰 경우에는 사용이 불가능하다.

3.2 Orthogonal Collocation 방법

Simple shooting 방법에서 固有벡터  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ 의 적분과 중첩에서 발생하는 초기값 적분 문제의 누적오차 및 중첩오차의 부정확을 피하기 위해 orthogonal collocation 방법이 사용된다. 본 연구에서는 orthogonal collocation 방법의 컴퓨터 코드 COLSYS를 이용했다. 이 방법의 사용은 계산 시간을 단축시키고 계산 정확도를 높인다. (예를 들면, simple shooting 에서 Runge-Kutta-Fehlberg 방법사용시 정확도가  $O(10^{-2})$ 일 때, COLSYS에서는  $O(10^{-4})$  이하이다) 더욱 중요한 것은 유동이 non-Boussinesq 모델인 경우 최대밀도함수  $R$ 이  $0 \leq R \leq 0.5$  범위에서 simple shooting 방법의 사용이 거의 불가능하지만 orthogonal collocation 방법으로는 수동력학적 안정 계산이 가능하다는 사실이다.

경계조건 식 (4)를 실수부와 허수부로 분리하면,

$$\begin{aligned} \phi_R(0) = \phi_I(0) = \phi'_R(0) = \phi'_I(0) = S_R(0) \\ = S_I(0) = 0, \\ \phi'_R(\eta_\infty) = \phi'_I(\eta_\infty) = S_R(\eta_\infty) = S_I(\eta_\infty) = \\ H_R(\eta_\infty) = H_I(\eta_\infty) = 0. \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

직접적으로 식 (10)의 경계조건을 만족시키기 어려우므로 無用解 (trivial solution)를 피하고 크기를 조절하여 固有벡터의 최대값이  $O(1)$ 이 되도록 아래와 같이 경계조건을 약간 수정한 後 simple shooting 방법에서와 마찬가지로 Newton의 수정방법을 이용하여  $\phi'_R(0) + \phi'_I(0) = 0$ 를 만족하는 固有值  $\alpha, \beta$ 를 구하였다.

$$\begin{aligned} \phi_R(0) = \phi_I(0) = S_R(0) = S_I(0) = 0, \phi_R(\eta_\infty) \\ = K, \phi_I(\eta_\infty) = \phi'_R(\eta_\infty) = \phi'_I(\eta_\infty) = S_R(\eta_\infty) = \\ S_I(\eta_\infty) = H_R(\eta_\infty) = H_I(\eta_\infty) = 0 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

여기서  $K$ 는  $10^{-9} \leq K \leq 10^{-5}$  사이의 0이 아닌 값으로 정한다. 만일  $K$ 값이 약간 크면 고유벡터의 값들이 너무 커져서 발산하게 되므로  $\eta_\infty$ 를 적절히 늘리면서 계산한다.

식 (11)에서  $\phi_R(\eta_\infty) = K$  대신에  $S'_R(0)$ 가 0이 아닌  $10^{-3} \leq K \leq 10^{-1}$  범위의 값을 취하여 고유벡터를 scaling 할 수 있다.

위와 같은 방법으로 얻어진 解가 원래의 경계조건 (10)을 만족하는지를 확인하기 위해 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \text{Min. } & \left( \frac{|\phi'_R(0)|}{|\phi'_R(\eta)|}, \frac{|\phi'_I(0)|}{|\phi'_I(\eta)|} \right) \leq 10^{-4}, \\ & 0 < \eta < \eta_\infty \\ \text{Max. } & \left( \frac{|\phi'_R(0)|}{M}, \frac{|\phi'_I(0)|}{M} \right) \leq 10^{-7} \\ & 0 < \eta < \eta_\infty \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

(여기에서  $M$ 은 고유벡터의 최대값이다.)

이때 기본유동의 解는 B-spline으로 저장되었다가 계산이 진행되는 중에 계수로 사용되었고, 일단 수렴 (Converged) 한 중립 안정 (neutral stability)의 解는 연속적인 계산을 수행할 수 있도록 B-spline에 저장시켰다. Simple shooting 방법은 Collocation 방법을 이용하는 계산의 시작에 필요한 고유벡터의 초기값들을 가정하기 위하여 사용되었다.

이러한 방법으로 구하여진 解, 즉 고유치  $\alpha_R, \beta_R$  및 고유벡터를 다음과 같은 문제의 초기가정치로서 사용하면 높은 정밀도의 수치해를 얻을 수 있다.

방정식  $\alpha'_R = 0, \beta'_R = 0$ 을 식(3)에 추가하고 새로운 두개의 경계조건  $\phi_R(\eta_\infty), S'_R(0)$ 를 0이 아닌 값으로 취한다. 따라서 수정한 경계조건은

$$\begin{aligned} \phi_R(0) = \phi_I(0) = \phi'_R(0) = \phi'_I(0) = S_R(0) = \\ S_I(0) = 0, \phi'_R(\eta_\infty) = \phi'_I(\eta_\infty) = S_R(\eta_\infty) = \end{aligned}$$

$$S_1(\eta_\infty) = H_R(\eta_\infty) = H_1(\eta_\infty) = 0, \phi_R(\eta_\infty) = K_1 > 0, S_R'(0) = K_2 > 0 \dots\dots\dots (13)$$

여기서  $K_1, K_2$ 의 값은 식 (11)을 사용하여 식 (12)의 조건을 만족시키는 解의 값에서 취하면 된다. 이러한 방법으로 구하여진 解는 안정성 방정식 문제 식 (3)-(4)의 엄밀해(exact solution)이라고 간주할 수 있다. 안정성 방정식의 대부분의 계산은 subinterval 당 4 Collocation point와 16 또는 18 Subinterval로써 COLSYS를 사용하여 식 (11)을 이용한 방법으로 수행되었다. 계산된 값의 정확도를 확인하기 위하여 Subinterval의 수를 32 또는 36개로 늘려서 계산하고, 식 (13)을 이용한 방법을 사용하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 계산결과와 고찰

앞 절에서 언급한 simple shooting 및 orthogonal collocation 方法들을 실제 안정성 문제들에 적용하였다.

유동이 Boussinesq 모델인 경우 ( $Pr=6.7, \nu=1$ )에 대하여 안정성 계산을 하기 위하여 Simple shooting 방법을 적용하여 보았다. 이 때 3개의 독립된 固有벡터( $\phi_i, S_i, H_i$ ), ( $i=1, 2, 3$ )가 각각 또는 同時에  $\eta=\eta_\infty$ 에서  $\eta=0$ 로 적분되었다. Runge-Kutta-Fehlberg 방법을 초기값 적분을 위해 사용할 때,  $\eta_\infty$ 가 증가되면 적분구간이 길어짐에 따라 적분오차의 누적과 그 파급이 解의 정밀도에 지대한 영향을 끼침을 다음 결과들에서 확인할 수 있다.

1). 固有벡터( $\phi_i, S_i, H_i$ )를 各各 別途로 적분하되 ( $\phi_i, S_i, H_i$ )는 漸近解의 꼬리를 (asymptotic tails)가지고 있고, 이 적분된 ( $\phi_i, S_i, H_i$ ) ( $i=1, 2, 3$ )을 重疊하여  $\eta=0$ 에서 경계조건을 만족하는 固有值들을

얻었다. 기본 유동은  $\eta_\infty = 70$ 으로 취하여 求하였다. 그러나 안정성 방정식과 기본유동 방정식을 결합한 형태로서 초기치 적분을 할 때  $\eta = \eta_e$ 에서 부터  $\eta=0$ 으로 적분하였다. 이때 결합된 방정식의 시스템은 17개의 1차 상미분 방정식(즉, 12개는 안정성 방정식에서, 5개는 기본유동 방정식에서 연유함)이고, BOUNDS의 외삽법(extrapolation integrator, MTH=1)을 사용하여 同時에 적분하였다.  $G=34, Pr=6.7, \eta_\infty=70$ 에서 求하여진 결과는 다음 Table 1과 같다.

Table 1 Results by approach I for  $G=34, Pr=6.7, \eta_\infty = 70$

$\alpha_R$	$\alpha_1$	$\beta$	$C_R$	$\eta_e$
0.47578	$1 \times 10^{-8}$	0.073149	0.15375	5.0
0.47590	$1 \times 10^{-7}$	0.073165	0.15374	8.125
0.47592	$1 \times 10^{-6}$	0.073166	0.15374	15.0

2). 안정성 방정식과 기본유동 방정식이 결합되고, 고유벡터( $\phi_i, S_i, H_i$ ) ( $i=1, 2, 3$ )이 동시에  $\eta = \eta_\infty$ 에서  $\eta=0$ 까지 BOUNDS의 MTH=2(Runge-kutta-Fehlberg integration routine)로 적분되었다. (이때 고유벡터에서 漸近解의 꼬리는 사용되지 않는다) 결합된 방정식의 시스템은 41개의 1차 미분방정식이다. (즉, 3개의 고유벡터에서 36개의 방정식되고, 기본유동에서 5개의 방정식이 나옴)  $G=34, Pr=6.7$ 에서의 求하여진 계산 결과는 Table 2와 같다.

Table 2 Results by approach II for  $G=34, Pr=6.7$

$\alpha_R$	$\alpha_1$	$\beta$	$C_R$	$\eta_\infty = \eta_e$
0.46583	0.0	0.071465	0.15341	0.0
0.46268	0.0	0.071549	0.15464	10.0
0.43060	0.0	0.067600	0.15700	15.0



동일한 G와 Pr의 값에서 Nachtsheim<sup>8)</sup>의 결과는  $\alpha_R = 0.45$ ,  $C_R = 0.1556$  ( $\beta = 0.07002$ )이다. Nachtsheim의 결과와 위의 2)의 결과는 서로 잘 일치한다.

그러나  $\eta_\infty = 15.0$ 의 수치와 1)의  $\eta_e = 15.0$ 에서의 수치결과와 비교할 때, 2)의 결과는 적분오차의 파급으로 인하여 정밀도가 매우 낮은 것을 알 수 있다.

3) 기본유동의 解는 COLSYS를 사용하여 求한 後, B-Spline으로 저장하였다. 안정성 방정식의 계수로서 사용되는 기본유동의 값은 저장된 B-Spline을 利用하여 공급된다. 그러므로  $(\phi_i, S_i, H_i)$  ( $i=1,2,3$ )를 同時に 적분할 때, 36개의 1차 미분방정식을  $\eta_\infty$ 에서 부터 안쪽으로 적분한다. 적분시 BOUNDS의 MTH=2를 사용했다.  $G=34$ ,  $Pr=6.7$ 에서의 계산 결과는 다음과 같다.

$$\alpha_R = 0.47590, \alpha_I = 0.0$$

$$\beta = 0.073164, C_R = 0.15374, \eta_\infty = 15.0$$

4) Othogonal Collocation方法을 이용하여 두 점 경계치 문제로서 안정성 방정식의 解를 구하였다. 이때 중첩법은 사용될 필요 없이 오직 12개의 1차 미분방정식만이 사용되었을 뿐이다. COLSYS의 사용을 위해 필요한 固有值들 및 固有벡터의 가정치인 1)의 解를 利用하였다. 그러나  $\eta_\infty$ 의 값은 23.2로 연장되었다.  $G=34$ ,  $Pr=6.7$ 에서의 결과는

$$\alpha_R = 0.47587, \alpha_I = 1 \times 10^{-8},$$

$$\beta = 0.073161, C_R = 0.15374, \eta_\infty = 23.2$$

앞에서의 1~4)의 결과들을 확인하기 위해 중첩된 고유벡터의  $\eta=0$ 에서의 값을 사용하여  $\eta_\infty$ 까지 바깥쪽으로 적분하거나 또는  $\eta=\eta_\infty$ 에서의 고유벡터의 값을 초기값으로 사용하여  $\eta_\infty$ 까지 안쪽방향으로 적분하여 그 값들이 어느 정도 정확한가를 점검하였다. 즉, 3)의 방법을 써서 얻은 결과( $\alpha_R=0.47592$ ,  $\beta=0.731660$ ,  $\alpha_I=1.0 \times 10^{-8}$ ,  $\eta_\infty=13.4108$ ,  $Pr=6.7$ ,  $G=34$ )에 대한  $\eta=\eta_\infty$ 에서의 중첩된 고유벡터 값을  $\eta=0$ 까지 적분하였다. 그 결과는 다음 Table 3과 같다.

따라서 MTH=2에 의한 simple shooting으로 두점 경계치 문제에 적용시 가장 부정확한 결과를 가진다. 가장 정확한 수치방법은 1)과 4)의 방법이다.

2)의 방법으로  $\eta_\infty = \eta_e = 10$ 에서,  $Pr=6.7$ 일때 구한 안정성 계산 결과는 Table 4에 수록되어 있다.

또한 1)의 방법으로  $Pr=6.7$ 일 때  $\eta_e = 8.125$ ,  $\eta_\infty = 70$ 에서 구한 안정성 계산결과는 Table 5에 있다.

대표적인 고유벡터 요소들의 형태는 Fig.3에 그려져 있다.

Simple shooting인 1)의 방법(BOUNDS의 MTH=1)은 적분구간이 너무 길지 않고, 고유 벡터가 급격히 변하지 않거나 진동

Table 3 Checked results by initial value integration

$\sum_{i=1}^3 C_i \phi_i$		No superposition but the same initial data at $\eta_\infty$ as for $\sum_{i=1}^3 C_i \phi_i$	
		MTH=1	MTH=2
$\phi_R'(0)$	$1.25868 \times 10^{-6}$	$1.58995 \times 10^{-6}$	$8.70104 \times 10^{-6}$
$\phi_I'(0)$	$7.07293 \times 10^{-6}$	$6.73359 \times 10^{-6}$	$8.607325 \times 10^{-4}$

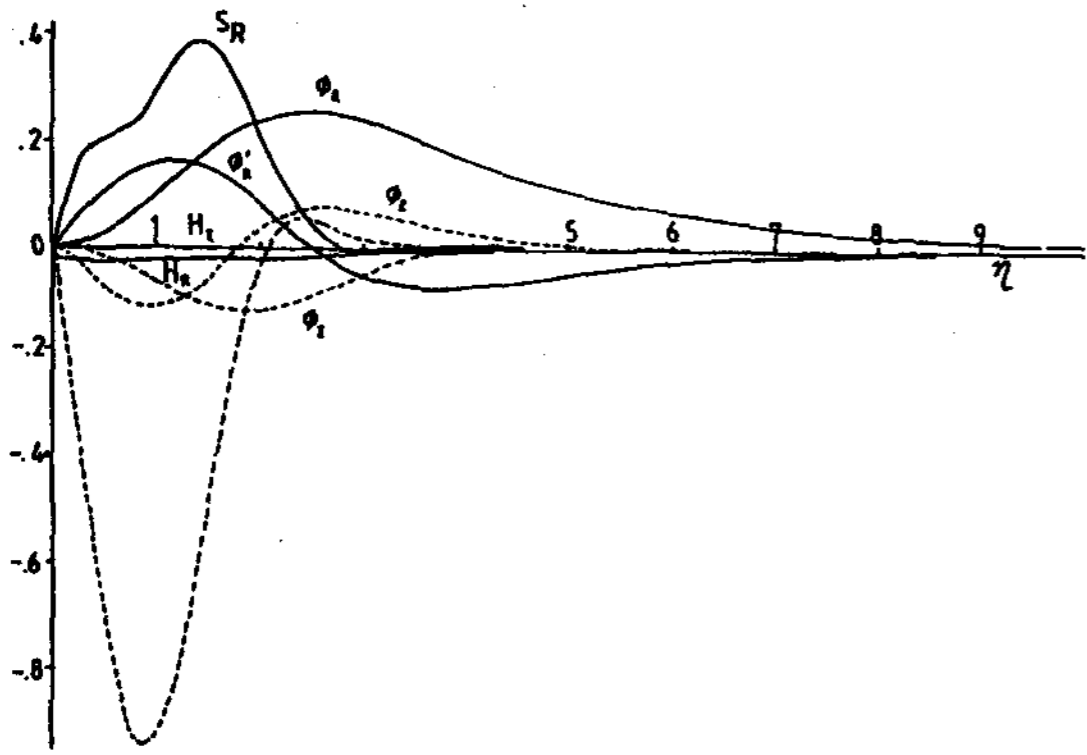


Fig. 3 Eigenvector Components vs.  $\eta$  for  $\alpha_R = 0.4543$ ,  $C_R = 0.1553$  ( $\beta = 0.07053$ ),  $G = 33.8$ , and  $Pr = 6.7$

Table 4 Neutral stability results obtained by the approach of 2) for  $\eta_\infty = \eta_e = 10.0$  at  $Pr = 6.7$

$\alpha_R$	$\alpha_1$	$\beta$	$C_r$	G
0.89775	0.0	0.12056	0.13429	55
0.83239	0.0	0.11346	0.13630	50
0.75332	0.0	0.10478	0.13909	45
0.46268	0.0	0.071549	0.15464	(upper solution) 34
0.45425	0.0	0.070536	0.15528	33.8
0.43282	0.0	0.067922	0.15693	33.5
0.28932	0.0	0.049375	0.17066	(lower solution) 34.0
0.078759	0.0	0.016060	0.2039	75.0
0.056732	0.0	0.011850	0.2089	100.0

Table 5 Neutral stability results obtained by the approach of 1) for  $Pr = 6.7$ ,  $\eta_e = 8.125$ , and  $\eta_\infty = 70$

$\alpha_R$	$\alpha_1$	$\beta$	$C_r$	G
0.47590	$10^{-7}$	0.073165	0.15374	34.0
0.46547	$10^{-7}$	0.071913	0.15450	33.8
0.46554	$10^{-9}$	0.071922	0.15450	33.8
0.46542	$-10^{-9}$	0.071908	0.15450	33.8
0.28262	$10^{-7}$	0.048483	0.17155	34.0

하지 않는 경우에는 매우 정확하다. 그러나 찬물속에 잠겨 있는 수직벽면 주위에 대한 유동 문제는 상대적으로 두꺼운 경계층으로 인하여 큰 값의  $\eta_\infty$ 를 불가피하게 취해야만 한다. 이러한 경우에는 이 방법의 적용이 불가능하다. 유동이 non-Boussinesq 모델의 경우에는  $R = 0.4$  일 때만 일부의 안정 계산에만 가능하다.

최대밀도함수  $R = 0.40$ 에서  $\beta$ 의 값을  $\beta = 0.331734$ 로 고정하고  $\eta_\infty = 20$ ,  $\eta_e = 10$ 으로 취하였을 때 방법 1)을 사용하여 다음의 ㉠의 수치결과를 얻었으며, COLSYS의 방법 4)를 이용  $\eta_\infty = 60$ 에서 ㉡의 결과를 얻었다.

㉠;  $\alpha_R = 0.416775$ ,  $\beta = 0.0331734$ ,  
 $G = 32.0$

㉡;  $\alpha_R = 0.417067$ ,  $\beta = 0.0331734$ ,  
 $G = 32.039$

이값에서의 고유벡터는 Fig.4에 그려져 있다.

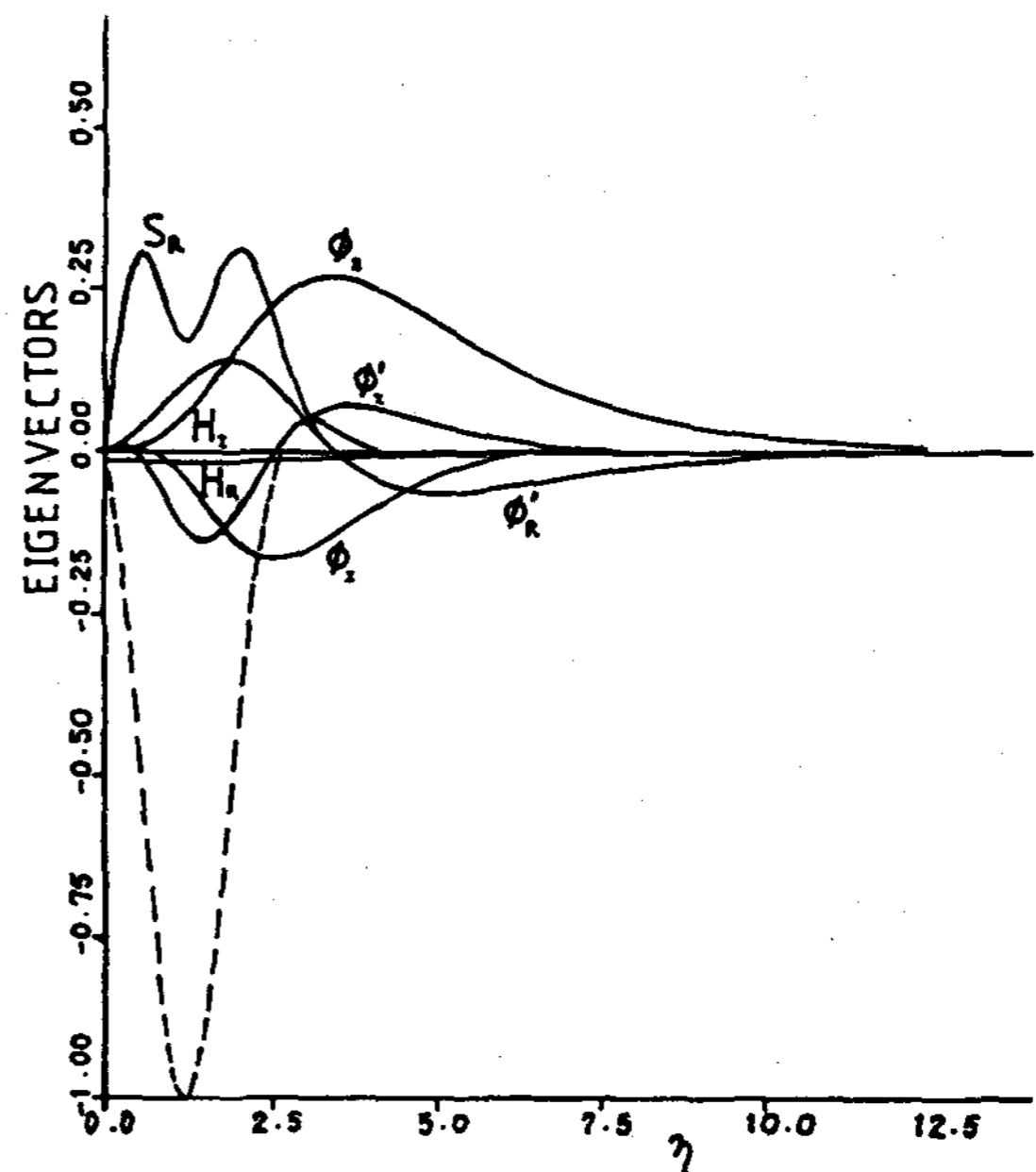


Fig. 4 Plots of Eigenvector Components vs.  $\eta$  Corresponding to the Upper Solutions at  $R = 0.40$ ,  $Pr = 11.6$ ,  $q = 1,894816$

4.2 기존수치결과와 비교

본 논문의 계산결과와 기존 Nachtsheim<sup>8)</sup>, Qureshi<sup>11)</sup>, Higgins<sup>14)</sup>의 결과를 비교하기 위해 Fig.5, Fig.6, Fig.7에 각각 계산한 값들을 표시하였다. 본 계산결과는 Nachtsheim, Qureshi, Higgins의 기존 결과와 도표상에서 잘 일치한다. 그러나 Qureshi와 Higgins의 수치 결과들, 즉 고유치나 고유벡터의 값이 알려져 있지 않으므로 수치상 직접 비교는 불가능하다. 固有値에서 약간의 차이는 固有벡터에서 큰 차이가 나기 때문이다. 물론 그들이 사용한 수치해석방법은 simple shooting이었으나, 본 논문에서의 simple shooting 보다는 매우 부정확한 방법이었다. 오직 비교가 가능한 수치는 Nachtsheim의 결과뿐이었다. Nachtsheim은 72개의 일

차 미분방정식을 사용하여  $\eta = 0$ 에서  $\eta_{\infty}$  쪽으로 적분을 하는 simple shooting 방법을 사용하였음에도 불구하고 그의 안정성 계산결과는 본 논문의 결과와 잘 일치하였다.

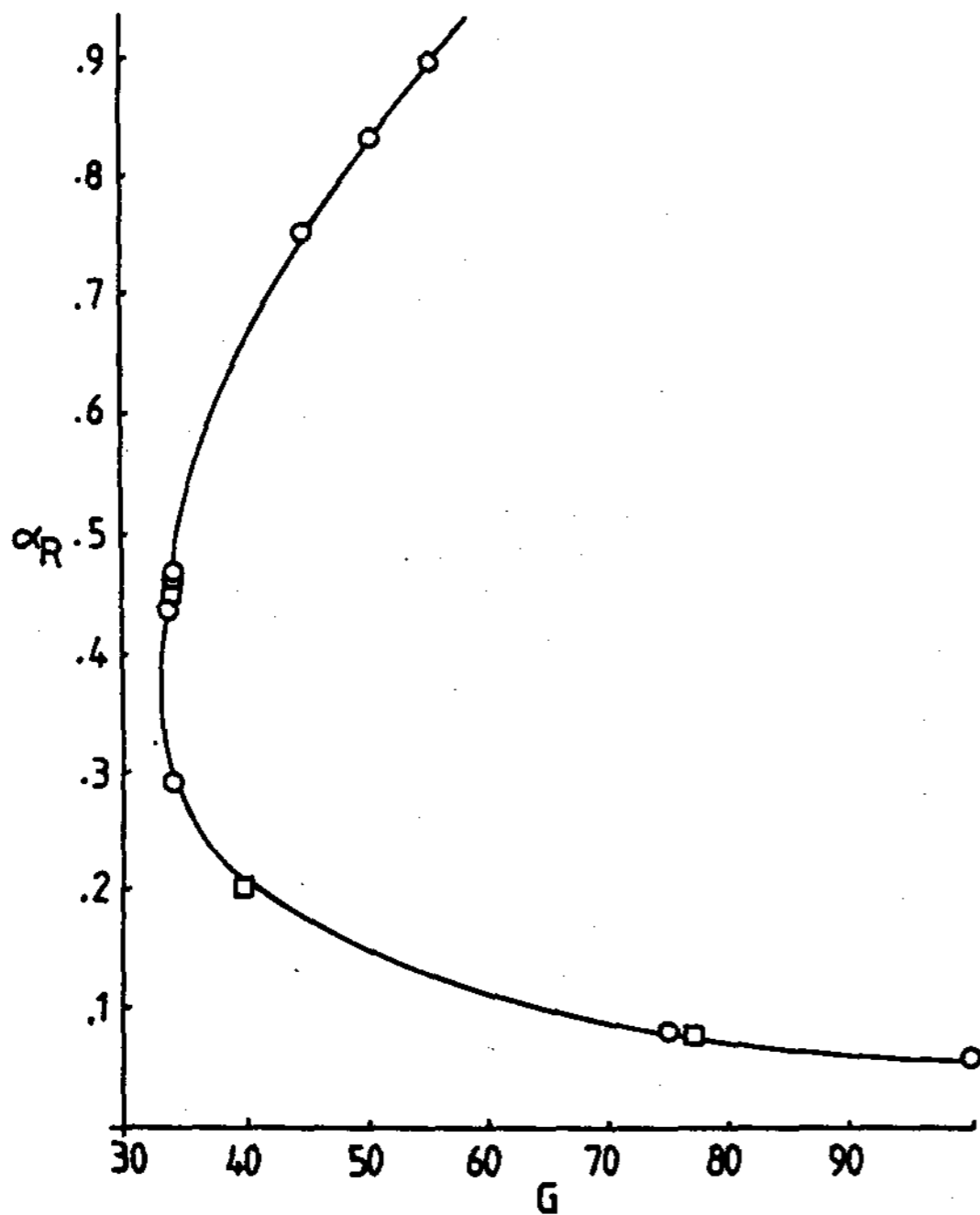


Fig. 5 Neutral Stability Curve of  $\alpha_R$  vs.  $G$  for  $Pr=6.7$  Showing Nachtsheim's Results<sup>8)</sup> ( $\square$ ) and the Present Results ( $\circ$ )

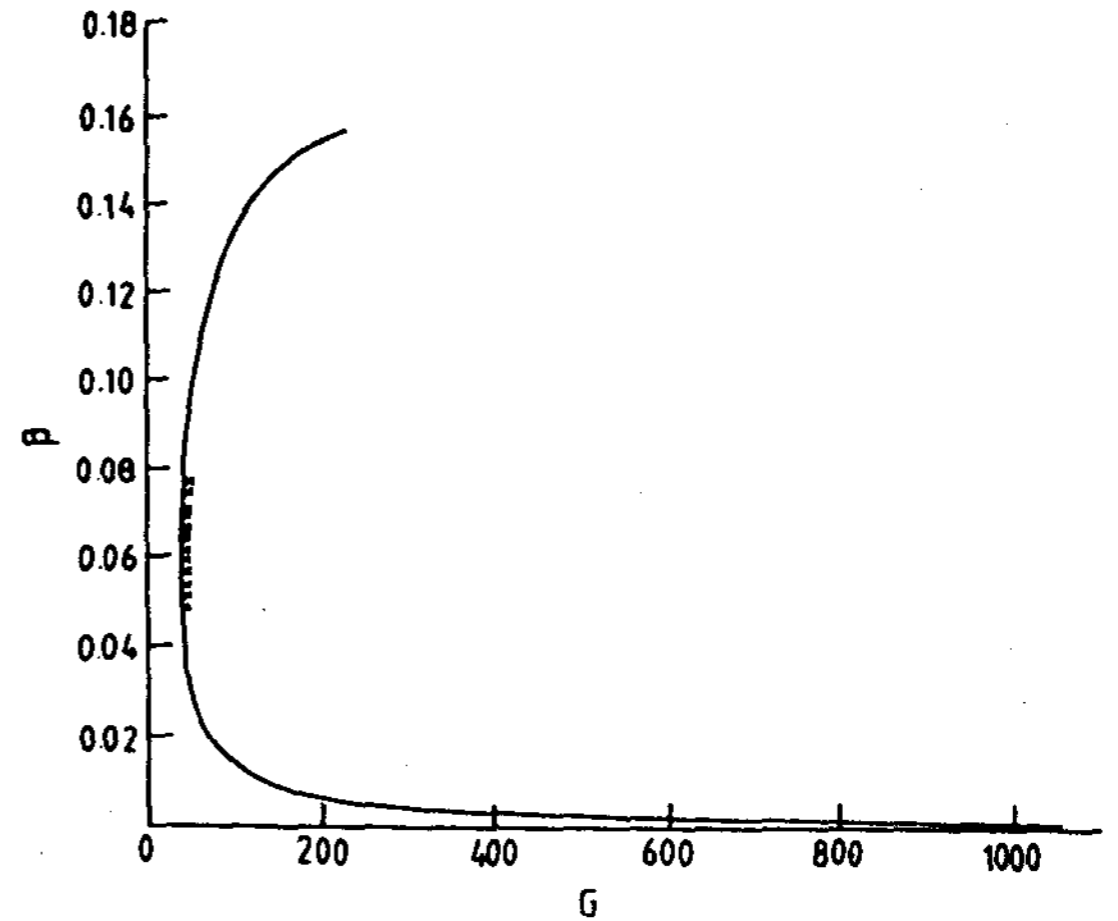


Fig. 6 Neutral Stability Curve of  $\beta$  vs.  $G$  for  $Pr=11.6$  and  $q=1.894816$  at  $R=0$  Showing Qureshi's Results<sup>11)</sup> (—) and the Present Results ( $\times$ )

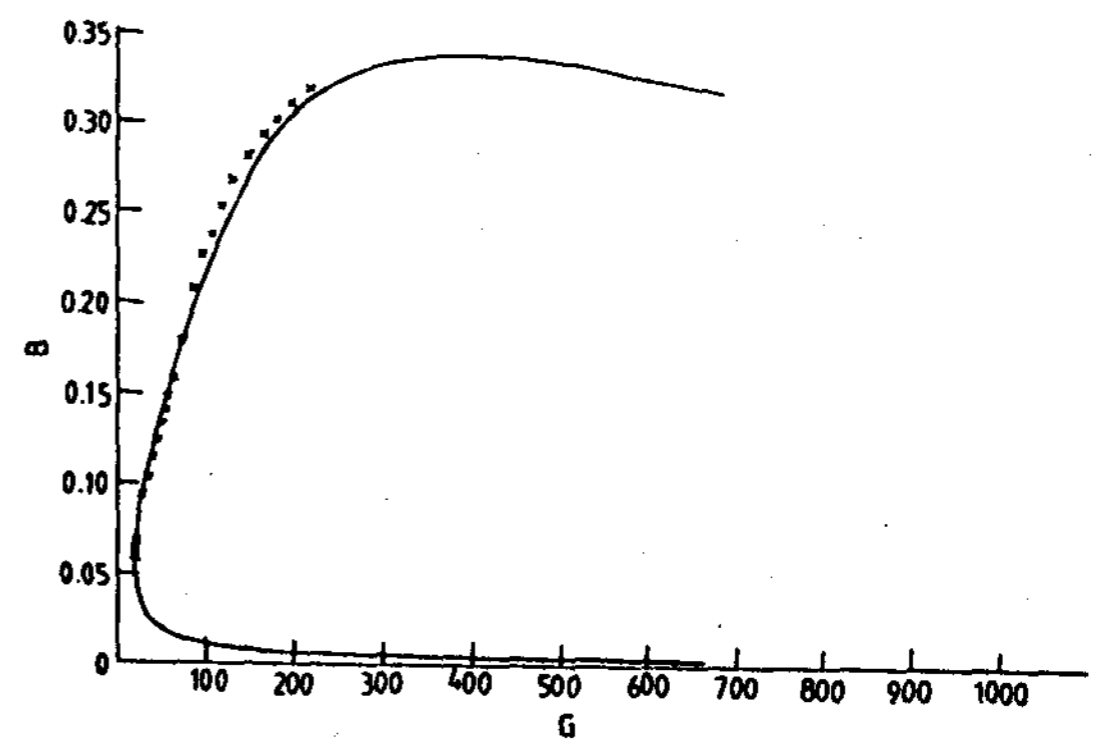


Fig. 7 Neutral Stability Curve of  $B$  vs.  $G$  for  $Pr=11.6$  and  $q=1.894816$  at  $R=0.4$ (upper) Showing Higgins's Results<sup>14)</sup> (—) and the Present Results ( $\times$ )

## 5. 결 론

온도와 밀도의 관계가 선형적인 Boussinesq인 경우, 비선형적인 non-Boussinesq의 경우에 해당되는 수직 자연대류의 수동역학적 방정식의 解를 求하는 문제의 수치해석 방법으로 simple shooting 및 orthogonal collocation 방법들을 제시하였다.

안정성 방정식의 문제는 固有值, 固有벡터의 문제인데 이러한 문제는 찬 물속에 잠겨있는 벽면 주위의 자연대류에 관한 경우에는 물리적으로 최대밀도점의 존재로 인하여 무한대에의 가정치  $\eta_{\infty}$  가 클 수밖에 없으므로 두점 경계치 문제로서 문제를 해결해야 한다. 따라서 simple shooting으로 처리가 불가능함으로 orthogonal collocation 방법의 컴퓨터 코드 COLSYS를 利用함으로써 정확한 固有值, 固有벡터를 구할 수 있다. 그러나 이 방법을 사용하려면 초기의 固有值 및 固有벡터의 값들이 주어져야 한다. 이 초기의 가정치들을 주기 위해서 simple shooting 방법이 필요하다.

Boussinesq의 경우에는 비교적  $\eta_{\infty}$ 의 값이 작고 유동의 형태가 단순하므로 용이하게 simple shooting 방법을 적용할 수 있다. 본 논문에서 제시된 simple shooting 방법은 기존 방법보다는 상당히 정확한 방법임을 orthogonal collocation 방법으로부터 얻은 결과들을 비교함으로써 확인할 수 있었다.

## REFERENCES

1. Gebhart, B., Natural Convection Flow, Instability, and Transition, Trans. ASME C: J. Heat Transfer Vol. 91, pp. 293-309, 1969.
2. Gebhart, B., Heat Transfer, 2nd ed., Mac-Graw-Hill, Chap. 7, pp. 225, 1971.

3. Gebhart, B., Buoyancy - induced Fluid Motions Characteristic of Applications in Technology, Trans. ASME I: J. Fluid Engng. Vol. 101, pp. 5-28, 1979.
4. Ostrach, S., An Analysis of Laminar-Free-Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force, NACA Tech. Rep. 1111, 1953.
5. Plapp, J.E., Laminar Boundary Layer Stability in Free Convection, Doctoral Dissertation, Calif. Instit. Tech. Pasadena, Calif. 1957.
6. Szewczyk, A.A., Stability and Transition of the Free-convection Layer Along a Vertical Flat Plate, Int. J. Heat Mass Transfer 5, pp. 903-913, 1962.
7. Kurtz, E.F., and Crandall, S.H., Computer-aided Analysis of Hydrodynamic Stability, J. Math. and Phys. 41, pp. 264-279, 1962.
8. Nachtsheim, P.R., Stability of Free-convection Boundary Layer Flows. NASA TN D-2089, 1963.
9. Dring, R.P. and Gebhart, B., A Theoretical Investigation of Disturbance Amplification in External Laminar Natural Convection, J. Fluid Mech. 34, pp. 551-564, 1968.
10. Hieber, C.A., On the Mixed Convection from a Sphere at Small Reynolds and Grashof Numbers, On the Stability of Vertical Natural Convection Boundary Layers, Doctoral dissertation, Cornell Univ., Ithaca, NY. 1969.
11. Qureshi, I.H., Stability and Measurements of Fluid and Thermal Transport in Vertical Buoyancy Induced Flows in Cold Water, Doctoral Dissertation, SUNYAB, Buffalo, NY. 1980.

12. Gebhart, B. and Mollendorf, J.C., A New Density Relation for Pure and Saline Water, *Deep-Sea Res.* Vol. 24, pp. 831-848, 1977.
13. El-Henawy, I., Gebhart, B., Hassard, B., Kazarinoff, N. and Mollendorf, J., Numerically Computed Multiple Steady States of Vertical Buoyancy-induced Flows in Cold Pure Water, *J. Fluid Mech.* Vol. 122, pp. 235-250, 1982.
14. Higgins, J. Stability of Buoyancy Induced Flow of Water Near the Density Extremum, Adjacent to a Vertical, Isothermal Surface, Doctoral Dissertation, SUNYAB, Buffalo, NY, 1981.
15. Hwang, Y.K., The Stability of Some Multiple Steady States and the Effect of Motion Pressure in Vertical Natural Convection in Cold Pure Water, Doctoral Dissertation, SUNYAB, Buffalo, NY, 1984.
16. Deuflhard, P. and Bader, G., Multiple Shooting Techniques Revisited, Preprint No. 163, Inst. für Angewante Math., University of Heidelberg, 1982.
17. Asher, U., Christiansen, J. and Russel, R.D., COLSYS – A Collocation Code for Boundary-value Problems, Codes for Boundary-Value Problems in Ordinary Differential Equations (ed. G. Goos and J. Hartmanis), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 76, pp. 164-185, Springer, 1978.