

용기를 고려한 응고과정의 열전달 해석(I)

— 포화액의 일차원 해석 —

Heat Transfer Analysis of Freezing Processes
Including Thermal Resistance of Mold(I)
- One - dimensional Analysis of Saturated Liquid -

유 재 석 *
Jai Suk Yoo

ABSTRACT

Effects of thermal resistance of mold during freezing processes have been investigated. Saturated liquid is chosen to present one-dimensional quasi-steady solution and this solution is compared with numerical solutions. Front tracking finite element method has been applied for the numerical solutions.

Results show that mold should be considered as well as phase change material except the cases when the very thin mold with relatively high thermal conductivity is used.

기 호 설 명

c : 열용량

F_0 : Fourier 수

h_s : 잠열

k : 열전도계수

L : 길이

L_m : 용기의 두께

Ste : Stefan 수

T_f : 상변화 온도

T_s : 용기 외벽의 온도

t : 시간

t_p : 용기내벽의 온도가 상변화온도로 될 때까지의 시간

X : 상면화면의 위치

X_q : 근사해로부터 구한 상면화면의 위치

x : 좌표축

그리스문자

α : 열확산계수

θ : 무차원 온도

τ : 무차원 시간

τ_p : t_p 의 무차원 표현

상첨자

\cdot : 시간에 대한 미분

$*$: 차원을 갖는 양

하첨자

m : 용기

l : 고체

1. 서 론

응고과정은 우리 주위에서 흔히 볼 수 있는 열전달 현상 중의 하나이다. 즉 얼음의 제조, 식품의 냉동, 주조나 용접 등의 재료가공 등에 널리 응용되고 있다.(1,2) 그러나 상변화시 상변화면이 시간에 따라 이동하며 그 위치가 미리 알려져 있는 것이 아니라 해의 일부로서 구하여야하므로 해석이 어렵다. 따라서 지금까지의 연구는 대부분 상변화 물질을 둘러 싸고 있는 용기의 열저항을 고려하지 않고, 상변화 물질의 외벽에 비교적 단순한 경계조건이 주어진 경우에 대해서 해석하여 왔다. 그러나 대부분의 응고과정이 용기내에 담겨진 액체 내에서 이루어지므로 용기의 열저항을 고려하는 것이 좀 더 실제적인 경계조건이 될 것이다. 그러나 용기를 고려하는 경우, 용기 내벽과 상변화 물질의 경계에서 연속조건을 만족시켜야하며 여기서의 접촉저항도 고려하여야하므로 문제가 대단히 복잡하여지고 또한 엄밀해를 구할 수 없다.

따라서 본 연구에서는 액체의 초기온도가 상변화 온도인 포화액을 고려하여 일차원 근사해와 수치해를 구하여 용기가 응고 열전달 과정에 미치는 영향을 알아보고자 한다.

2. 해석의 모델 및 지배방정식

응고과정에 용기의 열저항이 미치는 영향을 알아보기 위하여 일차원 모델을 선정하였다.

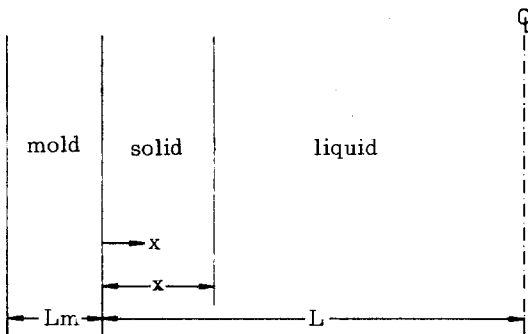


Fig.1. Schematic diagram of the problem

Figure 1에 나타난 바와 같이 길이가 \$2L\$인 영역에 초기온도가 상변화온도 \$T_f\$인 액체로 채워져 있으며, 이 액체의 양단에는 두께가 \$L_m\$인 용기가 있다. 시간 \$t = 0\$에서부터 용기 외벽의 온도를 \$T_f\$보다 낮은 \$T_s\$로 유지, 냉각시키면 먼저 용기의 온도가 낮아지게 되며, 용기 내벽의 온도가 \$T_f\$보다 낮아지면 상변화가 시작되어 진행하게 된다. 액체는 상변화 온도로 유지되므로 액상내의 열전달은 고려하지 않으면, 해석의 단순화를 위하여 다음의 가정을 도입하였다.

- 고체 - 액체 사이의 밀도 변화는 없다.
- 용기 내벽과 상변화 물질 사이의 접촉저항은 무시할 수 있다.

$$\tau < \tau_p$$

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x^2} = Ste \frac{\alpha_1}{\alpha_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau} \dots\dots\dots (1)$$

$$\theta_m(x, 0) = 0 \dots\dots(2a)$$

$$\theta_m(0, \tau) = -1 \dots\dots(2b)$$

$$\theta_m(L_m, \tau) = 0 \dots\dots(2c)$$

$$\tau \geq \tau_p$$

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x^2} = Ste \frac{\alpha_1}{\alpha_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = Ste \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau}$$

$$\theta_1(x, \tau_p) = 0 \dots\dots\dots (5a)$$

$$\theta_m(0, \tau) = -1 \dots\dots\dots (5b)$$

$$\theta_m(L_m, \tau) = \theta_1(L_m, \tau) \dots\dots\dots (5c)$$

$$\frac{\partial \theta_m(L_m, \tau)}{\partial x} = \frac{k_1}{k_m} \frac{\partial \theta_1(L_m, \tau)}{\partial x} \dots\dots (5d)$$

$$\theta_1(X, \tau) = 0 \dots\dots\dots (5e)$$

$$X(\tau_p) = 0 \dots\dots\dots (5f)$$

또한 상변화면에서의 에너지 균형식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \theta_1(X, \tau)}{\partial x} = \frac{dX}{d\tau} \dots\dots\dots (6)$$

식(1)-(6)은 편의상 무차원화된 형태로 표시하였으며 무차원 변수 및 파라미터들은 아래와 같이 정의된 것이다.

$$x = x^*/L, \tau = Ste \cdot Fo, L_m = L_m^*/L$$

$$\theta = (T - T_f) / (T_f - T_s)$$

$$X = X^*/L$$

$$Ste = c_1 (T_f - T_s) / h_s, Fo = \alpha_1 t / L^2$$

여기서 상첨자 *는 차원을 가진 양을 표시한다.

3. 근사해 및 수치계산

3.1 근사해

상변화면의 이동 속도가 대단히 낮고 용기가 열저항이 적은 물질로 되어 있는 경우에는 열용량을 무시하여 준평형 상태로 가정할 수 있다. (1) 이 때에는 용기 및 고체 내부의 온도가 직선적으로 분포된다고 가정할 수 있으며, 용기 내벽에서의 열평형 조건에 따라 다음의 관계가 얻어진다. (3)

$$\frac{T_f - T_w}{X^*/k_1} = \frac{T_w - T_s}{L_m^*/k_m} \dots\dots\dots (7)$$

따라서 고체 내부의 온도 분포는 다음과 같이 된다.

$$T_1 = \frac{T_f - T_s}{(X + \frac{k_1}{k_m} L_m)^*} (x - X)^* + T_f \dots (8)$$

식(8)로부터 상변화면에서의 온도 구배를 구하여 에너지 균형식에 대입하여 무차원화하면

$$Xq = \sqrt{2(\tau - \tau_p) + (\frac{k_1}{k_m} L_m)^2} - (\frac{k_1}{k_m} L_m) \dots (9)$$

을 얻는다.

3.2 수치계산

유한요소법을 이용하여 식(1)과 (3)을 근사화하면 다음과 같이 된다. (4, 5)

$$[C][\dot{\theta}] + [K][\theta] = [Q] \dots\dots\dots (10)$$

여기서 [C] 및 [K], [Q]는 각각 열용량 및 열전도, 열부하 행렬식을 나타낸다. 시간에 대하여서는 Fully - Implicit 방법을 취하였다. 또한 상변화면의 위치는 식(6)으로부터 구하였으며, 상변화면의 처리는 Yoo and Rubinsky(6,

7)에 의하여 제안된 계면추적방법(Front Tracking Method)을 사용하였다.

시간 $\tau = \tau_p$ 에서는 고상이 존재하지 않으므로 해석의 영역이 정의될 수 없다. 따라서 시간 $\tau = \tau_p$ 에서는 반무한 일차원에 대한 해석해를 적용하여 초기영역을 결정하였다.

4. 결과 및 검토

수치해와 근사해를 비교하기 위하여 상변화 물질로는 물을 택하였으며, 용기의 재료로는 구리를 선택하였다.

무차원화된 근사해의 결과는 식(9)에 나타난 바와 같이 Ste 수에 관계가 없으며 $\frac{k_1}{k_m} L_m$ 의 값에 영향을 받게된다. 즉 Ste 수에 관계없이 근사해의 결과를 적용할 수 있으며, 용기의 열전도율이 고체의 열전도율에 비하여 무한히 크거나 용기의 두께가 무한히 작다면 용기 내벽의 온도가 상변화온도로 변한 이후에는 용기의 영향을 무시할 수 있다는 것을 보여 준다.

근사해와 수치 계산의 결과로 얻은 상변화면의 위치를 시간의 함수로 Fig. 2에 나타내었다. 여기서 가로축의 무차원 시간은 편의상 τ_p 와의 차이를 표시한다. 근사해는 $\frac{k_1}{k_m} L_m = 0.54 \times 10^{-4}$ 의 경우를 표시하였으며 이는 용기와 상변화물질이 각각 구리와 물인 경우 $L_m = 0.01$ 에 해

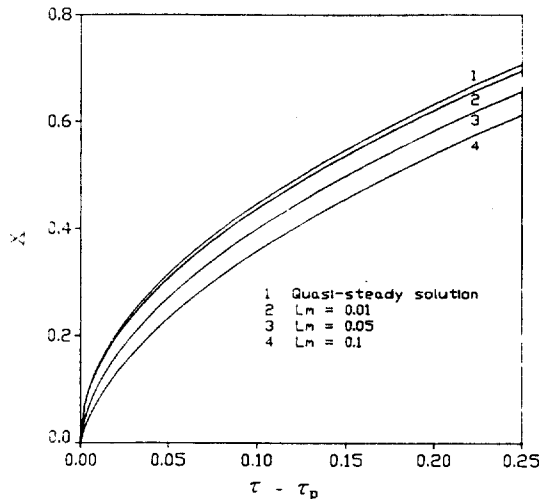


Fig. 2. Position of phase change front as a function of time for Ste = 0.0292

당한다. 수치해의 각각의 경우에 해당하는 근사해는 모두 0.1%내에서 일치하여 하나의 결과만을 표시하였다. 근사해의 결과는 항상 수치해 보다 큰 값을 보이며, 이는 근사해에서는 용기의 열용량을 무시하였기 때문이다. Figure 3에는 수치해와 근사해의 결과로 얻은 상변화면의 위치의 차이를 시간의 함수로 표시하였다. Figures 2와 3에서 알수 있는 바와 같이 $L_m = 0.005$ ($\frac{k_l}{k_m} L_m = 0.27 \times 10^{-4}$) 인 경우 근사해와 수치해의 차이는 전체 길이 L 의 약 1%정도, $L_m = 0.01$ 인 경우 전체 길이의 약 2% 정도이며, 용기의 두께가 증가함에 따라 근사해와 수치해의 차이도 점점 증가하여 $L_m = 0.1$ 인 경우 전체 길이의 약 10% 정도의 오차를 갖게 된다. 근사해에서 열용량만을 무시한 용기의 열저항을 고려하였으며, 용기의 열확산 계수가 물의 약 100배, 열전도율이 약 185배임을 감안할 때 용기를 고려하지 않고 상변화시의 열전달 과정을 해석하는 것은 비현실적이며, 큰 오차를 수반하게 된다는 것을 알 수 있다. Figure 4에는 근사해의 결과로 얻은 상변화면의 위치의 차이를 Stefan 수를 매개변수로 표시하였다. $Ste = 0.0584$ 인 경우, 즉 벽면의 온도가 -10°C 인 경우, 초기에는 $Ste = 0.0292$ 의 결과보다 상변화면이 빠르게 진행되나 시간이 지남에 따라

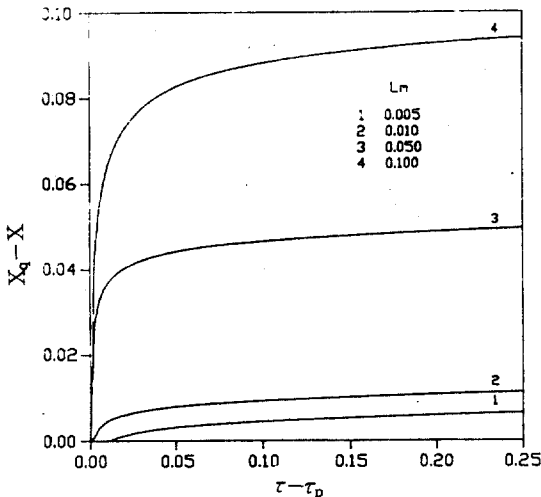


Fig. 3. Differences between quasisteady solutions and numerical solutions as a function of time for $Ste = 0.0292$

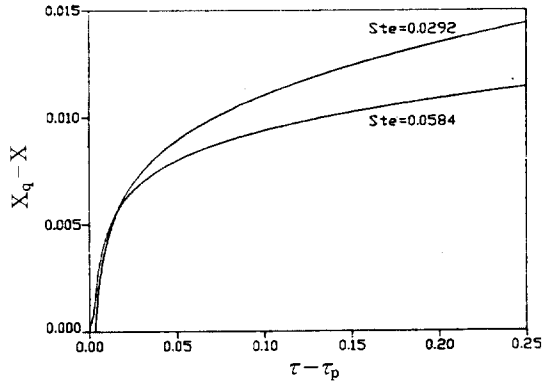


Fig. 4. Effect of Stefan number for $L_m = 0.01$

상변화면의 위치가 $Ste = 0.0292$ 의 경우 보다 적게 나타난다. 이는 무차원 시간의 정의에 의해, 동일 무차원 시간에 대한 실제 시간의 비는 Stefan 수의 비에 반비례하기 때문이다.

5. 결 론

본 연구에서는 액체의 초기 온도가 상변화 온도인 포화액을 상변화 물질로 택하여, 용기가 응고과정에 미치는 영향을 고찰하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) $\frac{k_l}{k_m} L_m$ 이 0.5×10^{-4} 이하인 경우 약 2% 오차범위 내에서 근사해나 용기를 고려하지 않은 결과를 이용할 수 있다.
- (2) 용기의 두께가 전체길이의 1%를 넘거나, $\frac{k_l}{k_m} L_m$ 이 0.5×10^{-4} 보다 큰 경우에는 용기의 열저항의 크기가 상대적으로 증가하기 때문에 상변화 과정의 열전달 해석시 용기를 반드시 고려하여야 한다.

참 고 문 헌

1. Flemings, M.C., *Solidification Processing*, McGraw-Hill, 1974.
2. Lunardini, V.J., *Heat Transfer in Cold Climates*, Van Nostrand Reinhold Co., 1981.
3. Arpaci, V.S., *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley, 1966.

4. Becker, E.B., Carey, G.F., and Oden, J.T., *The Finite Elements: An Introduction*, Vol.1, Prentice-Hall, 1981.
5. Huebner, K.H. and Thornton, E.A., *The Finite Element Method for Engineers*, 2nd ed., John Wiley, 1982.
6. Yoo, J. and Rubinsky, B., "Numerical Computation Using Finite Elements for the Moving Interface in Heat Transfer Problems with PHase Transformation", *Numerical Heat Transfer*, Vol.6, pp.209-222, 1983.
7. Yoo, J. and Rubinsky, B., "A Finite Element Method for the Study of Solidification Processes in the Presence of Natural Convection", *Int. J. for Numerical Methods in Engng.*, Vol.23, pp.1785-1805, 1986.