

## 수평 및 수직동심환상원관의 자연대류 열전달

## Natural Convection in Annuli between the Horizontal and Vertical Concentric Cylinders

김 찬 원\*  
Chan Won Kim

## ABSTRACT

Natural convection in annuli between the horizontal and vertical concentric cylinders for ratio of the inner to the outer radius,  $R_1=0.85, 0.35$  has been studied by the numerical analysis. Governing equations are numerically sloved by means of Successive over-relaxation methods.

It is found that maximum local Nusselt number,  $Nu_{1,max}$  at the inner cylinder and  $Nu_{2,max}$  at the outer cylinder for  $R_2=0.35$  have maxima at  $\phi=0^\circ, \phi=180^\circ$   $\zeta=0.4, 1.6$  for horizontal cylinder and at bottom, top for vertical cylinder, respectively. In the present study, mean Nusselt numbers at the vertical cylinder increased more than that at the horizontal cylinder by about 64% for  $R_1=0.35$ .

## 기 호 설 명

|   |                                    |
|---|------------------------------------|
| $\mathbf{V}$ : 속도벡터                                 | $Nu_1$ : 내관의 국소 Nusselt 수          |
| $T$ : 온도  | $Nu_2$ : 외관의 국소 Nusselt 수          |
| $g$ : 중력가속도   | $Nu_m$ : 평균 Nusselt 수              |
| $T_1, T_2$ : 내관 및 외관의 온도                            | $\beta$ : 열팽창계수                    |
| $P_m$ : 동압력   | $\rho$ : 밀도                        |
| $R$ : 무차원 반경 방향좌표, $r/r_2$                          | $\nu$ : 동점성계수                      |
| $r$ : 반경방향좌표  | $\alpha$ : 온도전도율                   |
| $r_1, r_2$ : 내관 및 외관의 반경                            | $\phi$ : 원주방향좌표                    |
| $Ra$ : Rayleigh 수, $g\beta(T_1-T_2)r_2^3/\alpha\nu$ | $\delta$ : 경사각도                    |
| $Pr$ : Prandtl 수, $\nu/\alpha$                      | $\psi$ : Vector potential          |
| $Z$ : 축방향좌표   | $\Omega$ : 와도벡터                    |
| $R_1$ : 내외관의 반경비, $r_1/r_2$                         | $\xi$ : 무차원 원통축방향좌표, $z/r_2$       |
| $L$ : 무차원 축길이, $l/r_2$                              | $\theta$ : 무차원 온도, $T-T_2/T_1-T_2$ |
| $l$ : 원통축길이   | <첨 자>                              |
|   | 1 : 내관                             |
|   | 2 : 외관                             |

1. 서 론

최근 밀폐공간내 자연대류로 인한 열전달이 중요시되고 있으며 이에 대한 연구가 활발하다. 그 중 환상공간에서의 자연대류는 태양열 집열장치, 핵연료 냉각장치, 축열장치 등에서 많이 응용된다.

Bishop과 Carley<sup>1)</sup>는 수평동심환상원관의 내외관의 직경비를 0.27~0.813으로 하였을 때 환상공간에서의 열전달 특성을 실험하였으며 Powe 등<sup>2)</sup>은 환상공간내 유동상태를 담배연기를 이용하여 inverse relative gap width의 크기에 따라 가시화 실험한 결과 정상 및 비정상 유동패턴을 관찰하였다. Kuehn과 Goldstein<sup>3)</sup>은 수평동심원관의 자연대류 열전달을 이론 및 실험연구하였다. 또 Grigull과 Hauf<sup>4)</sup>는 간섭계를 이용하여 환상공간내 유동패턴을 실험한 결과 2차원 pseudo-conductive 영역, 3차원 천이영역, 그리고 충분히 발달한 2차 층류 자연대류 영역으로 분류하였다.

한편 수직환상원관의 자연대류 열전달에 대해서는 Torri와 Nakayama<sup>5)</sup>가 하부를 가열한 좁은 수직환상원관내 자연대류 연구에서 대류발생한계를 해석하였으며 秋野詔夫 등<sup>6)</sup>은 감온액정입자를 이용하여 하면을 가열한 수직원통용기내의 자연대류를 가시화 실험하였다. Ozoe 등<sup>7)</sup>은 경사진 직육면체에 대한 3차원 자연대류 수치해석을 하여 유선은 공축 2중 나선임을 연구하였으며, Fukuda 등<sup>8)</sup>은 경사환상다공질층내 자연대류를 수치해석하였다. 또 Fusegi와 Farouk<sup>9)</sup>은 수평동심 환상공간의 자연대류 열전달에 대한 수치해석 연구결과 양단이 열전달에 크게 영향을 미친다는 사실을 밝혔다. 그러나 수평원관과 수직원관의 자연대류 열전달에 대해 비교연구한 바는 거의 없었다.

본 연구에서는 수평동심 환상원관과 수직동심 환상원관에서 Rayleigh수  $4 \times 10^4$ , Prandtl 수 7.0,  $L = 2.0$ 일 때 환상원관의 크기 즉 내외관의 직경비가 0.85인 좁은 환상원관의 경우와 0.35인 넓은 환상원관인 경우의 온도분포, Nusselt수 분포를 수치해석하여 자연대류

열전달 특성을 고찰하였다.

2. 수치해석

본 해석에 사용한 좌표계는 Fig.1과 같고 반경  $r_1, r_2$ , 원관길이  $l$ 의 환상공간내에 유체가 밀폐되어 있으며 양벽은 열적으로 절연되어 있다. 해석을 단순화하기 위하여 유체의 물성치는 운동량방정식의 중력항만 온도차에 의해 밀도변화를 하며 비압축성 유동으로 가정하였다. 또 내관의 온도  $T_1$ , 외관의 온도  $T_2$ 로서 일정하며 ( $T_1 > T_2$ ) 점성소산 및 복사열전달은 무시한다.

Fig.1(A)의 수평원관 ( $\delta = 0^\circ$ )을 반시계방향으로  $90^\circ$  회전한 (B)의 경우는 수직원관이며 중력은 반경방향  $r$  및 원주방향  $\phi$  뿐만 아니라 축방향  $z$ 로도 작용한다. 위의 가정하에서 정상상태의 지배방정식은,

$$\text{div } \mathbf{V} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -g\beta(T - T_2) \mathbf{i} - \frac{1}{\rho} \nabla P_m + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \dots\dots\dots (2)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T \dots\dots\dots (3)$$

식(2)의  $\mathbf{i}$ 는 중력방향으로의 단위 vector를 나타내며, 경사각  $\delta$ 의 함수이다.

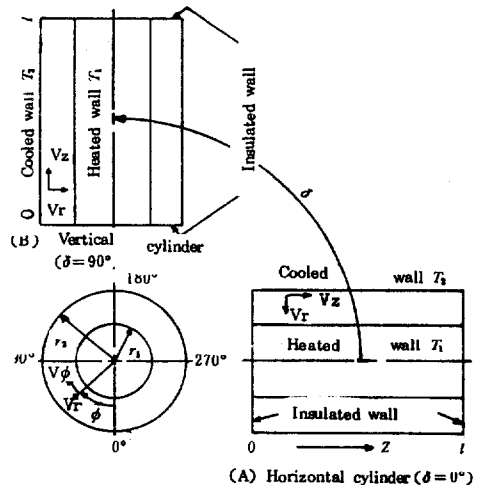


Fig.1 Geometry and Coordinate system

$$\mathbf{i} = [\cos \phi \cos \delta, -\sin \phi \cos \delta, -\sin \delta] \quad \dots \dots \dots (4)$$

Aziz 등<sup>10)</sup>에 의하면 vector potential  $\phi$  와 vorticity  $\Omega$ 는,

$$\mathbf{V} = \nabla \times \phi \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{V} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\Omega = -\nabla^2 \phi \quad \dots \dots \dots (7)$$

다음의 무차원 변수를 도입하였다.

$$\left. \begin{aligned} R &= r/r_2, \quad \phi = \phi, \quad \xi = z/r_2 \\ \theta &= (T-T_2)/(T_1-T_2) \\ Ra &= g\beta(T_1-T_2)r_2^3/\alpha\nu, \quad Pr = \nu/\alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

따라서 무차원 지배방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{1}{Pr} \{ (\mathbf{V} \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{V} \} = Ra \left[ \begin{aligned} &\sin \delta \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} - \sin \phi \cos \delta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ &-\cos \phi \cos \delta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \sin \delta \frac{\partial \theta}{\partial R} \\ &\cos \delta \left( \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial R} + \cos \phi \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \right] + \nabla^2 \Omega \quad \dots \dots \dots (9)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{V}) \theta = \nabla^2 \theta \quad \dots \dots \dots (10)$$

무차원 지배방정식을 풀기 위한 경계조건은 아래와 같다.

$$\left. \begin{aligned} R &= R_1, \quad 1 \text{에서} ; V_R = V_\phi = V_\xi = 0 \\ \phi &= 0^\circ, 180^\circ \text{에서} ; \frac{\partial V_R}{\partial \phi} = V_\phi = \frac{\partial V_\xi}{\partial \phi} \\ \xi &= 0, \quad L \text{에서} ; V_R = V_\phi = V_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} R &= R_1, \quad 1 \text{에서} ; \frac{\partial}{\partial R} (R\psi_R) = \psi_\phi = \psi_\xi = 0 \\ \phi &= 0^\circ, 180^\circ \text{에서} ; \psi_R = \frac{\partial \psi_\phi}{\partial \phi} = \psi_\xi = 0 \\ \xi &= 0, \quad L \text{에서} ; \psi_R = \psi_\phi = \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} R &= R_1, \quad 1 \text{에서} ; \\ \Omega_R &= 0, \quad \Omega_\phi = -\frac{\partial V_\xi}{\partial R}, \quad \Omega_\xi = \frac{\partial V_\phi}{\partial R} \\ \phi &= 0^\circ, 180^\circ \text{에서} ; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_\phi &= \frac{\partial \Omega_\xi}{\partial \phi} = \Omega_\xi = 0 \\ \xi &= 0, \quad L \text{에서} ; \\ \Omega_R &= -\frac{\partial V_\phi}{\partial \xi}, \quad \Omega_\phi = \frac{\partial V_R}{\partial \xi}, \quad \Omega_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} R &= R_1 \text{에서} ; \theta = 1 \\ R &= 1 \text{에서} ; \theta = 0 \\ \phi &= 0^\circ, 180^\circ \text{에서} ; \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \\ \xi &= 0, \quad L \text{에서} ; \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

### 3. 수치계산

식(5), (7), (9), (10)의 지배방정식을 유한차분 방정식으로 변환하여 S. O. R.법에 의해 수치 계산하였으며 central difference 방법을 사용하였다. 수렴조건은,

$$\text{Max} \left| \frac{B_{i,j,k}^{(n+1)} - B_{i,j,k}^{(n)}}{B_{i,j,k}^{(n)}} \right| \leq 10^{-3} \quad \dots \dots (15)$$

여기서  $B_{i,j,k}^{(n)}$ 는  $(R_i, \phi_j, \xi_k)$  위치에서 n번째 반복회수에서의 값을 나타낸다. 수치계산은  $Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Pr = 7.0$ ,  $L = 2.0$ ,  $R_1 = 0.85$  및 0.35에서 수평동심환상원관과 수직동심환상원관에 대하여 수치계산하였다. 이완인자는 와도에서 0.8, 유선함수 및 온도는 1.1로 하였으며 차분격자점수는 반경방향 13, 원주방향 37, 축방향 41, 합계 19,721점이다. 계산시간은 PRIME-550계산기로 CPU시간이 50~560분이었으며 반복회수는 약 90~1,600 근방에서 수렴하였다. 수치해석에서 구한 해는 다음 식에 의해 Nusselt 수를 계산하였다.

내관의 국소 Nusselt 수;

$$Nu_1 = R_1 \ln R_1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=R_1} \quad \dots \dots (16)$$

외관의 국소 Nusselt 수;

$$Nu_2 = \ln R_1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=1} \quad \dots \dots (17)$$

평균 Nusselt 수;

$$Nu_m = \frac{1}{\pi L} \int_0^L \int_0^\pi Nu_1 d\phi d\xi = \frac{1}{\pi L} \int_0^L \int_0^\pi Nu_2 d\phi d\xi \dots\dots\dots (18)$$

등온선 및 국소 Nusselt 수 분포는 CALC-OMP-1051 plotter 를 이용하여 얻었다.

4. 결과 및 고찰

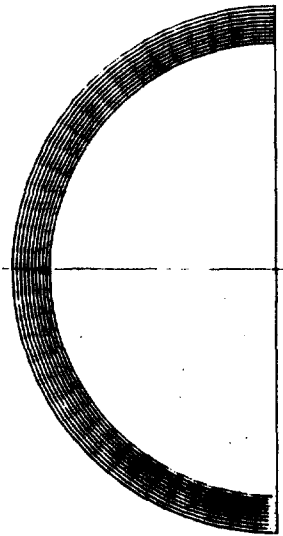


Fig.2 Isothermal lines on the R-φ plane at a horizontal (or vertical) cylinder for R<sub>1</sub>=0.85

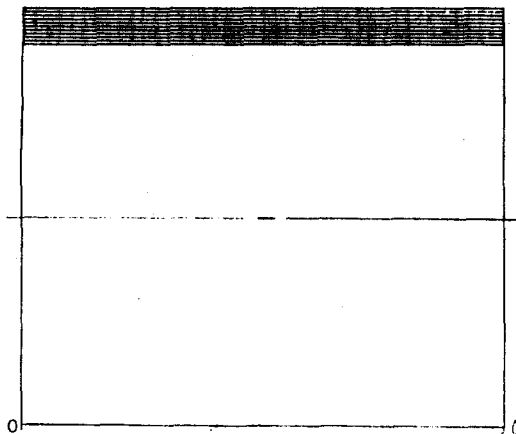
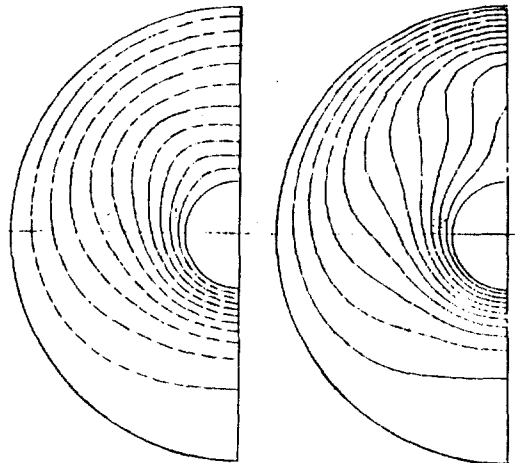


Fig.3 Isothermal lines on the R-Z plane at a horizontal (or vertical) cylinder for R<sub>1</sub>=0.85

Fig.2는 Rayleigh 수  $4 \times 10^4$  에서  $R_1=0.85$  즉, 좁은 환상공간 (=0.15)인 경우 R-φ 단면의 등온선을 나타내며 Fig.3은 R-Z 단면의 등온선을 나타낸다. 좁은 환상공간인 경우는 수평원관과 수직원관의 환상공간내 등온선은 동일하였으며 이러한 온도분포를 Grighll 과 Hauf<sup>3)</sup>는 pseudo-conductive 라 하였으며 이는 환상공간내 유체의 자연대류 현상이 고체의 진자이동에 의한 열전도현상과 유사하다.

Fig.4는 Rayleigh 수  $4 \times 10^4$  인 수평원관인 경우,  $R_1=0.35$  즉 넓은 환상공간(=0.65)에



(A) ξ=0.0 (B) ξ=1.0

Fig.4 Isothermal lines on the R-φ plane at a horizontal cylinder for R<sub>1</sub>=0.35

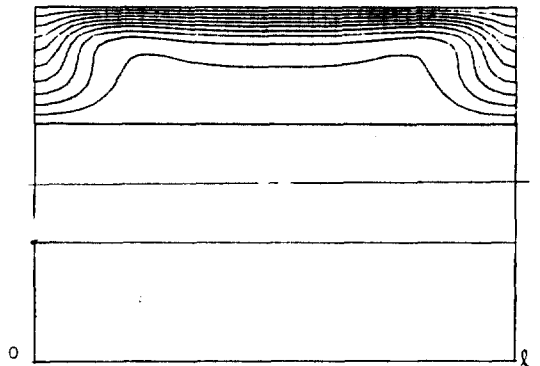


Fig.5 Isothermal lines on the R-Z plane at a horizontal cylinder for R<sub>1</sub>=0.35

서  $R-\phi$  단면의 등온선을 나타내며 Fig.5는  $R-Z$  단면의 등온선을 나타낸다. 좁은 환상공간에서 보다 넓은 환상공간인 경우 대류열전달이 활발하여 온도분포는 다소 변형이 일어났으며, 또 열적으로 절연되어 있는 양단보다  $\xi=1.0$ 인 관의 중앙에서 다소 심하게 일어났다.

gap width가 클수록 pseudo-conductive에서 natural convection으로 전환되었으며 관의 중앙인 경우 내관에서는 bottom( $\phi=0^\circ$ ) 부분, 외관에서는 top( $\phi=180^\circ$ ) 부분에 온도구배가 크게 일어났으며 이 부분에서 대류열전달이 활발하게 일어나고 있음을 나타낸다. 또한 관의 양단에서의 온도분포는 top( $\phi=180^\circ$ ) 부분에서는 유사전도와 같이 거의 일정하고 bottom( $\phi=0^\circ$ ) 부분에서는 자연대류가

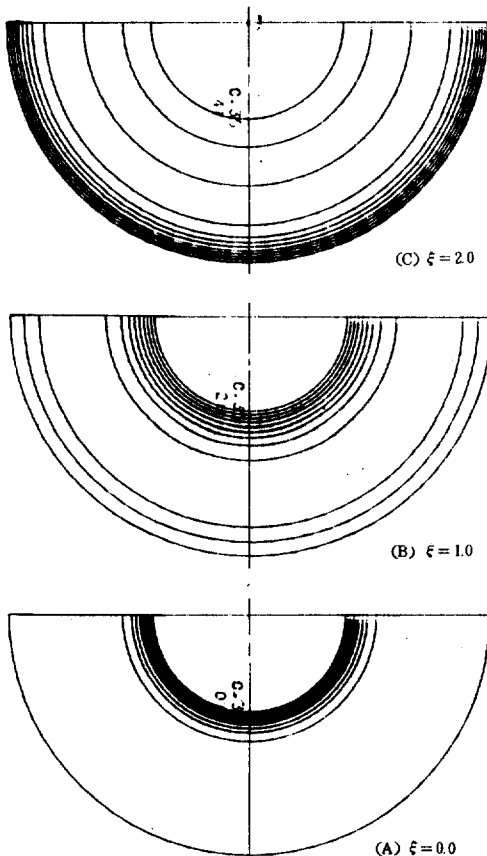


Fig.6 Isothermal lines on the  $R-\phi$  plane at a vertical cylinder for  $R_1=0.35$

보다 활발하였으며 관의 중앙부에서는 전반적으로 자연대류가 활발하였다.  $R-Z$  단면의 등온선은 좌우대칭을 이루고 있으며 이는  $R-\phi$  단면의 등온선과 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig.6은 수직원관인 경우  $R_1=0.35$ 에서  $R-\phi$  단면의 등온선을 나타낸다.  $\xi=0.0$  즉, 관 하단에서는 내관측에 온도구배가 크고, 즉 하단의 외관측에는 전혀 대류열전달이 일어나지 않았다. 반대로  $\xi=2.0$ 인 관의 상단에서는 외관측에 온도구배가 크게 나타났다. 이는 수평원관인 경우와 큰 대조를 이루고 있다.

Fig.7은 수직원관인 경우  $R-Z$  단면의 등온선을 나타내며 하단 조금 위에서부터 변형이 시작되었고 반경 방향으로 온도반전 현상이 일어났다. 또한 관의 중앙에서는 수평원관인 경우 외관측에 온도구배가 조밀한 반면 수직원관은 내관측에 온도구배가 조밀하게 나타났다. 또 온도변형은 수평원관에서는  $R-\phi$  단면 및  $R-Z$  단면에서, 수직원관에서는  $R-Z$  단면에서만 일어났다.

Fig.8은  $R_1=0.85$ 인 좁은 환상공간에서 수평, 수직원관의 내관 및 외관의 국소 Nusselt 수 분포를 나타낸다. 내외관 공히  $\phi, Z$  방향의 Nusselt 수 분포는 거의 일정하였으며 평균

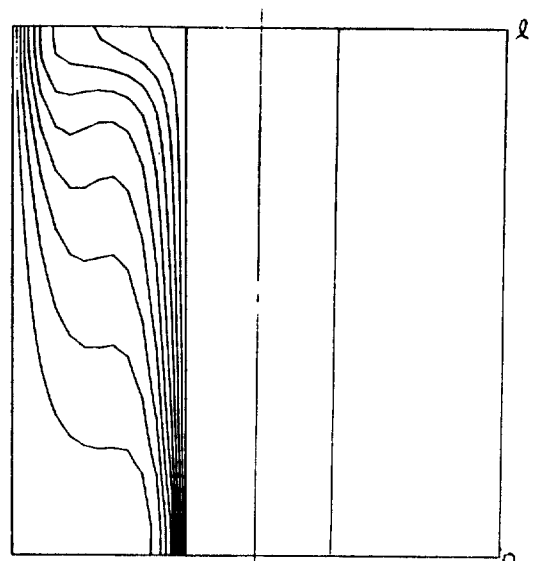


Fig.7 Isothermal lines on the  $R-Z$  plane at a vertical cylinder for  $R_1=0.35$

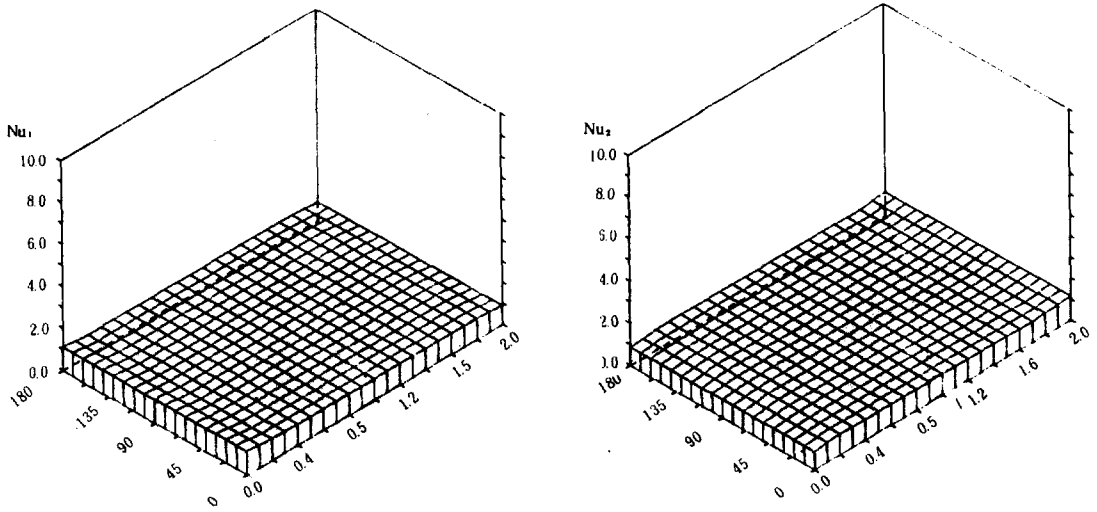


Fig.8 Local Nusselt numbers at the inner and outer horizontal (or vertical) cylinder walls for  $R_1=0.85$

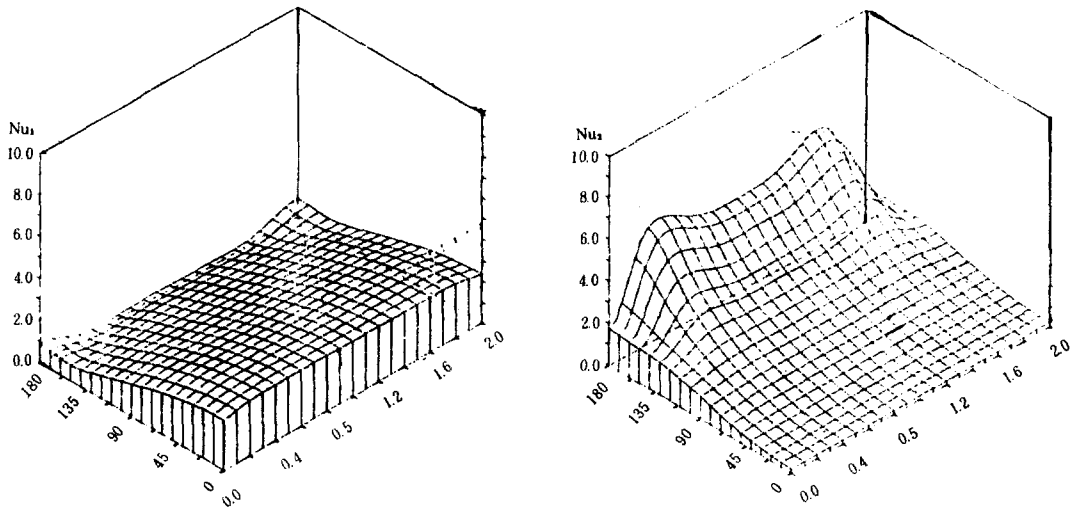


Fig.9 Local Nusselt numbers at the inner and outer horizontal cylinder walls for  $R_1=0.35$

Nusselt 수는 약 1 이었다.

Fig. 9는  $R_1=0.35$ 인 넓은 환상공간에서의 수평원관의 내외관의 국소 Nusselt 수 분포로서 내관의 최대국소 Nusselt 수는 관의 bottom ( $\phi=0^\circ$ ) 측에 존재하며 외관은 bottom 측에는 열전달의 영향이 거의 미치지 아니하고 top ( $\phi=180^\circ$ ) 측에 큰 영향을 미치고 있다. 외관의 최대국소 Nusselt 수 위치는  $\phi=180^\circ$ ,  $\xi=0.4$  및 1.6 이었으며 양단으로 인해 Nusselt

수가 급격히 저하하였다. 이는 양단에서의 점성전단력으로 인하여 자연대류가 억제되기 때문이다. 양벽면으로 인한 열전달의 영향이 내관에는 거의 영향이 미치지 않으나 외관에는 크게 영향을 미치고 있다. 최대국소 Nusselt 수는 양단에서 보다 약 3.2배 증가하였으며 관 중앙은 양단보다 약 2.4배 증가하였다.

Fig. 10은  $R_1=0.35$ 인 수직원관의 국소 Nusselt 수 분포를 나타낸다. 내관인 경우  $\xi$

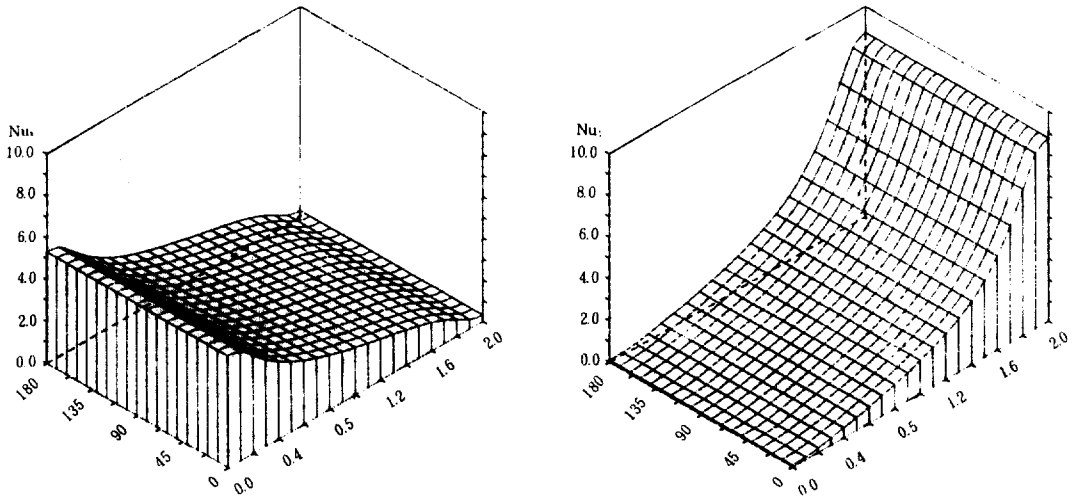


Fig. 10 Local Nusselt numbers at the inner and outer vertical cylinder walls for  $R_1 = 0.35$

= 0.0 즉 관의 하단에서 최대국소 Nusselt 수를 나타내고, 외관에서는 그 반대로 하단측에는 열전달의 영향이 거의 미치지 않으며 상단에서 최대국소 Nusselt 수를 나타낸다. 평균 Nusselt 수는 수직원관인 경우 약 2.55, 수평원관인 경우 약 1.56으로 수직원관이 수평원관보다 약 64% 증가하였다.

$\xi = 0.0$  이고 외관은 상단인  $\xi = 2.0$  이었다.

4.  $R_1 = 0.85$ 인 좁은 환상공간인 경우 수평, 수직원관에 관계없이 평균 Nusselt 수가 약 1인 pseudo-conductive 현상을 나타내었으나  $R_1 = 0.35$ 에서는 평균 Nusselt 수가 수직원관이 수평원관보다 약 64% 증가하였다.

### 5. 결 론

$Ra = 4 \times 10^4$ ,  $Pr = 7.0$ ,  $L = 2.0$ , 내외관의 반경비가 0.85, 0.35인 수평동심원관과 수직동심원관 사이의 환상공간내의 자연대류 열전달을 수치해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1.  $R_1 = 0.85$ 인 좁은 환상공간에서는 pseudo-conductive 현상을,  $R_1 = 0.35$ 인 넓은 환상공간에서는 natural convection 현상을 나타내었다.

2.  $R_1 = 0.35$ 인 넓은 환상공간에서 온도분포의 변형은 수평원관인 경우  $R-\phi$ ,  $R-Z$  단면에서, 수직원관인 경우  $R-Z$  단면에서만 나타났다.

3.  $R_1 = 0.35$ 인 넓은 환상공간에서 최대국소 Nusselt 수 위치는 수평원관의 내관에서는  $\phi = 0^\circ$ 이고 외관에서는  $\phi = 180^\circ$ 인  $\xi = 0.4$ 와 1.6이었으며, 수직원관인 경우 내관은 하단인

### 참 고 문 헌

1. E.H. Bishop, C.T. Carley, "Photographic studies of natural convection between concentric cylinders." Proc. 1966 Heat Transfer Fluid Mech. Inst., pp.63-78, 1966.
2. R.E. Powe, C.T. Carley and E.H. Bishop, "Free convective flow patterns in cylindrical annuli" J. Heat Transfer, Vol.1, pp. 310-314, 1969.
3. Y.H. Kuehn and R.J. Goldstein "An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders" J. Fluid Mech., Vol.74, pp.695-719, 1976.
4. U. Grigull and W. Hauf "Natural convection in horizontal cylindrical annuli", Proc. 3rd Int. Heat Transfer conf. 2, pp. 182-195, 1966.

5. T. Torri and W. Nakagama “하부를 가열한 좁은 수직환상공간내 자연대류”, 일본기계학회논문집, Vol. 47, pp.812~820, 1980.
6. 秋野詔夫, et al, “하면을 가열한 수직원통용 기내의 자연대류”, 제23회 일본전열symposium강연 논문집, pp.382~384, 1986.
7. H. Ozoe, N. Sato and S.W. Churchill “Experimental confirmation of the three-dimensional helical streaklines previously computed for natural convection in inclined rectangular enclosures”, *Int. Chem. Engng*, Vol.19(3), pp.454-462, 1979.
8. Y. Takata, K. Fukuda, S. Hasegawa, K. Iwashige, H. Shimomura and K. Sanokawa, “Three-dimensional natural convection in a porous medium enclosed with concentric inclined cylinders.” Proc. 7th Int. Heat Transfer conf., Vol.2, ppl351-356, 1982.
9. T. Fusegi and B. Farouk, “A Three-Dimensional study of Natural Convection in the Annulus between Horizontal concentric cylinders”, proc. of the 8th Int. Heat Transfer conf. pp.1575-1580, 1986.
10. K. Aziz and J.D. Hellus, “Numerical solution of the three-dimensional equation of motion for laminar natural convection,” *Physics of Fluids*, Vol.10, pp.314-324, 1967.