

# Chaos의 세계 ( I )

徐 龍 權

東亞大學校 機械工學科 教授



● 1950년생  
● 유체역학(경계층박리, 후류모달)을 전공 하였으며, 열 및 유체의 비선형 동적 거동과 Chaos에 관심이 있다.

## 1. 머리말

물질의 운동에 관한 학문(dynamics)에 가장 기본적인 법칙은 Newton의 제2법칙( $F=ma$ )이다. 즉 외부에서 가한 힘들의 합은 그 물질을 가속시킨다는 내용이다. 자연과학은 이 법칙에 입각하여 세워진 지배방정식을 사용하여 자연현상을 규명하고 공학적 문제를 풀기를 노력하는 것이다. 그리고, 충분히 큰 용량의 전자계산기만 있으면, 어떤 문제든지 주어진 초기조건 및 경계조건으로 문제를 풀고 현상을 예측할 수 있다고 대부분은 믿고 있다. 그러나 이 믿음이 틀렸다(false)고는 말할 수 없지만, 현실과 연관지어 볼 때 문제점을 갖고 있다는 사실을 알 수 있다. 예를 들면, 알려진 바로는, 현재 가장 강력한 계산기도 몇일 아니 불과 몇시간 뒤의 세계적 기상변화를 신뢰성 있게 예측한다는 것이 불가능하다. 이것은, 경계조건이 너무 복잡하고 관련된 인자가 너무 많다는 데도 그 원인이 있지만, 원초적으로 지배방정식이 비선형이고 그 解가 초기조건에 아주 민감하게 변화하는 성질을 갖고 있기 때문이다. 기상학에서는 나비효과(butterfly effect)라 하는 현상이 있는데, 한갓 미물에 지나지 않는 나비의 날개짓이 작은 소용돌이를 일으키고 바람을 키우며 나아가 폭풍을 유발할 수 있다는 것이다<sup>(1)</sup>. 따라서, 어느정도 정확한 예측

을 위해서는, 경계조건이 간단하다는 가정을 하더라도, 수백 또는 수천자리의 유효숫자를 사용해야만 불과 몇일 뒤의 기상을 알 수 있으며, 이는 더 큰 용량과 더 빠른 계산속도를 요구하는 결과가 된다. 다른 예를 들면, 가장 간단한 모양의 물체주위의 유동문제에 있어서도, 그 흐름이 난류가 되면 각 지점의 짧은 미래에 대한 순간순간의 압력, 속도등의 예측은 거의 불가능해진다. 동역학의 분야는 아니지만, 인구 문제에 있어서도, 현재의 여건 및 관련 인자가 정확히 주어져 있다 하더라도, 몇십년 또는 몇년 뒤에 세계인구가 기하급수적으로 증가할지 아니면 오히려 감소할지 거의 알 수 없는 형편이다. (이와같은 초기조건에의 민감성 및 예측불가능성은 chaos의 가장 뚜렷하며 원초적인 특징이다<sup>(2)</sup>.) 따라서, 문제를 미래의 상황을 예측하려고 하는 것과 같은 결정론적(deterministic)입장에서 볼 것이 아니라 다른 각도에서 보자는 것이 chaos의 논리이다.

Chaos란, 말 그대로 무질서를 의미한다. 그러나 간단히 무질서로만 그친다면 더 이상 새로운 것은 없다. 즉 주어진 무질서한 자료로부터 통계학적 방법에 의해 평균, 표준편차, 상관관계 등의 정보를 얻는 것으로 끝난다. 그러나 여기서 말하는 chaos는 무질서 속의 內部 질서의 존재를 전제로 하는 말이다. 다시말하면, 무질서하게 보이는 연속된 자료나 어떤 운동을 다른 각도에서 보았을 때 질서를 찾을 수

있는 그런 “질서 있는 무질서”를 의미한다. chaos의 큰 특징은 앞에서 언급한 바와 같은 초기조건에 민감성이다. 역으로 말하면, 주어진 운동은 초기조건에 민감하므로 chaotic한 운동을 한다고 말할 수 있겠다. 그러나, 그렇다고 하여 주어진 운동이 초기조건에서부터 출발하여 무한히 먼 곳으로 가버리는 그러한 발산적인 것을 의미하지는 않는다. 즉 비선형 효과로 인하여 어떤 테두리를 벗어나지 않는 운동을 말한다. 이것은 비선형 운동에서 선형 운동의 limit cycle과 같은 역할을 하는 Strange attractor의 영향이다. 따라서 chaos는 비선형 방정식에서만 찾을 수 있다. Strange attractor는 그 속을 들여다 보면 무척 재미있는 구조를 갖고 있음을 알 수 있다. 큰 구조 속의 작은 구조, 또 그 속의 더 작은 구조, .....와 같이 유사한 구조의 무한한 행진을 볼 수 있는데, 이것을 fractal set라 부른다. chaos의 이러한 특징들은 열거하기에 지리할 만큼 많은 분야에서 현재 속속 발견되고 있다. 그 중에서 가장 초기의 발견은 1963년 Lorenz<sup>(3)</sup> Bénard convection에 관한 연구에서 있다.

제2장에서는 유동문제의 대표격인 Lorenz chaos를 살펴보고, 3장에서는 동역학 문제인 Duffing-Holmes방정식, 4장에서는 map의 대명사인 logistic map을, 5장에서는 기타 무수히 많은 분야 중 기계공학에 가장 가까운 것들을 골라 연구된 내용을 소개하고 그 특징들을 살펴본다. 6장과 7장에서는 chaos의 정량화를 위한 Lyapunov지수와 fractal dimension의 개념과 그 계산 방법을 다룬다. 8장에서는 현재 까지도 그 의문이 풀리지 않은, chaos학문의 큰 관심사인, 난류의 시작문제를 취급하고, 마지막으로 9장에서는 문제점, 과제 및 앞으로의 전망을 살펴 보기로 한다.

## 2. Bénard Convection에서의 Chaos

1963년 M.I.T.의 기상학자 Lorenz는 대기중의 자연대류 문제를 3개의 비선형 1차 상미분

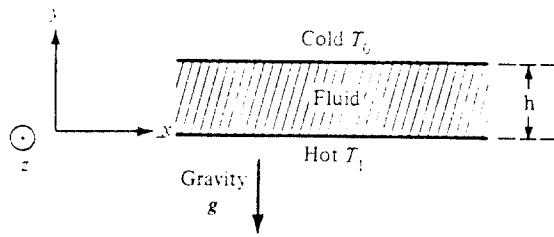


그림 1 Bénard convection 문제

방정식으로 모델화하여 해석함으로써 chaos의 학문에 있어서 큰 업적을 남겼다<sup>(3)</sup>. 그가 취급한 문제는 Bénard convection, 즉 두 평판(밀판이 고온상태) 사이에 있는 유체가 부력에 의해 순환하는 문제이다(그림 1참조). 두 평판 사이의 거리를  $h$ , 두 평판의 온도차를  $\Delta T$ , 유체의 동점성계수를  $\nu$ , 열팽창계수를  $\alpha$ , 열전도율을  $k$ , 중력가속도를  $g$ 라 할 때, 본 문제의 중요한 인자인 Rayleigh수는

$$Ra = \frac{gah^3\Delta T}{\nu k} \quad (1)$$

가 된다. 처음  $Ra$ 값이 작을 때는 유체의 유동은 없고 열전달은 순전히 전도에 의해서만 이루어진다. 그리고 어떠한 파장의 미소한 교란에 대해서도 그 상태가 파괴되지 않는다. 안정성 해석에 의하면 그러나  $Ra = R_c = 27/4\pi^4$ 이 되면 파장이  $2\sqrt{2}h$ 인 파형이 의해서 그 상태를 유지하지 못하고 순환유동을 동반하게 된다.

Lorenz는 이 순환유동의 動的특성을 규명하기 위하여 무차원 유동함수  $\psi$ , 무차원 온도  $\theta$ 를

$$\psi = \sqrt{2}X(t) \sin\left(\frac{\pi ax}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) \quad (2a)$$

$$\theta = \sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi ax}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi h}{h}\right) \quad (2b)$$

로 전개( $a$ 는 순환유동의 파장에 관계되는 상수임)하고 운동량방정식과 에너지방정식에 각각 대입하여 아래와 같은  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ 에 대한 3

개의 1차 비선형 상미분 방정식을 도출하였다.

$$\dot{X} = \sigma(Y - X) \quad (3a)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (3b)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (3c)$$

여기서  $\sigma = \nu/k$  (Prandtl 수),  $r = Ra/R_c$ ,  $b = 4(1+a^2)^{-1}$ 이다. 두 인자를  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ 으로 고정(Lorenz이후 가장 흔하게 사용하는 값임)하고  $r$ 을 변화시켰을 때, 식 (3)은 다음과 같은 성질을 가짐을 알 수 있다<sup>(4,5)</sup>.

- (i)  $r > 1$ 時 原點은 안정성을 잃고(unstable saddle), 두 개의 서로 다른 임계점이 나타나는데,  $r < 24.06$ 이면 이 두점은 안정하다. 이 상태가 정상대류(steady convection)이다.
- (ii)  $r > 24.74$ 이면 이 두 점도 불안정화하여(unstable spiral), 유동은 무질서한(chaotic) 성격을 띄게 된다.
- (iii)  $24.74 > r > 24.06$ 에서는 초기조건에 따라서 解는 정상대류 또는 무질서 운동을 선택하게되어 hysteresis의 효과를 보인다<sup>(6)</sup>.
- (iv)  $r > 24.06$ 에서도 해는 정상대류를 향한 천이과정을 거치게 되는데, 이 천이과정의 경과시간은 초기조건에 민감하며  $r$ 의 증가에 따라 증가한다는 것이 발견되었다<sup>(5,6,7)</sup>.

이제  $r=28$ (무질서 지역)에 대한 해의 특성을 살펴 보기로 하자. 그림 2는  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ 의 time series이다. 이 그림에서 우선 알 수 있는 것은,  $X$ 와  $Y$ 는 다같이 두 saddle point 주위를 번갈아 가며 회전하는데 그 주기를 전혀 예측할 수 없다. 그리고 전반적으로 볼 때 반복성(periodicity)을 전혀 찾을 수 없다. 이 점은 그림 3의 Fourier 스펙트럼에 의해 확인할 수 있다. 그림 4는 해의 거동을 phase plane ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ )에 나타낸 것으로서, 두개의 unstable spiral점과 한 개의 unstable saddle 점 주위를 일정한 규칙없이 회전하는 것처럼 보인다. 그림 5는 세 평형점 주위의 흐름특성

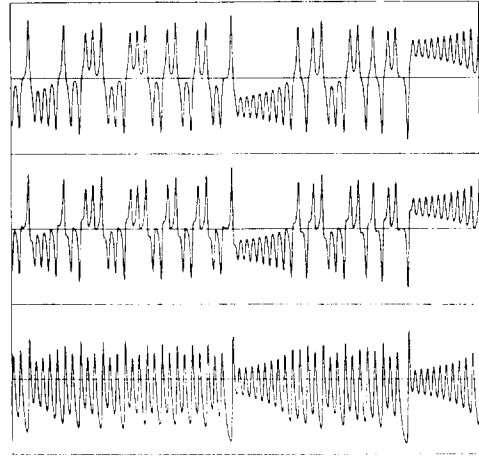


그림 2 Lorenz 시스템의 타임시리즈 : 위에서부터  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$

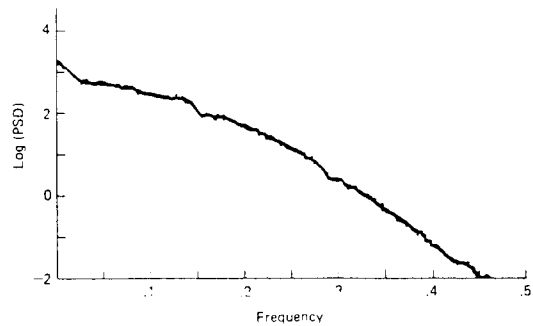


그림 3 Lorenz 시스템의  $X(t)$ 에 대한 파워 스펙트럼

을 스케치한 것이다. 그림 4의 흐름구조에 대해 좀더 살펴 보기 위하여 이것을  $X$ - $Y$ 평면과  $X$ - $Z$ 평면에 투영한 모양을 그림 6에 나타내었다. 우선 개략적으로 보면, 이것은 마치 3개의 평면을 그림 7(a)와 같은 방법으로 서로 붙인 것(그림 7(b))같이 생각된다. 그러나 실제 모양은 이러한 초보적인 것보다 훨씬 더 복잡하고 교묘한 모양을 이루고 있다(상세하고 topological한 구조설명은 참고문헌 [8, 9]에

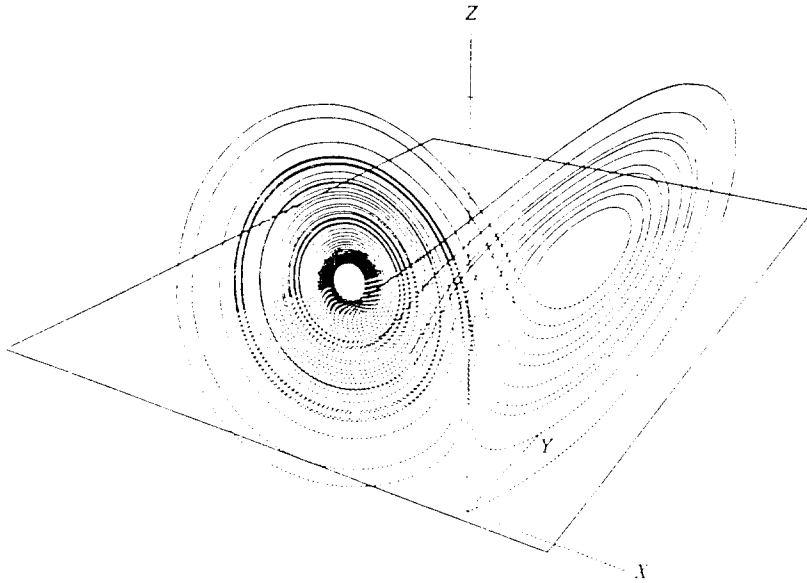


그림 4 Lorenz 시스템의 Chaotic trajectory 수평면은  $z=27$ 이다.

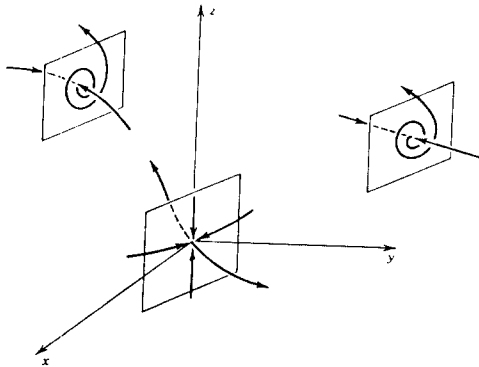


그림 5 Lorenz 방정식(3)의 세 평형점 주위의 흐름 특성

되어 있다.) 이 표면을 벗어난 지점을 초기조건으로 부여하더라도 시스템 (3)은 즉시 궤적을 끌어당겨(attract) 이 面上에서 운동하도록 한다. 이러한 attracting은 선형 미분 방정식에서도 볼 수 있으나, 그 운동이 정체적(stationary ; stable equilibrium point 주위의 운동)이거나 단순히 주기적(periodic ; limit

cycle주위의 운동) 또는 준주기적(quasiperiodic)이라는 점에서 본 현상과 다르다. 이러한 chaotic한 성격의 attractor를 strange attractor라 부르고 있다(위의 세가지 예와 같은 고전적 형태의 attractor를 simple attractor라 부르기도 한다<sup>(4)</sup>).

Strange attractor상의 운동은 결코 서로 교차하지 않고, 한번 회전할 때마다 새로운 면을 형성한다<sup>(6)</sup>. 즉, strange attractor는 外見上 유한한 갯수의 면으로 이루어진 것같이 보이지만, 속을 더 자세히 들여다 보면 무수히 많은 면으로 구성되어 있다. 그러면서도 이면들은 공간상에서 유한한 체적을 점유하는 이른바 fractal set의 특성을 갖고있다<sup>(2)</sup>. Chaos에 있어서 fractal현상은 필수적이다. Fractal개념은 제7장에서 다루기로 한다.

한편 Lorenz는  $X, Y, Z$ 가 시간  $t$ 에 대하여 chaotic한 거동을 보임을 알았지만, 그에 그치지 않고 더욱 깊이 연구한 결과, 그를 유명하게 한 아마도 가장 결정적인 계기가 된 것을 발견하였다. 그는  $Z$ 의 最大値( $Z_1, Z_2,$

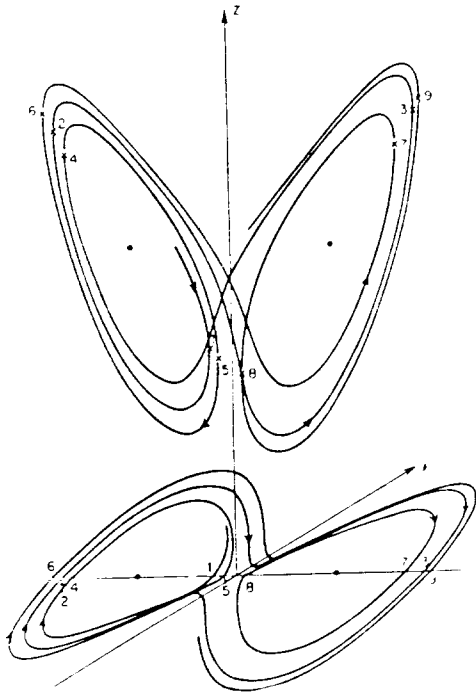
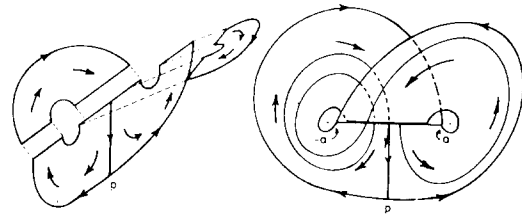


그림 6 Lorenz System의 해(궤적)를 X-Y평면(아래)과 X-Z 평면(위)에 투영한 모습.

$Z_3, \dots$ )를 누적시키고  $Z_m$ 을 횡축,  $Z_{m+1}$ 을 종축으로 하여 plotting시켜 보았다. 그림 8은 그 결과로서, 놀라운 사실은 모든 점들이 뿔 모양의 곡선상에 집합하였다. 이 곡선은 얼핏 하나의 단일 선으로 된 것 같으나, 사실은 무수히 많은 곡선들의 집합(fractal set)이다<sup>(4)</sup>. 다만 그 인접도가 높아 하나로 보일 뿐이다. Lorenz attractor상의 무질서 운동은 이 1차원 map에서 쉽게 이해될 수 있다.



(a) 조립 전 (b) 조립 후

그림 7 Lorenz attractor를 보기 쉽게 도해한 것

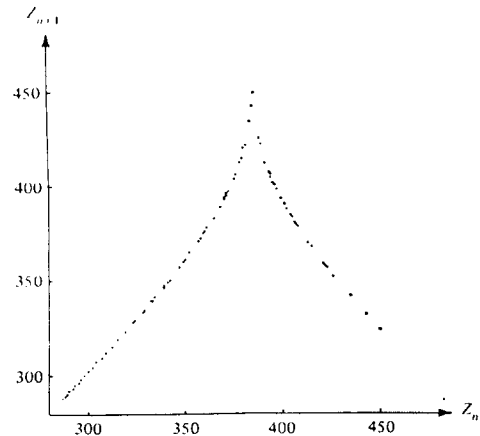


그림 8 현재의 Z의 최대치  $Z_{n+1}$  대 바로 이전의 Z의 최대치  $Z_n$  (lorenz system)

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{4}$$

Guckenheimer & Holmes<sup>(8)</sup>는  $f(x) = 1 - \beta|x|^\alpha$ 로 근사화된 mapping을 통해서 Lorenz attractor의 성격을 조사하였다. 비선형 map의 가장 초보적 형태인 logistic map을 제4장에서 소개한다.

