

## 두 무한 평면 사이의 선형 이방성 산란 매질에서의 열전달

### Heat Transfer with Linearly Anisotropic Scattering Medium in a Plane Layer

변 기 홍,\* T. F. Smith\*\*  
K. H. Byun, T. F. Smith

#### ABSTRACT

The purpose of this study is to apply the zone method expressions for a gray, absorbing, emitting, and linearly anisotropic scattering medium enclosed in an infinite plane layer to evaluate heat transfer applications. The medium is assumed to be homogeneous and has a refractive index of unity. The boundary surfaces are opaque and gray, diffusely emitting and reflecting at a constant temperature. Radiative equilibrium condition, combined conductive and radiative heat transfer, and thermal ignition are studied in terms of the governing parameters, and the results are compared with previous studies. Wall heat flux results agree well with those of others. Except for the minor discrepancies observed for some cases, temperature results also agree well with those of previous studies. Good agreement with results from other methods indicates the accuracy of the zone method as well as its compatibility with other modes of heat transfer.

#### NOMENCLATURE

E	: Activation energy or Blackbody emissive power, Kcal/mol-K, W/m <sup>2</sup>	$\bar{N}$	: Conduction to radiation parameter, Eq. (8)
GG	: Gas to gas total exchange area (TEA) matrix	N	: Numer of gas zones
GS	: Surface to gas TEA matrix	p	: Scattering phase function
H <sub>C</sub>	: Critical heat generation coefficient, Eq. (11)	$\dot{Q}$	: Dimensionless wall heat flux
k	: Thermal conductivity, W/m-K	Q <sub>a</sub>	: Dimensionless radiant absorption
L	: Slab thickness, m	Q <sub>e, q</sub>	: Energy release per unit volume, W/m <sup>3</sup>
		q <sub>r</sub>	: Radiative heat flux, W/m <sup>2</sup>
		R	: Universal gas constant, 8,3144 J/mol-K

\* 한국 동력자원 연구소

\*\* The University of Iowa

SG	: Gas to surface TEA matrix
SS	: Surface to surface TEA matrix
T	: Temperature, K
x	: Coefficient for linearly anisotropically scattering
y	: Plane layer vertical coordinate, m
Z	: Reaction Rate
$\beta$	: Extinction coefficient, $m^{-1}$
$\epsilon$	: Wall emittance
$\mu$	: $\cos \theta$
$\sigma$	: Stefan-Boltzmann constant, $W/m^2 \cdot K^4$
$\tau, \tau_0$	: Optical thickness and depth, $\beta y, \beta L$
$\omega_0$	: Scattering albedo

### Subscripts

a	: Absorption
b	: Black
g	: Gas
r	: Reference
s	: Surface

## 1. 서 론

평판면 사이의 복사 열전달 매질에서의 복합 열전달 현상은 여러가지 열공학 분야에서 관찰되고 있다. 예로는, 대기권, 두 유리창 사이의 매질, 호수의 혼탁한 물, 다공질의 평판, 가스에 놓인 흰, 열교환기와 로 등의 경우이다.

복사 만에 의한 열전달의 경우는 여러가지 해석 방법에 의해 정확한 결과들이 발표되었으나, 조운 방법(zone method)과 비교할 수 있는 결과는 참고 문헌[1-5]에서 찾아볼 수 있다. 복합 열전달의 경우, 주로 수치 및 근사해석 방법에 의해 결과들이 발표되었다.<sup>6,7,8)</sup> 조운 방법을 산란 매질에 적용 시키기 위한 연구의 필요성이 제기 되었으나,<sup>9)</sup> 등방성 산란 매질에 적용 시킨 경우에 그치고 있으므로,<sup>10)</sup> 필자들이 조운 방법을 선형 이방성 산란 매질에 적용 시킬 수 있도록 최근 개량 시켰다.<sup>11,12)</sup>

선형 이방성 산란 매질은, 산란 위상 함수가

$p = 1 + x \mu \mu'$ 인 경우이다.  $\mu \mu'$ 는 입사하는 빛과 산란하는 빛 사이의 방향 여현이다.  $x$ 는 이 논문의 주요 변수이며 이방성의 정도를 표시하는 상수이며 -1에서 1 사이의 값을 가진다. 등방성 산란 매질의 경우는  $x = 0$ 이다.

이 논문의 주 목적이 조운 방법의 정확성 및 유용성을 보이기 위함이므로, 현상에 대한 자세한 해석은<sup>3,6,8)</sup> 생략하였다.

## 2. 이론 해석

복합 열전달 해석에 복사 열전달을 고려하기 위해 필요로 하는 양은 면의 순 복사 열유속과 매질 체적당 순 복사 열유속이다. 절.2.1에서 이 양들이 조운 방법에 의해 표현되었으며, 열 평형 방정식에의 응용이 절.2.2에 소개 되었다.

### 2.1. 조운 방법식

두 무한 평면 사이의 흡수와 산란 계수는 파장이나 온도에 의해 변하지 않고, 광굴절률의 값은 1이다. 매질은 두 평면 사이에 균일하게 분포되어 있다고 가정한다. 두 평면은 비투과성이며, 난반사 특성을 갖고, 면 방사율과 온도가 일정하다.

매질을 평판면에 평행하게 N등분 하였을 때, 그 각각을 매질 조운(zone)이라 부른다. 따라서 평판면계는 2개의 면 조운과 N개의 매질 조운으로 구성되고 있다. 각 조운은 균일한 온도와 물성치를 가지고 있다고 가정한다. 물론 이 조건들은 완화될 수 있다.<sup>11)</sup>

두 평면에 이르는 순 복사 열유속과 매질의 체적당 순 복사 열유속은 조운 방법에 의해 다음과 같이 표시될 수 있다.<sup>11,12)</sup>

$$q_{rs} = \epsilon I \cdot E_{bs} - SS \cdot E_{bs} - SG \cdot E_{bg} \dots \dots (1)$$

$$\frac{dq_r}{d\tau} \Delta \tau = 4 \Delta \tau (1 - \omega_0) E_{bg} - GS \cdot E_{bg} \dots \dots (2) \\ - GG \cdot E_{bg}$$

굵은 글씨는 행렬을 나타낸다.  $\epsilon I = [\epsilon_i \delta_{ij}]$ 로 정의된 행렬이며,  $\epsilon_i, \delta_{ij}$ 는 각각 면 방사율과 크로넬커 델타(kronecker delta)이다. E는 방사능력을 나타내는 종렬(column) 벡터량이다.

$\Delta\tau = \beta\Delta y$  이며 각 조운의 광학적 두께를 나타낸다. 광학적 두께는 매질의 투과성을 나타낸다.  $\beta$ 는 소멸 계수이며 흡수와 산란 계수의 합이다.  $y$ 는 밀면으로 부터의 수직거리를 나타낸다.  $\omega_0$ 는 상대 산란 계수이다. 하첨자  $b, s, g$ 는 각각 흑체, 면, 매질을 가리킨다.  $SS, SG, GS$  및  $GG$ 는 각각 면과 면, 매질과 면, 면과 매질, 매질과 매질사이의 전교환 면적(TEA)이며, 행렬의 크기는 각각  $(2 \times 2), (2 \times N), (N \times 2)$  및  $(N \times N)$ 이다. 전교환 면적은 직접교환 면적(Direct Exchange Area),  $\Delta\tau, \omega_0, \epsilon_i$  및  $x$ 의 함수이다. 전교환과 직접교환 면적식은 참고 문헌 [11, 12]에 상세히 설명되어있다.

2.2 복합 열전달

복사, 전도 및 열생성의 경우, 매질에서의 열평형식은 다음과 같다.<sup>10, 12)</sup>

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} - 4\beta(1 - \omega_0)\sigma T^4 + \frac{dq_a}{dy} \dots (3)$$

$$+ \dot{q} = 0$$

$k$ 는 매질의 열 전도 계수이며,  $T$ 는  $y$ 위치에서의 절대온도이고,  $\sigma$ 는 스테판 볼츠만 상수이다. 식 (3)의 왼편에 나타나는 양은 단위 체적당 값이며, 각각 열 전도량, 복사 방사량, 복사 흡수량 및 열 생성량이다. 매질의 복사 흡수율은 조운 방법에 의해

$$\frac{dq_a}{dy} \Delta y = GS \cdot E_{bs} + GG \cdot E_{bg} \dots (4)$$

로 표시될 수 있다. 열 생성량이 아레니우스(Arrhenius)형의 1차 반응이라면

$$\dot{q} = Q_e Z \exp(-E/RT) \dots (5)$$

가 된다.  $Q_e, Z, E$  및  $R$ 은 각각 단위 체적당 열 방출량, 반응계수, 활성화 에너지 및 일반기체 상수이다.

무차원 온도, 광학 깊이, 무차원 매질의 열 흡수율 및 방출량을 다음과 같이 정의한다.

$$\theta = \frac{T}{T_r}, \tau = \beta y, Q_a = \frac{\beta q_a}{4\sigma T_r^4} \dots (6)$$

$$\dot{Q} = \frac{\dot{q}}{4\sigma T_r^4}$$

$T_r$ 은 기준 온도이다. 무차원량으로 식 (3)을 표시하면, 다음과 같다.

$$\bar{N} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} - \beta(1 - \omega_0)\theta^4 + \frac{dQ_a}{d\tau^2} \dots (7)$$

$$+ \dot{Q} = 0$$

$\bar{N}$ 는 전도-복사 지표를 나타내는 변수이다.

$$\bar{N} = \frac{k\beta}{4\sigma T_r^4} \dots (8)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$y = 0; T = T_1 \quad \epsilon = \epsilon_1 \dots (9)$$

$$y = L; T = T_2 \quad \epsilon = \epsilon_2 \dots (10)$$

평면에 이르는 전 열유속은 푸리에(Fourier)의 법칙을 따르는 전도 열전달량과 식(1)에 의해 계산된 복사 열전달량의 합으로 계산한다. 따라서, 위 경계 조건의 경우, 전 열유속은 먼저 매질의 식을 풀 다음 계산된다.

식 (7)은 원래 온도에 대해 비선형 미분 및 적분방정식이나, 조운 방법에 의해 미분 대수 방정식계로 변형되었으며, FARM (Finite Analytic with Radiation Method)방법에 의해 해를 구하였다.<sup>13)</sup>

3. 결과 및 토의

3.1 복사 열전달만의 경우

매질의 열 평형식 (3)에서 전도 및 열생성이 없는 경우를 복사 평형계(radiative equilibrium)라고 부른다. 이 계의 특성은, 전도에 의한 열전달이 없으므로, 면 근처의 매질과 면의 온도에 불연속이 존재하는데 있다. Table 1에는, 아랫면에 입사하는 무차원의 복사 열유속을 나타내었다. 분모의 양은 투명한 매질의 경우 윗면과 아랫면 사이의 복사 열유속이다. 상대 산란 계수가 1이며, 두 면이 다 흑체인 경우가 발표되어 있다. 이 경우, 무차원 복사 열유속 평면계의 방향 평균 흡수율로 생각될 수 있다.<sup>12)</sup>

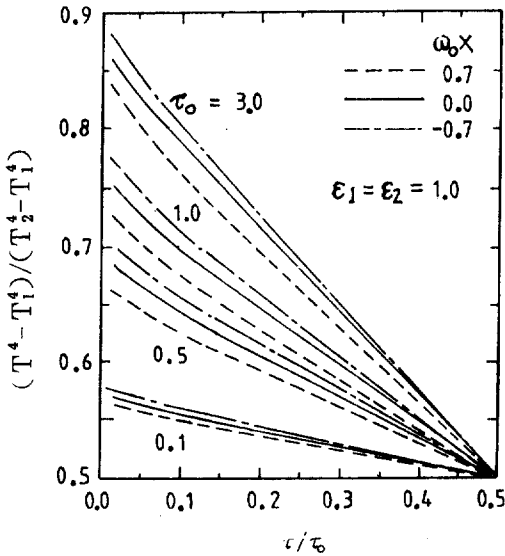


Fig. 1 Dimensionless Emissive Power

Table 1에서 볼 수 있듯이, 조운 방법에 의한 결과는 이미 발표된 결과들과 잘 일치하고 있다. 열유속에 대한  $x$ 의 영향은 투명한 매질로부터 광학적 두께가 증가함에 따라 증가하다가 다시 감소하여 불 투명한 매질에서 사라진다. 투명한 매질과 불 투명한 매질 각각의 무차원 복사 열유속 1과 0이다.  $x$ 의 무차원 복사 열유속에 대한 영향을 등방성 산란매질의 결과에 대해 비교해 보면,  $\tau_0 = 10$ 에서 가장 컸으며,  $x = 1$ 의 경우 41%의 증가와  $x = -1$ 의 경우 22%의 감소를 보였다.

매질의 복사 방사량 또는 온도 분포는, 등방성 산란의 경우 참고문헌 [3]에 발표된 결과와 잘 일치하므로 생략하였다.

Fig. 1에는 조운 방법에 의한 매질의 복사 방사량을 나타내었다. 전방산란 선호 매질( $x > 0$ )의 경우, 고온면 근처의 매질의 온도가 등방성 산란 매질( $x = 0$ )에 비해서 낮다. 따

Table 1. Dimensionless Wall Heat Flux,  $q_1 / (\sigma T_1^4 - T_2^4)$

x	Ref.	$\tau_0$				
		0.1	0.5	1.0	2.0	10.0
-1.0	zone method	0.8952	0.6472	0.4862	0.3265	0.0908
-0.7	[6]	0.901	0.663	0.505		
	[7]	0.901	0.661	0.505		
	zone method	0.9013	0.6633	0.5046	0.3433	0.0974
0.0	[1]	0.9157		0.5534		0.1167
	[2]			0.5534	0.3901	0.1167
	[6, 7]	0.916	0.704	0.553		0.109
	[4]		0.7042	0.5534	0.3901	
	[5]				0.3901	
	zone method	0.9157	0.7042	0.5535	0.3901	0.1172
0.7	[6, 7]	0.931	0.750	0.611		
	zone method	0.9306	0.7504	0.6128	0.4518	0.1471
1.0	[2]			0.6423	0.4846	0.1649
	zone method	0.9372	0.7721	0.6423	0.4846	0.1652

라서, 열전달이 항상 되었음을 유추할 수 있으며, 이것이 Table 1에 반영되어 있다. 이와 정반대의 특성을 후방산란 선호 매질 ( $x < 0$ )의 경우 확인할 수 있다.

참고 문헌 [6]에는 결과가 그림으로만 발표되어 있기 때문에 조운 방법과 정확한 비교를 하기가 어렵다. 그래서, 조운 방법에 의한 결과를 참고 문헌 [6]에 발표된 그림과 동일한 크기로 그려 겹쳐 봄으로써 결과를 비교하여 보았다.

조운 방법에 의한 결과가  $\tau_0 = 0.1$  과  $0.5$  인 경우, 참고 문헌 [6]에 발표된 결과와 잘 일치하나,  $\tau_0 = 1$  과  $10$ 인 경우, 약간의 차이가 관찰되었다. 차이는 다음중의 이유에서 생기는 것으로 추측된다. 첫째, 참고 문헌[6]의 결과가 조운 방법에 의한 결과 보다 덜 수렴한 값이기 때문이다. Table 1의 결과에서, 참고문헌 [6]과 조운 방법에 의한 결과는 각각 3자리 및 4자리의 유효 숫자를 보이고 있다. 조운 방법에 의한 결과는 이미 발표된 결과들과 잘 일치하고 있다. 둘째, 참고 문헌 [6]에서는 인쇄용 그림 작성시 문제가 있는 것 같다.

모든 계산은 81 개의 조운이 사용되었으며, 소요 계산 시간은 PRIME 9955 계산기로 약 110-140 CPU초 이었다.

### 3.2 복사 및 전도에 의한 열전달

매질의 열 평형식 (3)에서 열 생성이 없는 경우, 주요 변수는 온도,  $\bar{N}$ ,  $\tau_0$ ,  $\epsilon$ ,  $\omega_0$  와  $x$ 이다. Table 2에는 무차원의 아랫면에 이르는 전열유속을  $\tau_0 = 1$ 의 경우에 대해 나타내었다. 전 열유속은 복사와 전도 열유속의 대수합이다. 분모의 양은 아랫면의 흑체 복사 방사능력이다.

Table 2에서 볼 수 있듯이, 조운 방법에 의한 해는 참고 문헌 [8]의 결과들과 잘 일치하고 있다.

$\bar{N} \leq 0.1$ 의 경우,  $\omega_0$  와  $x$ 의 영향이 복사 열유속에 대해 큼을 볼수 있다. 등방성 산란의 경우,  $\omega_0$ 가 증가하면 매질의 흡수 및 방사능력이 감소하므로 경계면에 입사하는 열유속은 감소한다. 전방산란 선호 매질( $x > 0$ )의 경우 열유속은 등방성 산란 매질 ( $x = 0$ )에 비해 항상 증가하며, 후방산란 선호 매질 ( $x < 0$ )의 경우 항상 감소 한다.

면의 방사율  $\epsilon$ 가 감소하면, 감소된 방사 및 증가된 난반사 능력 때문에 평면에 입사하는 열유속은 감소한다. 또  $\epsilon$ 가 감소하면, 복사 열유속에 대한  $x$ 의 영향이 다중 난반사의 증가로 특정 방향 선호성을 잃기 때문에 감소한다.

Fig. 2에는 매질의 온도 분포가  $\bar{N} = 0$  과  $0.$

Table 2. Dimensionless Wall Heat Flux,  $q_1 / \sigma T_1^4$

	Ref [8]				Zone method			
	$\epsilon = 1$		$\epsilon = 0.1$		$\epsilon = 1$		$\epsilon = 0.1$	
$\omega_0, x \setminus \bar{N}$	1.0	0.1	1.0	0.1	1.0	0.1	1.0	0.1
0.0 0	2.572	0.769	2.221	0.403	2.571	0.767	2.219	0.400
0.5 1	2.594	0.793	2.157	0.349	2.593	0.792	2.156	0.348
0	2.550	0.750	2.154	0.346	2.549	0.749	2.152	0.344
-1	2.512	0.712	2.150	0.343	2.511	0.711	2.149	0.341
1.0 1	2.602	0.802	2.048	0.248	2.602	0.802	2.048	0.248
0	2.519	0.719	2.047	0.247	2.519	0.719	2.047	0.247
-1	2.456	0.656	2.047	0.247	2.456	0.656	2.047	0.247

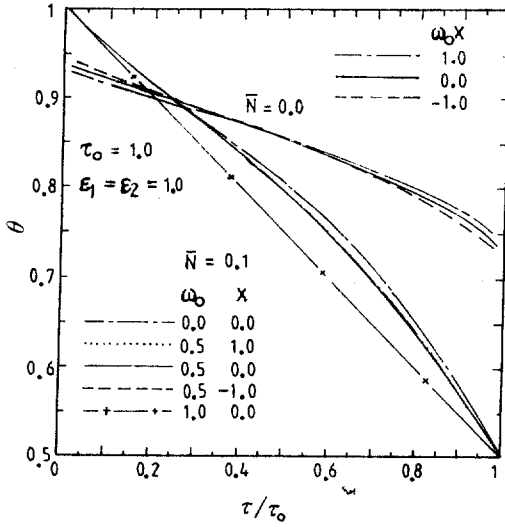


Fig. 2 Dimensionless Medium Temperature

1의 경우에 대해 조운 방법에 의한 결과 만을 나타내었다. 조운 방법에 의한 해를 참고 문헌 [8]에 발표된 그림과 동일한 크기로 그려 겹쳐 봄으로써 결과를 비교 할 수 있었다.  $\bar{N} = 0.1$ 의 경우, 두 결과가 잘 일치하고 있고, 이 경우  $x$ 의 영향은 극히 작다.  $\omega_0$ 가 0으로 부터 1까지 증가함에 따라, 매질의 온도 분포는 순수하게 흡수 방사하는 매질로 부터 순수하게 전도하는 매질의 경우로 변화해 간다.  $\bar{N} = 0$ 의 경우, 두 결과가 약간의 차이를 보이고 있다. 전 절에서와 같은 이유 때문인 것 같다. 이 경우, 열전달은 복사에 의해서만 일어난다.

3.3 열점화

매질의 열 평형식 (3)으로부터 구해진, 열점화를 일으키는 한계 열 생성 계수가 <sup>14)</sup>

$$Hc = \frac{Q_e Z}{4\beta\sigma T_1^4} \dots\dots\dots (11)$$

Table 3에 정리되어 있다. 두 면은 흑체이며 동일한 온도를 갖는다.  $\tau_0$ 와  $\bar{N}$ 는 각각 1과  $10^{-7}$ 이며,  $E/RT_1 = 10$ 의 경우이다. 식 (3)의 해가 선형 이방성 산란 매질의 경우 발표된 적이 없다. 따라서, 등방성 산란 매질에 대한 조운 방법에 의한 해가 <sup>12)</sup> Crosbie 등과 <sup>14)</sup> Smith 등

Table 3. Critical Heat Generation Coefficient,  $H_c$

	x	$\omega_0$			
		0.0	0.5	0.9	0.99
zone method	1		1255	389.3	
[10, 12]	0	1710	1238	386.3	44.3
zone method	-1		1222	383.3	
[14]	0	1708	1237	386.2	44.2

의 10) 결과와 먼저 비교되어 있고,  $\omega_0 = 0.5$ 와 0.9인 경우,  $H_c$ 에 대한  $x$ 의 영향을 표시 하였다. 사용된 조운의 수는 41이다.

등방성 산란 매질의 경우, 두 결과가 잘 일치 함을 볼 수 있다.  $H_c$ 에 대한  $x$ 의 영향은 적다.  $H_c$ 에 대한  $x$ 의 영향을 등방성 산란 매질 결과를 기준으로 계산해 보면,  $\omega_0$ 가 0.5에서 0.9로 증가함에 따라 영향이 약 1.4%에서 0.8%로 감소 한다. 매질의 방사능력이 감소하기 때문이다.

전방산란 선호 매질의 경우, 열점화에 요구되는  $H_c$  값은 매질로 부터의 열전달 증가로 등방성 산란의 경우보다 증가한다. 후방산란 선호 매질의 경우는 이와 반대이다.

4. 결 론

두 무한 평면 사이의 흡수, 방사 및 선형 이방성 산란 매질에서의 열전달 해석이 조운 방법에 의해서 이루어 졌으며 이미 발표된 결과들과 비교하여 고찰한 결론은 다음과 같다.

- 1) 열유속의 경우, 조운 방법에 의한 결과가 이미 발표된 수치 값들과 잘 일치했다.
- 2) 온도 분포의 경우, 이미 발표된 결과들이 그림으로만 주어져 있기 때문에 정확한 비교가 어려우나, 조운 방법에 의한 결과가  $\tau_0 \geq 1$ 인 경우와  $\bar{N} = 0$ 인 경우를 제외하고는 잘 일치했다.
- 3) 열 전달이 복사만에 의한 경우, 여러가지 정확한 방법들이 있다. 조운 방법에 의한해도 정확성을 보여 주고 있으며; 단지 조운의수

만을 증가시켜서 정확성을 더 증가시킬수 있다. 그러나, 주어진 계에 대한 해석을 한번만 할 경우, 교환면적 계산에 소요되는 시간 때문에 조운 방법이 다른 방법에 비해 비효율적 일 수도 있다.

4) 복합 열전달의 경우, 일반적으로 축차 대입에 의한 수치 해석으로 해가 구해진다. 조운 방법을 쓰는 경우, 교환면적을 계산 처음에 한번만 구하여 저장하면 되므로 조운 방법이다 른 방법보다 효율적이 될 수 있다. 조운 방법은 다른 열전달 항을 첨가하기가 쉬우므로 유용하다 생각된다. 따라서, 대류 현상이 있는 복합 열전달 해석에 조운 방법을 적용시킬 수 있으며, 이 논문의 연장이 될 수 있다고 생각된다.

### 참 고 문 헌

1. Bleach, H.L., Özisik, M.N., and Siewert, C.E., "Radiative Transfer in Linearly Anisotropic Scattering Conservative and Non-conservative Slabs with Reflective Boundaries," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol.14, pp.1551-1565, 1971.
2. Busbridge, I.W. and Orchard, S.E., "Reflection and Transmission of Light by a Thick Atmosphere According to a Phase Function  $1 + x \cos\phi$ ," *The Astrophysical Journal*, vol.149, pp.655-664, 1967.
3. Heaslet, M.A. and Warming, R.F., "Radiative Transport and Wall Temperature Slip in an Absorbing Planar Medium," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol.8, pp.979-994, 1965.
4. Özisik, M.N. and Yener, Y., "The Galerkin Method for Solving Radiation Transfer in Plane Parallel Participating Media," *J. of Heat Transfer*, vol.104, pp.351-354, 1982.
5. Sutton, W.H. and Özisik, M.N., "An Iterative Solution for Anisotropic Radiative Transfer in a Slab," *J. of Heat Transfer*, vol.101, pp.695-698, 1979.
6. Dayan, A. and Tien, C.L., "Heat Transfer in a Gray Planar Medium with Linear Anisotropic Scattering," *J. of Heat Transfer*, vol.97, pp.391-396, 1975.
7. Yuen, W.W. and Tien, C.L., "A Successive Approximation Approach to Problems in Radiative Transfer with a Differential Formulation," *J. of Heat Transfer*, vol.102, pp.86-91, 1980.
8. Yuen, W.W. and Wong, L.W., "Heat Transfer by Conduction and Radiation in a One-Dimensional Absorbing, Emitting and Anisotropically-Scattering Medium," *J. of Heat Transfer*, vol.102, pp.303-307, 1980.
9. Viskanta, R., "Radiation Heat Transfer: Interaction with Conduction and Convection and Approximate Methods in Radiation," *Proceedings of the 7th Int. H.T. Conf.*, vol.2, pp.103-121, Hemisphere, 1982.
10. Smith, T.F., Byun, K.H., and Chen, L.D., "Effect of Radiative and Conductive Transfer on Thermal Ignition," *Combustion and Flame*, vol.73, pp.67-74, 1988.
11. Byun, K.H. and Smith, T.F., "Development of the Zone Method for Linearly Anisotropic Scattering Media," *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, to be published, 1988.
12. Byun, K.H. and Smith, T.F., *Application of the Zone Method for Linear Anisotropically Scattering Media Enclosed in a Plane Layer*, TR ME-TFS-88-002, The University of Iowa, 1988.
13. Smith, T.F. and Severin, S.S., "Development of the Finite Analytic with Radiation Method," *J. of Heat Transfer*, vol.107, pp.735-737, 1985.
14. Crosbie, A.L. and Patabongse, M., "Radiative Ignition in a Planar Medium," *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, vol.37, pp.193-203, 1987.