

밑으로부터 가열되는 평면 Couette 유동에서 점성소산이 열적 불안정성에 미치는 영향

Effects of Viscous Dissipation on the Thermal Instability of Plane Couette
Flow Heated from Below

유 정 열* 박 영 무**
Jung Yul Yoo, Young Moo Park

ABSTRACT

An analysis has been given for the effect of viscous dissipation on the thermal instability of plane Couette flow between two parallel plates maintained at different constant temperatures. Under the assumption that the principle of the exchange of stabilities holds, stationary disturbance quantities in the form of longitudinal vortices are considered. The magnitudes of disturbance quantities are then represented as fast convergent power series so that the eigenvalue problem for determining the onset conditions of the thermal instability may be reduced to a simplified problem of finding the roots of a 4x4 determinant. It is shown that as the magnitude of the viscous dissipation increases the flow becomes more susceptible to instabilities, which is in very good agreement with previous results obtained in some related researches.

기 호 설 명

<p>Br : Brinkman 수</p> <p>C_p : 정압비열</p> <p>g, \underline{g} : 중력가속도, 중력가속도벡터</p> <p>Gr : Grashof 수</p> <p>H : 평판 사이의 간격</p> <p>k : 열전도계수</p> <p>p : 압력</p> <p>Pe : Peclet 수</p> <p>Pr : Prandtl 수</p> <p>Ra : Rayleigh 수</p>	<p>Re : Reynolds 수</p> <p>t : 시간</p> <p>T, T_0, T_1, T_2 : 온도, 기준온도, 아래평판 온도, 위 평판 온도</p> <p>$\underline{u}, (u, v, w)$: 속도벡터, 속도벡터 성분</p> <p>U_0 : 위 평판 속도</p> <p>(x, y, z) : 직각좌표계 또는 무차원 직각좌표계 <그리스문자></p> <p>α : 무차원 파수</p> <p>β : 열팽창계수</p> <p>θ_b : 무차원 기본 온도</p> <p>κ : 열확산계수</p>
---	--

* 정회원, 서울대학교 기계공학과

** The University of Michigan, 박사후과정

- λ : 파장 또는 무차원 파장
 μ : 점성계수
 ν : 동점성계수
 ρ : 밀도
 ϕ : 소산함수
 φ : 무차원 속도교란의 유동함수

<하첨자>

- b** : 기본 속도 및 온도
crit : 임계치

<상첨자>

- $'$: 교란양 또는 무차원 교란양
 $+$: 무차원 교란양의 진폭
 $*$: 변형된 무차원 교란양의 진폭

1. 서 론

평행 전단유동에서 가열 및 점성소산으로 인한 2차유동의 발생은 마찰 및 열전달에 상당한 영향을 미친다. 그러므로 어떤 조건에서 어떤 형태의 2차 유동이 발생되는가를 결정하는 것은 공학적으로 매우 중요한 일이다. 가장 단순한 형태의 평행 전단유동으로서 평면 Couette 유동을 들 수 있는데, 이 유동의 가열 또는 점성소산 또는 이 둘의 합성효과로 인한 유체역학적 및 열적 불안정성 현상은 많은 관심의 대상이 되고 있다.

Sukanek 등[1]은 절대온도에 관한 지수함수로 표시되는 점성계수를 도입함으로써 두 개의 평행평판이 같은 일정한 온도로 유지되는 경우에 점성소산으로 인한 평면 Couette 유동의 파형 불안정성을 이론적으로 고찰하였다. 점성소산을 고려하지 않고 두 개의 평행평판이 서로 다른 일정한 온도로 유지되는 경우에 평면 Couette 유동의 열적 불안정성 문제에 관하여서도 많은 연구가 이루어졌는데, Chandra [2], Kuo [3], Deardorff [4], Gallergher and Mercer [5] 및 Ingersoll [6], 등이 이에 해당된다. 이들은 공통적으로 유동방향의 축을 가지는 와동로울의 발생조건을 나타내는 임계 Rayleigh 수가 1.708로서 전단유동의 존재에 관계없이 고전적인 Bénard 문제에서와 같은 값을 가지는 것을 보였다.

한편, 본 연구에서와 다른 기본유동을 근거로 한 연구들도 매우 활발히 수행되었다. 예를 들면, Sparrow 등[7]은 서로 다른 일정한 온도로 유지되고 있는 두 개의 수평면 사이에서 초기에 정지하고 있는 유체층이 내부에 균일하게 분포된 열원으로 인하여 불안정하게 되는 현상에 관한 해석적 연구를 수행하였으며, Tritton and Zarraga [8] 및 Robert [9]는 동일한 현상에 관한 실험적 및 이론적 연구를 각각 수행하였다. 또한, 최근에 Cheng and Wu [10, 11]는 밑으로부터 가열되는 평면 Poiseuille 유동이 점성소산으로 인하여 완전히 발달된 구역 및 열적 입구구역에서 불안정하게 되는 현상에 관하여 해석적인 연구를 수행하였다.

그러나, 아직까지 밑으로부터 가열되는 평면 Couette 유동이 점성소산으로 인하여 불안정하게 되는 현상에 관한 연구는 이루어진 바 없으며, 따라서 본 연구에서는 이 주제를 취급하고자 한다. 특히 교란양들을 급속히 수렴하는 멱급수 형태로 표시하여 선형 안정성 해석으로부터 형성되는 고유치 문제를 4×4 행렬식의 근을 찾는 문제로 축소시킴으로써 해석과정에서 상미분방정식의 수치해를 포함 시키지 않는 보다 단순화된 기법이 채택될 것이다.

2. 안정성 해석

Fig. 1에서와 같이 일정한 온도 T_1 으로 유지되는 아래 평판은 고정되어 있고, 일정한 온도 $T_2 (< T_1)$ 로 유지되는 위 평판은 일정한 속도 U_0 로 움직임으로써 발생하는 평면 Couette 유동의 열적 불안정을 해석하고자 한다. 만일 점성소산을 고려하지 않는다면, 온도분포는 잘 알려진 바와 같이 선형으로 되며, 점성소산을 고려한다면, 온도분포는 최대온도점을 두 평판 사이에 위치시키는 비선형 형태로 될 것이다. 어느 경우이나 차가운 위 평판 근처의 유체는 아래 평판 근처의 유체보다 무거우므로, 이 계는 잠재적으로 불안정하다. 즉, 두 평판 사이의 온도차는 어떤 임계치보다 작은 범위에서 주 유동만이 존재하지만, 그 값을 초과하

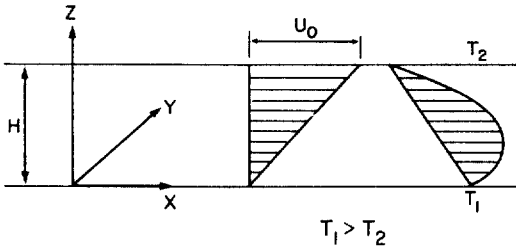


Fig. 1 Schematic diagram of the system under consideration

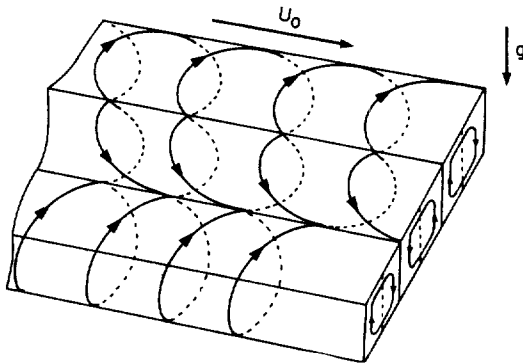


Fig. 2 Helicoidal motion of the fluid particle due to instability

계 되면, Fig. 2에서 보여지는 바와 같이 자연 대류로 인한 2차유동이 발생하여 주 유동에 중첩됨으로써 유동장은 여러개의 로울 형태로 나뉘어지고 유체질점들은 나선형의 궤적을 따라 진행하게 된다. 여기서는 이와 같은 2차유동의 발생조건을 찾기 위하여 선형 안정성 해석을 수행하고자 한다.

우선 기본유동에 대하여 다음과 같은 가정을 세운다 :

- (i) 유체는 비압축성 점성유체이다.
 - (ii) Boussinesq 가정에 의하여 밀도를 제외한 모든 물리적 성질들은 상수로 취급된다.
 - (iii) 기본유동장은 완전히 발달된 2차원 속도 및 온도분포를 가진다.
- 따라서, 기본 속도 및 온도분포는 다음의 지배방정식들로 표현된다.

$$\text{연 속 : } \nabla \cdot \underline{u} = 0, \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{운동량 : } \rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla P + \underline{u} \nabla^2 \underline{u} + \rho [1 - \beta(T - T_0)] \underline{g}, \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \text{에너지 : } & \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla T \right) \\ & = k \nabla^2 T + \mu \phi \dots\dots\dots (3) \\ \phi & = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

주어진 경계조건들을 만족시키는 위 방정식들의 해는 다음과 같다.

$$\frac{u_b}{U_0} = \frac{z}{H}, \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{T_b - T_2}{T_1 - T_2} = 1 - \frac{z}{H} - \frac{Br}{2} \left[\left(\frac{z}{H} \right)^2 - \left(\frac{z}{H} \right) \right], \dots\dots (5)$$

여기서, Brinkman 수 $Br = \frac{\mu U_0^2}{k(T_1 - T_2)}$ 는 점성열생성으로 인한 열적 효과와 주위로부터의 열전도로 인한 열적 효과의 비를 나타내는 무차원수로서, Fig. 3에는 여러가지 Br에 대한 무차원 온도분포 식(5)가 그려져 있다.

섭동된 유동은 기본양에 무한소의 교란을 중첩시킴으로서 일반적으로 다음과 같이 표현된다 :

$$\begin{aligned} u & = u_b(z) + u'(x, y, z, t), \\ v & = 0 + v'(x, y, z, t), \end{aligned}$$

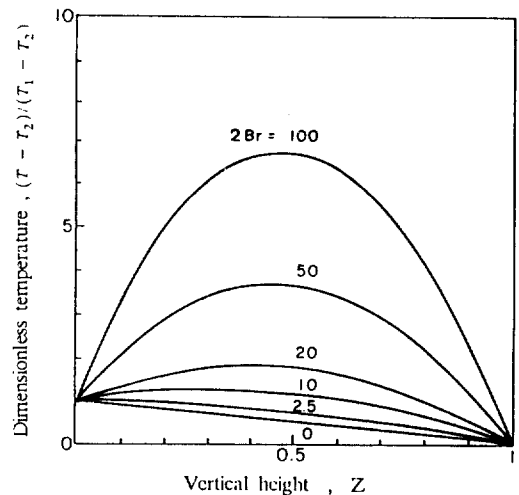


Fig. 3 Dimensionless basic temperature profiles for different values of Br

$$\begin{aligned}
 w &= 0 + w'(x, y, z, t), \quad \dots\dots\dots (6) \\
 T &= T_b(z) + T'(x, y, z, t), \\
 p &= P_b + p'(x, y, z, t).
 \end{aligned}$$

위의 표현들을 식 (1)~(3)에 대입하고, 선형안정성이론에 의하여 교란의 비선형 항들을 무시한 다음, 기본양들에 의하여 만족되는 부분을 소거시키면 안정성방정식들이 얻어진다. 그런데, Hwang and Cheng [12]을 포함한 많은 다른 연구들에서와 같이 불안정성의 발생점에서 교란은 정상상태로 존재한다고 가정하고, 또한 안정성교환의 원리에 의하여 교란은 유동방향을 축으로 하는 로울형태로 존재한다고 가정하면, 교란양들의 (x, t) 종속성을 무시할 수 있으므로 이 안정성방정식들은 다음과 같이 단순화 될 수 있다.

$$\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\rho w' \frac{\partial u_b}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right), \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right), \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) + \rho \beta g T', \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned}
 \rho C_p w' \frac{\partial T_b}{\partial z} &= k \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \\
 &+ \mu \left(2 \frac{\partial u_b}{\partial z} \frac{\partial u'}{\partial z} \right), \quad \dots\dots\dots (11)
 \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 (9)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (10)의 연산으로부터 p' 을 소거시키고 다시 식 (7)을 이용하여 v' 을 소거시킬 수 있다. 다음의 무차원수들을 정의 하고,

$$Re = \frac{U_0 H}{\nu}, \quad Gr = \frac{g \beta (T_1 - T_2) H^3}{\nu^2},$$

$$Pr = \frac{\nu}{k / (\rho C_p)}, \quad Pe = Re Pr, \quad Ra = Gr Pr,$$

특성길이 H , 기본 속도성분에 대한 특성속도 U_0 , 섭동 속도성분에 대한 특성속도 ν/H , 특성온도차이 $(T_1 - T_2)$ 를 기준으로 한 무차원 변수들을 도입함으로써 바로 전에 얻어졌던 안정성방정식들을 무차원화시킬 수 있다. 여기서는 혼동이 되지 않는 범위 내에서 편의상 무

차원수와 유차원수를 동일한 부호로 표시하기로 하면, 무차원화된 안정성 방정식들은 다음과 같이 표시된다:

$$\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$Rew' \frac{\partial u_b}{\partial z} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}, \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w' + Gr \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}, \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned}
 w' \frac{\partial \theta_b}{\partial z} &= \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{Br}{Pe} \frac{\partial u_b}{\partial z} \frac{\partial u'}{\partial z}, \quad \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

물론 위 식들에서

$$u_b = z \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\theta_b = \frac{T_b - T_2}{T_1 - T_2} = 1 - z - \frac{Br}{2}(z^2 - z) \quad \dots\dots (17)$$

이므로 $\frac{\partial u_b}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial \theta_b}{\partial z} = -1 - \frac{Br}{2}(2z - 1)$ 임을 알 수 있다.

앞서의 논의에서와 같이 교란양들은 주 유동방향의 축을 가지는 정상상태의 로울 형태로 나타날 것이므로

$$\begin{aligned}
 (u', v', w', T') &= (u^+(z), v^+(z), w^+(z), \\
 &T^+(z)) \exp(i\alpha y) \quad \dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

로 표시될 수 있다. 다시 $(u^+, v^+, w^+, T^+) = (Re u^*, v^*, w^*, Pr T^*)$ 의 변환을 취하고 식 (18)을 식 (12)~(15)에 대입시킨 다음 식 (14)와 (15)로부터 T^* 를 소거시키면 다음의 방정식들을 얻는다:

$$i\alpha v^* + D w^* = 0, \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$(D^2 - \alpha^2) u^* = \frac{\partial u_b}{\partial z} w^* = w^*, \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned}
 (D^2 - \alpha^2)^2 w^* &= \alpha^2 Ra \left(\frac{\partial \theta_b}{\partial z} w^* \right. \\
 &\left. - 2 \frac{Br}{Pr} \frac{\partial u_b}{\partial z} D u^* \right), \quad \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

여기서 $D(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dz}$ 를 나타낸다. 이 방정식들에 수반되는 경계조건들은 다음과 같다: $z = 0$ 와

1에서

$$u^* = w^* = Dw^* = (D^2 - \alpha^2)^2 w^* = 0. \dots\dots\dots(22a, b)$$

3. 해 법

방정식 (20)과 (21)로 구성된 계의 일반해는 Sparrow 등 [7] 및 Yoo 등 [13]에서와 같이 급속히 수렴하는 급수해의 형태로 구할 수 있다:

$$w^* = \sum_{k=0}^5 A_k f_k + \sum_{k=0}^1 C_k f_{k+6},$$

$$f_k = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n, k} z^n \tag{23}$$

$$u^* = \sum_{k=0}^5 A_k g_k + \sum_{k=0}^1 C_k g_{k+6},$$

$$g_k = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n, k} z^n.$$

여기서 A_k 와 C_k 는 임의의 상수들이며, f_k 와 g_k 는 급속히 수렴하는 멱급수들이다. 식 (23)을

$$\begin{bmatrix} f_2(1) + (\alpha^2/6)f_4(1) & f_3(1) \\ f_2'(1) + (\alpha^2/6)f_4'(1) & f_3'(1) \\ \{f_2''(1) + (\alpha^2/6)f_4''(1)\} & \{f_3''(1)\} \\ -2\alpha^2[f_2''(1) + (\alpha^2/6)f_4''(1)] & -2\alpha^2 f_3''(1) \\ +\alpha^4[f_2(1) + (\alpha^2/6)f_4(1)] & +\alpha^4 f_3(1) \\ g_2(1) + (\alpha^2/6)g_4(1) & g_3(1) \end{bmatrix}$$

상수 (A_2, A_3, A_5, C_1)에 대한 자명치아닌(non-trivial) 해가 존재하기 위해서는 그 계수들로 구성된 4×4 행렬식의 값이 0이 되어야 한다. 따라서 서로 다른 균일한 온도로 가열되는 두 개의 평행판 사이에서 일어나는 평면 Couette 유동의 열적 불안정성의 발생 조건을 찾기 위한 안전성 문제는 주어진 (Pr, Br)에 대하여 고유치 (Ra, α)를 찾아내는 고유치 문제로 축소된다. 고유치들을 수치해석적으로 구하는 데는 비교적 표준적인 방법들이 많이 알려져 있으며, 여기서는 근본적으로 Yoo 등 [13]에서와 동일한 방법이 채택되었다. 각각의 고유치에 대응하는 2차유동의 유동함수 φ 는 식

식 (20)과 (21)에 대입하고 정리하면, 다음의연성된 순환공식들이 얻어진다 :
 $n \geq 0$ 에 대하여

$$B_{n+6, k} = \frac{3\alpha^2 B_{n+4, k}}{(n+6)(n+5)} - \frac{3\alpha^4 B_{n+2, k}}{(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)} + \frac{\alpha^6 B_{n, k} - \alpha^2 Ra Br B_{n-1, k} + (-1+Br/2)\alpha^4 Ra B_{n, k}}{(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} - \frac{(2/Pr)\alpha^2 Ra Br D_{n+1, k}}{(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}$$

$$D_{n+2, k} = \frac{\alpha^2 D_{n, k}}{(n+2)(n+1)} + \frac{B_{n, k}}{(n+1)(n+1)}$$

$j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 에 대하여

$$B_{j, k} = \delta_{j, k},$$

$$D_{0,6} = 1, D_{1,6} = 0, D_{0,7} = 0, D_{1,7} = 1.$$

이래 평판, 즉 $z=0$ 에서의 경계조건 (22 a)로부터 $A_0 = A_1 = 0, A_4 = A_2(\alpha^2/6)$ 및 $C_0 = 0$ 을 얻는다. 위 평판, 즉 $z=1$ 에서의 경계조건 (22b)로부터 나머지 상수들이 결정될 수 있는데, 이들은 다음과 같은 고유치 문제를 형성한다 :

$$\begin{bmatrix} f_5(1) & f_7(1) \\ f_5'(1) & f_7'(1) \\ \{f_5''(1)\} & \{f_7''(1)\} \\ -2\alpha^2 f_5''(1) & -2\alpha^2 f_7''(1) \\ +\alpha^4 f_5(1) & +\alpha^4 f_7(1) \\ g_5(1) & g_7(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_5 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

(12)와 (19)에 의하여 $v' = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, w' = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 의 관계로부터 찾아진다.

4. 결과 및 토의

본 연구에서는 밀도로부터 가열되는 평면 Couette 유동의 열적 불안정성으로 인하여 발생하는 길이방향 와류에 미치는 점성소산의 영향을 주로 고찰하는데, 여러가지 (Pr, Br)의 조합에 대한 임계 Rayleigh 수, Ra_{crit} 및 임계 파수 α_{crit} 에 중점적인 관심을 가진다.

Fig. 4에서는 예를 들어 $Pr = 50$ 으로 고정된

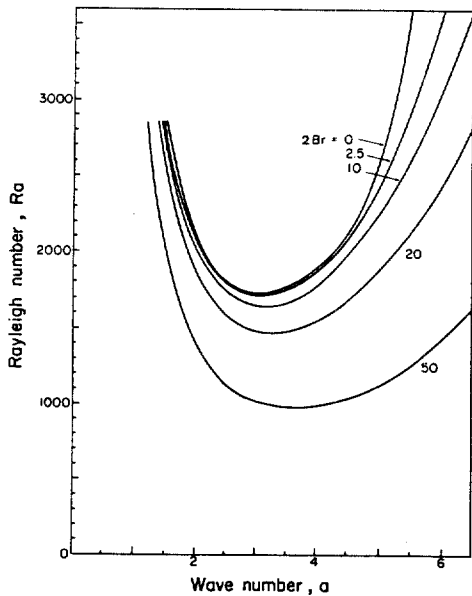


Fig. 4 Neutral stability curves for various values of Br and for $Pr=50$

경우에, 여러가지 Br 에 대하여 중립안정성 곡선, 즉 Ra 대 α 의 곡선들이 그려져 있다. 나중에 보여지겠지만, 고정된 Br 에 대하여 Pr 이 Ra_{crit} 및 α_{crit} 에 미치는 영향이 미소하므

로, 대표적으로 물보다 점성이 큰 엔진 오일과 같은 액체로서 대략 $Pr=50$ 을 채택한 것이다. Ra 가 0 으로부터 점차 증가함에 따라 중립안정성 곡선의 극소점에서 불안정성이 최초로 발생하기 시작하므로 이 점에 대한 Ra 및 α 의 값들을 각각 Ra_{crit} 및 α_{crit} 로 읽는다. 여러가지 다른 Pr 에 대하여서도 마찬가지로 임계치들이 결정될 수 있다. Table 1에는 이와 같은 방법으로 결정된 여러가지 (Pr, Br)에 대한 Ra_{crit} 및 α_{crit} 의 값들이 주어져 있다. Fig. 4 및 Table 1 으로부터 알 수 있는 것은 점성소산의 영향, 즉 Br 이 증가함에 따라 유동은 더욱 불안정해 진다는 것이다. 이는 평면 Poiseuille 유동의 대류불안정성에 대한 점성소산의 효과를 이론적으로 연구하였던 Cheng and Wu [10]의 연구와 정성적으로 매우 잘 일치하는 결과이다.

Fig. 5는 Table 1의 내용을 도표로 예시한 것으로서 Pr 과 Br 의 변화가 Ra_{crit} 에 미치는 영향을 잘 보여준다. 즉, 주어진 Pr 에 대한 Br 의 변화는 Ra_{crit} 에 중대한 영향을 미치지 만, 주어진 Br 에 대한 Pr 의 변화는 Ra_{crit} 에 단지 무시할 수 있는 영향만을 미치는 것

Table 1. Critical values for various combinations of (Pr, Br)

$2Br$	Pr	Ra_{crit}	α_{crit}	$2Br$	Pr	Ra_{crit}	α_{crit}
0	100	1707.762	3.116	1	100	1706.941	3.117
	50	1707.762	3.116		50	1706.932	3.117
	20	1707.762	3.116		20	1706.905	3.117
	10	1707.762	3.116		10	1706.863	3.117
	0.7	1707.762	3.116		10	100	1632.081
2.5	100	1702.657	3.120	50		1631.297	3.175
	50	1702.598	3.120	20		1629.052	3.175
	20	1702.430	3.120	10		1625.656	3.175
	10	1702.175	3.120	50		100	983.184
20	100	1460.818	3.305		50	980.416	3.595
	50	1458.825	3.300		100	602.166	3.775
	20	1453.150	3.295	0.4	0.7	1707.728	3.117
0.1	0.7	1707.760	3.117	1	0.7	1707.548	3.117
0.7	0.7	1707.657	3.117				

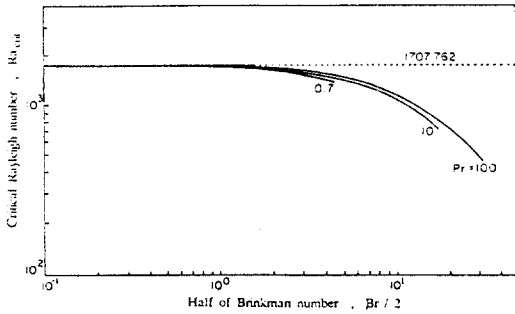


Fig. 5 The effect of the Prandtl number and Brinkman number on the critical Rayleigh number

을 알 수 있다. 따라서 식 (2)에서 Pr 을 포함하는 우변의 두번째 항은 첫번째 항에 비하여 무시될 수 있다는 것을 알 수 있으며, 나아가 유동방향의 속도교란성분 u' 은 v' 이나 w' 에 비하여 유동장의 열적 불안정성에 영향을 덜 미친다는 것을 알 수 있다. 이는 비소산 모형을 취급하였던 기존의 연구결과들 [4, 5, 6]과도 일치하는 관찰이다.

본 연구의 타당성은 Sparrow 등 [7]의 연구결과와 비교함으로써 간접적으로 입증될 수 있는데, 이들은 두 개의 서로 다른 일정한 온도로 유지되고 있는 수평 평판 사이에 채워져 있는 정지하고 있는 유체층 내부에 균일한 열

원이 분포되어 있을 때, 경계조건 및 비선형 기본온도분포가 유체층의 열적 불안정성에 미치는 영향을 고찰하였다. 이 연구의 경우에는 열원을 나타내는 매개변수 $N_s = SL^2/2k(T_1 - T_2)$ 를 정의함으로써 무차원 기본온도분포가

$$\theta_b = (T_b - T_2)/(T_1 - T_2) = 1 - z + N_s(z - z^2)$$

로 주어졌는데, 이를 식 (17)과 비교하면, $N_s = Br/2$ 에 대하여 동등한 분포를 가지는 것을 알 수 있다. 따라서 바로 앞선 논의에서와 같이 식 (2)의 우변의 둘째 항을 무시하면, 식 (2)과 경계조건 (22)로 구성된 안정성 문제는 $N_s = Br/2$ 에 대하여 Sparrow 등 [7]의 문제와 동등해진다. 이런 관점에서 Table 2에는 $Br/2$ 와 N_s 의 값이 일치되는 경우에 본 연구와 Sparrow 등의 연구결과들을 비교하였는데, 예상한대로 두 결과가 거의 일치하므로 본 연구의 타당성은 충분히 입증되었다.

Fig. 6에는 $Pr = 50$ 의 경우에 Br 의 증가에 따른 α_{crit} 의 증가, 즉 침성소산 효과의 증가에 따른 입계 파장의 감소를 도시하였다. Fig. 7과 8에는 $Pr = 50$ 의 경우에 여러가지 Br 값에 대한 속도교란 (u', w') 및 온도교란 T' 의 분포를 각각 도시하였다. Fig. 9에는 $Pr = 50$ 의 경우에 $Br = 0.5$ 및 10에 대한 2차

Table. 2 Comparison of the present results with those of Sparrow et al. [7]

$Br/2, N_s$	THE PRESENT RESULTS		REFERENCE [7]	
	α_{crit}	Ra_{crit}	α_{crit}	Ra_{crit}
0	3.116	1707.762	3.12	1707.765
0.25	3.117	1707.863	3.12	1707.863
2.5			3.14	1679.407
5.0	3.175	1632.081	3.18	1632.886
7.5			3.43	1279.257
10			3.53	1118.430
12.5	3.595	983.182		
20			3.74	717.201
25	3.775	602.166		
30			3.82	521.403

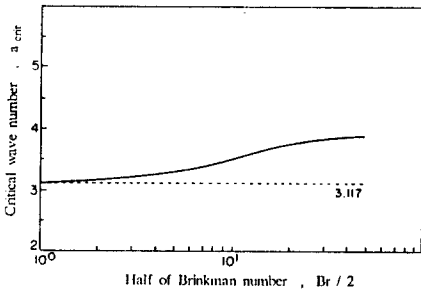


Fig. 6 The effect of the Brinkman number on the critical wave number for $Pr = 50$

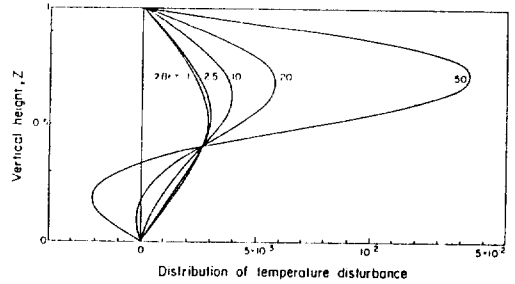


Fig. 8 Distribution of temperature disturbance T' for $Pr = 50$

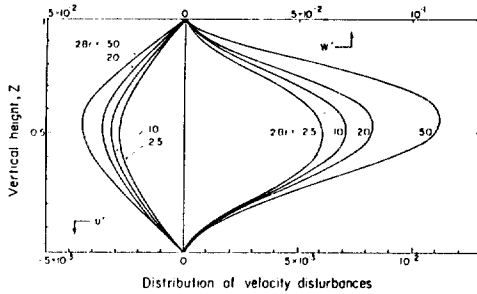
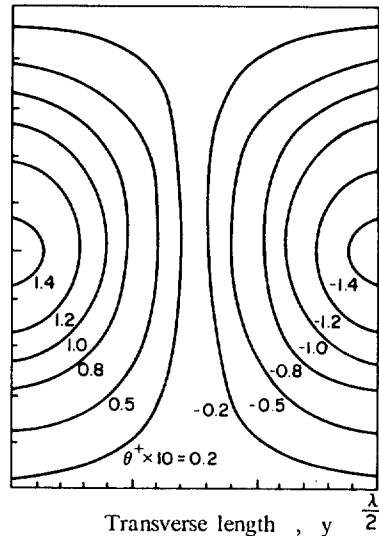
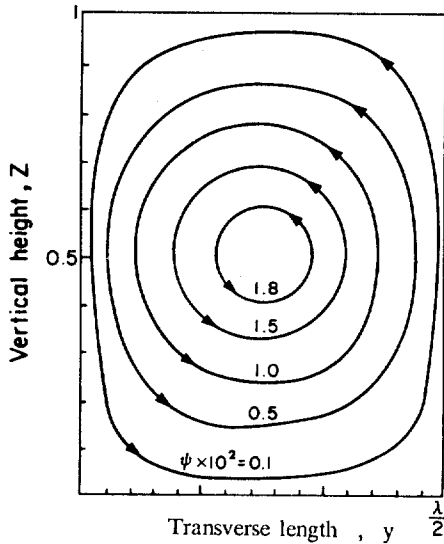


Fig. 7 Distribution of velocity disturbances (u' , w') for $Pr = 50$

유동의 유동함수 ψ 및 온도교란 T' 의 공간분포를 도시하였다. Br 이 증가함에 따라 2차 유동의 중심은 위로 이동하고 유동의 강도가 증가하며, 온도교란의 등온선이 두 개의 세포 형태로 나뉘어짐을 알 수 있다. 이는 기본 온도 분포의 최대치가 두 평판 사이에 위치하는데 기인한 것으로 판단된다.

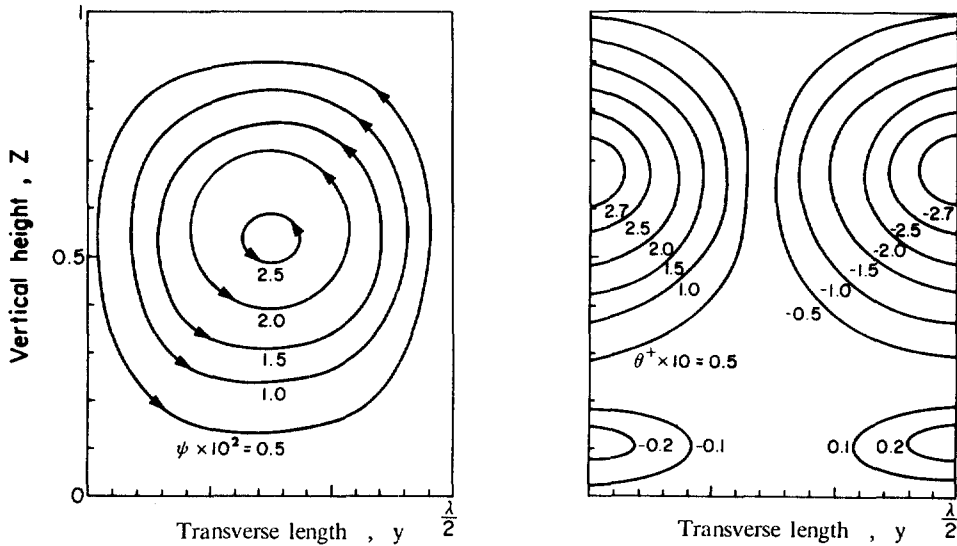
5. 결 론

서로 다른 일정한 온도로 유지되고 있는 두 개의 수평 평판 사이의 평면 Couette 유동의 안



(a)

Fig. 9 Stream functions of velocity disturbances and isothermal lines of temperature disturbance for $Pr = 50$: (a) $Br = 0.5$, (b) $Br = 10$



(b)

Fig. 9 Stream functions of velocity disturbances and isothermal lines of temperature disturbance for $Pr=50$: (a) $Br=0.5$, (b) $Br=10$

정성에 미치는 점성소산의 영향을 연구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(i) 점성소산의 영향, 즉 Br 이 증가함에 따라 유동은 더욱 현저히 불안정해진다.

(ii) 주어진 Br 에 대한 Pr 의 변화는 Ra_{crit} 의 결정에 무시할 만한 영향을 미친다.

(iii) 본 연구결과는 내부에 균일한 열원이 분포되어 있는 수평유체층의 열적 불안정성 해석결과와 정성적으로 잘 일치한다.

(iv) Br 이 증가함에 따라 2차유동의 중심은 위로 이동하고, 온도교란의 등온선은 두 개의 세포형태로 나뉘어진다.

(v) 입구구역을 고려하는 문제, 과도 속도분포를 고려하는 문제 및 동심 원통 사이의 Couette 유동 문제 등의 연구를 위한 기초가 마련되었다.

참 고 문 헌

1. Sukanek, P.C., Goldstein, C.A., and Laurence, R.L., "The Stability of Plane Couette Flow with Viscous Heating," *J. Fluid Mech.*, vol.57, part 4, pp.651-670, 1973.
2. Chandra, K., "Instability of Fluids Heated from Below," *Proc. Roy. Soc. A.*, vol.164, pp.231-242, 1938.
3. Kuo, H.L., "Perturbations of Plane Couette Flow in Stratified Fluid and Origin of Cloud Streets," *Phys. Fluids*, vol.6, p.196, 1963.
4. Deardorff, J.W., "Gravitational Instability between Horizontal Plates with Shear," *Phys. Fluids*, vol.8, p.1027, 1965.
5. Gallergher, A.P., and Mercer, A. McD., "On the Behaviour of Small Disturbances in Plane Couette Flow with a Temperature Gradient," *Proc. Roy. Soc. A.*, vol.286, p.117, 1965.
6. Ingesoll, A.P., "Convective Instability in Plane Couette Flow," *Phys. Fluids*, vol.9, p.682, 1966.
7. Sparrow, E.M., Goldstein, R.J., and Jonsson, V.K., "Thermal Instability in a Horizontal Fluid Layer: Effect of Boundary Conditions and Nonlinear Temperature Profile," *J. Fluid Mech.*, vol.18, pp.513-

- 528, 1964.
8. Tritton, D.J., and Zarraga, M.N., "Convection in Horizontal Layers with Internal Heat Generation. Experiments," *J. Fluid Mech.*, vol.44, p.673, 1973.
 9. Robert, P.H., "Convection in Horizontal Layers with Internal Heat Generation. Theory," *J. Fluid Mech.*, vol.30, p.33, 1967.
 10. Cheng, K.C., and Wu, R.S., "Viscous Dissipation Effects on Convective Instability in Plane Poiseuille Flow Heated from Below," *App. Sci. Res.*, vol.32, p.328, 1976.
 11. Cheng, K.C., and Wu, R.S., "Maximum Density Effects on Convective Instability of Horizontal Plane Poiseuille Flows in the Thermal Entrance Region," *Appl. Sci. Res.*, vol.33, pp.405-425, 1977.
 12. Hwang, G.J., and Cheng, K.C., "Convective Instability in the Thermal Entrance Region of a Horizontal Parallel-Plate Channel Heated from Below," *Trans. ASME J. Heat Transfer*, vol.95, pp.72-77, 1973.
 13. Yoo, J.Y., Park, P., Choi, C.K., and Ro, S. T., "An Analysis on the Thermal Instability of Forced Convection Flow over Isothermal Horizontal Flat Plate," *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.30, no.5, pp. 927-935, 1987.