

# 전산유체역학과 유한요소법

손 정 락

한국기계연구소 열유체연구실 선임연구원



● 1958년생  
● 유한요소법과 전산유체역학을 전공하였으며, 전산유체역학을 이용한 유체기계 설계등에 관심을 가지고 있다.

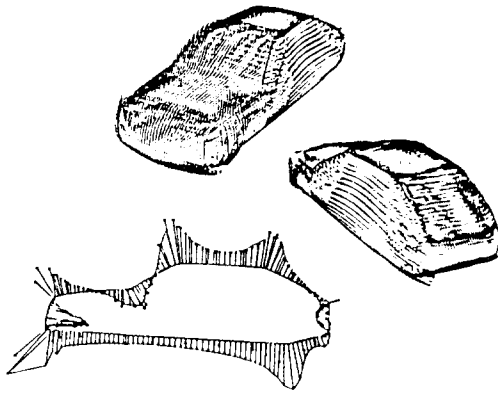
## 1. 머리말

수치적인 방법과 전자계산기를 이용하여 유동현상을 해석적으로 고찰하는 전산유체역학 (computational fluid dynamics)은 수십년동안 항공기, 선박, 자동차 등의 설계분야와 최근에 와서는 전자부품산업, 인체공학 분야에 이르기 까지 여러분야에 걸쳐 빠른 속도로 그 응용범위가 확대되어 왔다. 전산유체역학은 여러분야에 걸쳐 빠른 속도로 그 응용범위가 확대되어 왔다. 전산유체역학은 설계하고자 하는 물체주위의 유동 해석등을 통해서 직접 설계에 필요한 정보를 제공하는 경우 (그림 1(a))와 실험적을 해석하기 곤란하고 복잡한 물리현상을 규명하기 위한 수단(그림 1(b))등 크게 두가지 목적으로 이용되어지고 있다. 이중 첫째 경우를 위해서는 보다 복잡한 물체를 다룰 수 있는 능력이 향상되어 왔고 둘째 경우를 위해서는 수학적 모델개발 등의 분야에 관심을 기울여 왔으며 아울러 수치계산의 정확성을 향상시키고 계산시간을 줄일 수 있는 계산방법 (algorithm) 개발에 계속적인 발전이 있어 왔다.

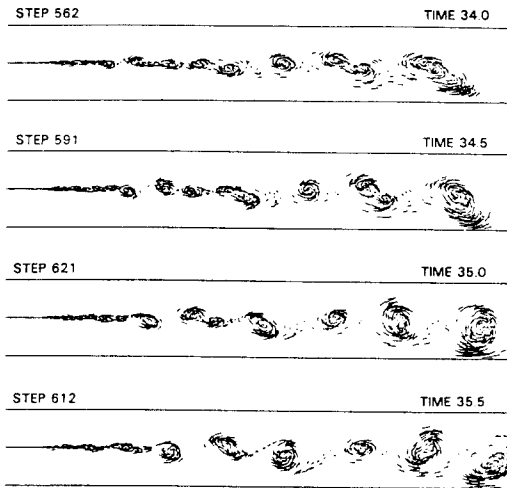
또한 전산유체역학의 발전을 전자계산기의 계산능력 향상과 함께 이루어졌는데 그림 2에서와 같이 과거 약 25년동안 기억능력은 약 10,000배, 처리능력은 100,000배 이상으로 증가되었다.

설계분야에 있어서의 전산유체역학은 CAE (computer-aided engineering)를 위한 구조해석 소프트웨어 (nastran, adina, ansys 등)의 발달과 함께 그의 중요성이 더욱 깊이 인식되고 있다. 그러나 아직은 전산유체역학이 조직적인 체계나 일반적인 법칙에 의해서 사용되어지기 보다는 사용자의 경험 또는 계산능력에 따라 그 응용범위가 제한되므로 science의 한 분야라기 보다는 art로 보아야함이 타당할 것이다. 따라서 전산유체역학이 CAD (computer-aided design)의 한 분야로 정립되어지기 위하여 보다 일반적으로 사용가능한 계산방법이 개발되어야 하는데 이를 위해서는 (1) 매우 복잡한 3차원 유동영역에서의 해석에 어려움이 없어야 하며, (2) 기존의 구조해석 프로그램과의 호환성이 높아야 하며, 그리고 (3) 계산시간이 적어도 구조해석 프로그램 정도 수준까지 빨라져야 한다. 이중 (1)과 (2)를 해결하기 위해서는 오랫동안 전산유체역학의 도구로 사용되어진 유한차분법 (finite difference method)외에 유한요소법 (finite element method)의 도입이 필수적으로 요구되고 있다. 다만 유한요소법의 도입으로 인한 계산시간의 증가는 복잡한 계산영역을 다루기 위한 불규칙 요소망 (unstructured mesh)과 직접적인 관련이 있으므로 이에 대한 보완이 필요하다.

유한요소법의 열유체 분야에의 응용은 1972



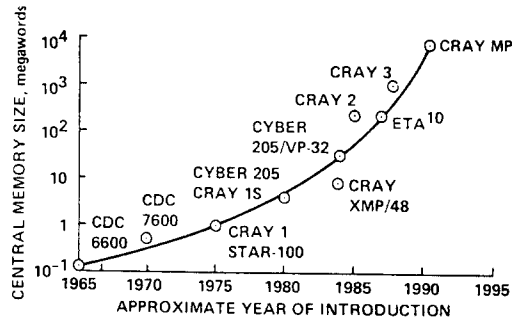
(a)



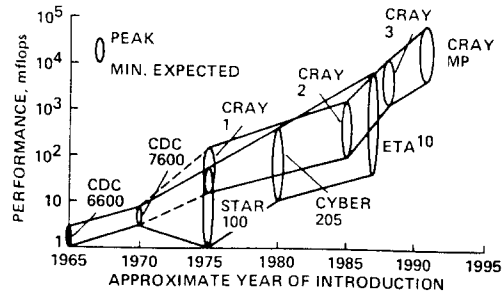
(b)

그림 1 전산유체 역학의 응용에, (a) 자동차 주위의 속도 및 압력 분포(Schmidt<sup>(1)</sup>에서 인용), (b) Shear layer에서 Vortex의 발달(Ghoniem과 Ng<sup>(2)</sup>에서 인용)

년도 Oden과 Welford<sup>(4)</sup>에 의해서 시작되었으며 Chung<sup>(5)</sup>에 의해서 그 개념이 정리되기 까지를 초기단계로 볼수 있다. 이 기간동안에는 Galerkin방법을 유동방정식에 응용하여 비압축성 층류유동 해석을 위한 계산방법 개발<sup>(6)</sup>에 주로 관심을 두었으며 그후 약 6년 동안은 비압축성 유동에서 압력을 효과적으로 다룰 수 있는 방법에 대한 수학적 고찰 및 그의 응용<sup>(7)</sup>



(a)



(b)

그림 2 전자계산기 발달 현황(Kutler등<sup>(3)</sup>에서 인용), (a) 기억용량의 증가상태, (b) 처리능력의 향상 상태

과 높은 Reynolds수를 가지는 유동해석을 위한 Upwinding 방법이 개발, 정리되었다<sup>(8)</sup>. 그리고, 1985년 Zienkiewicz등<sup>(9)</sup>에 의해서 압축성 유동을 해석할 수 있는 계산 방법을 개발한 후 현재까지 유한요소법은 압축성, 비압축성 유동을 비롯하여 난류 및 반응을 동반하는 유동<sup>(10)</sup>에 이르기까지 그 응용범위가 확대되었다. 특히 최근에 들어서는 Fidap, Flowtran등 유한요소법을 이용한 유동해석 전용 프로그램들이 시판되고 있으며, Ansys, Nisa등 기존의 구조해석 프로그램에도 유동해석 부분이 첨가되고 있는 경향이다.

이 글에서는 이상과 같은 유한요소법을 이용한 전산유체역학 기법들을 소개하고 그 응용예들을 보여주고자 한다.

## 2. 비압축성 유동 (Incompressible Flows)

### 2.1 계산 방법 (Algorithms)

문제를 간단히 생각하기 위해서 유동을 등온 층류 유동이라 가정했을 때 비압축성 유동의 경계 (boundary)  $\Gamma$ 로 둘러싸인 유동영역 (flow domain)  $\mathcal{Q}$ 내에서의 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

운동방정식 (momentum equation)

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} = f_i \quad \text{in } \mathcal{Q} \quad (1)$$

연속방정식 (continuity equation)

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad \text{in } \mathcal{Q} \text{ and on } \Gamma \quad (2)$$

경계조건

$$U_i = U_{oi} \text{ on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = h_{oi} \text{ on } \Gamma_2$$

여기서  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ 이다.

Galerkin방법을 식 (1)과 (2)에 응용하여 대수방정식을 유도하면 다음과 같은 매트릭스 방정식이 유도될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K & -C \\ -C^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ O \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $K$ 는 운동방정식 내의 convection 및 diffusion항을 나타내며  $C$ 는 continuity항, 그

리고  $F$ 는 기타를 나타낸다.

비압축성 유동을 수치적으로 해석할 경우 가장 심각한 문제는 물리적으로 acoustic wave의 전파 속도가 무한대이므로 지배방정식이 타원형 (elliptic type)으로 되면서 압력의 지배방정식이 되어야 할 연속방정식[식 (2)]에 압력에 관계되는 항이 나타나지 않으므로 해석 발생되며, 이로 인한 문제는 유한요소법에서도 예외일수가 없다. 이러한 어려움을 해결하기 위해서 유한요소법에서는 크게 두가지의 계산방법이 개발되었는데 첫째는 mixed interpolation method이고 둘째는 penalty method이다.

Mixed interpolation method의 기본개념은 연속방정식을 유동을 위한 지배방정식으로 보지 않고 질량보존을 위한 구속조건 (constraint condition)으로 취급하여 결과적으로 식 (4)에서의  $P$ 를 Lagrangian multiplier로 취급하는 것이다. 일반적으로 유동을 구속하는 구속조건 (C-matrix)의 수는 유동을 지배하는 방정식 (K-matrix)의 수보다 적어야 하는데 이를 위해서는 각 유한요소내 각점의 압력값들을 Interpolation해 주는 보간함수 (interpolation function)의 차수를 속도를 위한 보간함수의 차수보다 한단계 낮은 차수를 채택함으로써 가능하다. 따라서 mixed interpolation method란 압력과 속도를 각각 다른 보간함수를 써서 interpolation함에 따라 이름지어졌으며 보간함수에 따라 그림 3과 같이 각 유한요소내에서

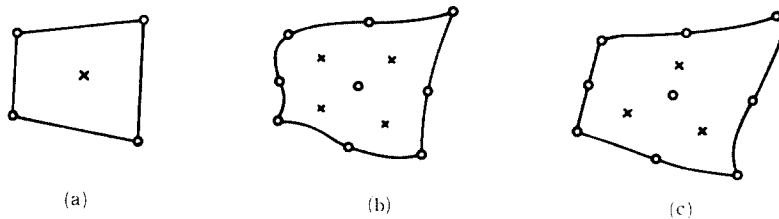


그림 3 2차원 영역에서의 Mixed interpolation 조합예, (a) Bilinear velocity constant pressure, (b) Biquadratic velocity bilinear pressure, (c) Biquadratic velocity linear pressure,  $\circ$ : 속도,  $\times$ : 압력

속도와 압력의 조합이 있을 수 있다.

그림 3외에도 다른 많은 조합이 있을 수 있으나 수학적으로 증명된 가장 안정한 조합은 그림 (c)에 나타난 경우<sup>(11,12)</sup>로 알려져 있으며, 그림 3(a)의 경우가 가장 간단하고 풀어야 할 대수방정식의 band가 가장 적으므로 쉽게 응용되어 질 수 있으나 비압축성의 유동 해석에서 일반적으로 발생하는 바둑판형(checkerboard-type) 압력해가 나타나는 단점이 있다. 그러나 바둑판형 압력해의 균일성에 착안하여 후처리 과정(postprocessor)에서 smoothing technique를 도입<sup>(13)</sup>하거나 수학적으로 정확한 경계조건을 가진 새로운 형태의 압력에 대한 지배방정식을 유도<sup>(14)</sup> 함으로써 이는 극복될 수 있다고 본다. Mixed interpolation method의 가장 큰 장점은 수학적으로 가장 확실한 비압축성 (incompressibility) 조건을 만족시킬 수 있다는 것이며 단점은 속도와 압력을 묶어서 풀므로해서 다른 방법보다 계산량이 증가되는 것이다. 이를 위해서는 frontal method가 가장 일반적으로 사용되고 있다. 그림 4는 mixed interpolation method를 이용한 수치해석 결과<sup>(15)</sup>의 한 예를 보여준 것이다.

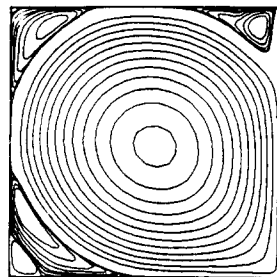
Penalty method는 식 (4)의 연속방정식을 다음과 같이 변형 시킴으로써 얻어질 수 있다.

$$-C^T U = \frac{1}{\epsilon} M P \quad (5)$$

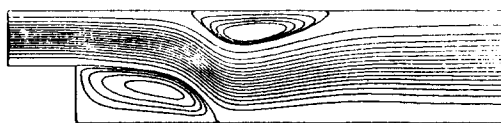
여기서  $\epsilon$ 는 penalty변수으로써 일반적으로  $10^5 \sim 10^8$ 의 크기를 가진다.

식 (5)의 우측항의 물리적인 의미로는 가상 압축성(pseudo-compressibility)로 표현될 수 있다. 다시 말해서  $\frac{1}{\epsilon} M P$ 는 acoustic wave 전파속도가 매우 큰 (완전비압축성일 경우엔 무한대) acoustic항을 의미한다. Penalty method의 수학적 의미는 Oden<sup>(16)</sup>에 잘 언급이 되어 있다.

식 (5)를 식 (4)의 운동방정식에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.



(a)



(b)

그림 4 Mixed interpolation을 이용한 2차원 비압축성 층류유동의 유선도 (Sohn등<sup>(15)</sup>에서 인용), (a) 2차원 lid-driven cavity flow,  $Re=10000$ , (b) 2차원 backward-facing step flow,  $Re=900$

$$(K + \epsilon C M^{-1} C^T) U = F \quad (6)$$

윗식의 특징은 운동방정식이 압력항과 상관없이 표현되는 것이며 이 식으로부터 속도를 구한 다음 후처리 과정에서 식 (5)를 이용하여 압력을 구할 수 있다. 다만 주의해야 할 점은 penalty항인  $\epsilon C M^{-1} C^T$ 를 처리하는데 있어서 C-매트릭스를 구할 때 앞에서 언급한 mixed integration method를 이용하거나 전체를 감소적분법(reduced integration method)를 이용하는 등 두가지 방법중의 한가지를 사용해야 한다. 이에 대한 비교는 Engelman등<sup>(7)</sup>에서 찾을 수 있다.

그외 비압축성 유동을 다루는 계산방법으로는 유한차분법에서 널리 알려진 SIMPLE방법을 유한요소법에 도입하여 지배방정식들을 하나하나씩 단계적으로 풀어나감으로써 계산용량을 줄일 수 있는 방법<sup>(15)</sup>과 비정상 유동에서 출발하여 operator-splitting방법을 이용하여 속도는 explicit하게 처리하고 압력은 implicit

하게 처리함으로써 acoustic 속도가 계산의 안정성에 영향을 미치지 않게 하는 방법<sup>(17)</sup> 등이 발표되었다.

### 2.2 대류의 영향이 큰 유동(Convection-Dominated Flow) 해석 방법

Galerkin방법을 대류항 (convection term)에 응용했을 때의 수치방정식은 유한차분법과 마찬가지로 2차의 정확도 (2nd order accuracy)를 가지므로 유동의 속도가 매우 큰 경우에는 계산결과가 매우 불안정하다. 이를 해결하기 위해서 유한차분법에서 널리 알려진 upwinding방법, 즉, 유동속도가 큰 경우엔 상류의 영향만을 고려함으로써 계산의 정확도는 1차로 낮추는 대신에 계산의 안정성을 향상시키는 방법을 주로 도입한다. 그러나, 유한차분법과는 달리 유한요소법은 각 유한요소 단위로 계산이 이루어 지므로 유한요소내에서 유동의 방향을 찾아내는데 어려운 점이 있다. 이를 해결하기 위해서 Brooks와 Hughes<sup>(8)</sup>가 개발한 Streamline Upwind/Petrov-Galerkin(SUPG)방법이 가장 널리 사용되어지고 있다. SUPG의 효과는 그림 5에 잘 나타나 있다.

### 2.3 난류유동해석

앞서 언급한 유한요소법을 이용한 계산방법들을 실제문제에 적용하기 위해서는 난류유동 해석을 위한 방법이 개발되어야 한다. 유한요소법의 난류유동에의 응용은 영국의 Hutton과 Smith등에 의하여 꾸준히 시도되어져 왔고 그에 대한 종합적인 정리가 Hutton, Smith 그리고 Hickmott<sup>(18)</sup>에 상세히 기술되어 있다. 난류유동 해석에 있어서의 여음은 난류 모델 자체의 여러 비선형항들을 수치적으로 안정성을 유지하면서 효과적으로 다룰수 있는가의 문제와 유한차분법 분야에서 개발, 발전되어온 벽함수(wall function)등 특수한 부분들을 프로그램의 구조가 완전히 다른 유한요소법을 이용한 프로그램에 어떻게 이용하는가의 문제등인데 최근에 들어와서는 이러한 문제들이 거의 해결이 되었고<sup>(10,19)</sup>, Benchmark실험결과  $k-\epsilon$  모델을 이용하였을 경우 유한차분법과 동등한 결과가 나올 수 있음이 밝혀졌다<sup>(20)</sup>. 다만 보다 복잡한 유동영역을 해석하기 위한 난류모델 개발이 필수적으로 뒷받침되어야 만이 유한요소법이 응용범위를 더욱더 넓힐 수 있다. 그림 6은 실제문제에 있어서 유한요소법의 난류유동

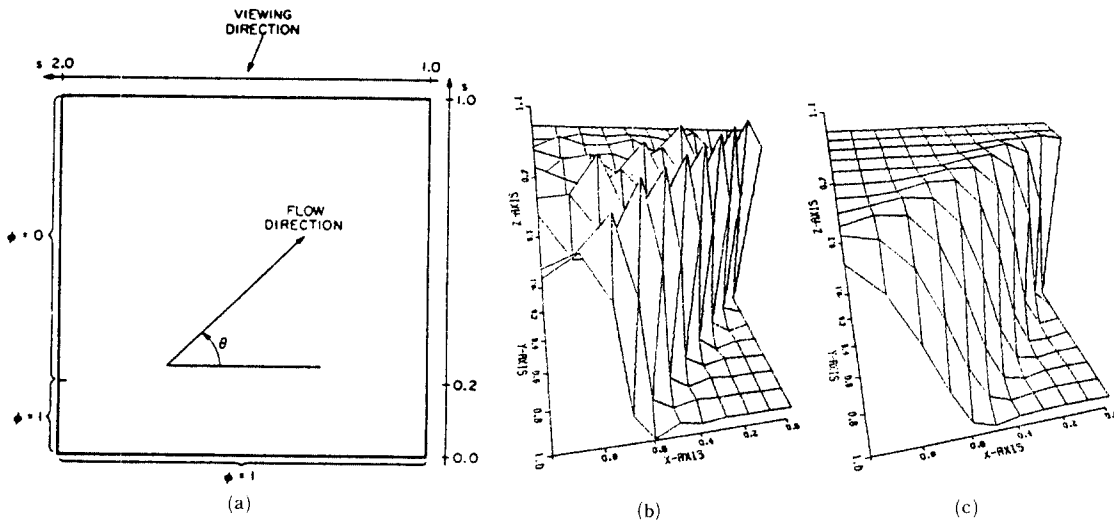


그림 5 SUPG의 영향을 나타내는 Scalar방정식을 이용한 예, (a) 유동영역 및 경계조건, (b) Galerkin 방법을 사용했을 경우, (c) Galerkin방법과 SUPG를 함께 사용했을 경우

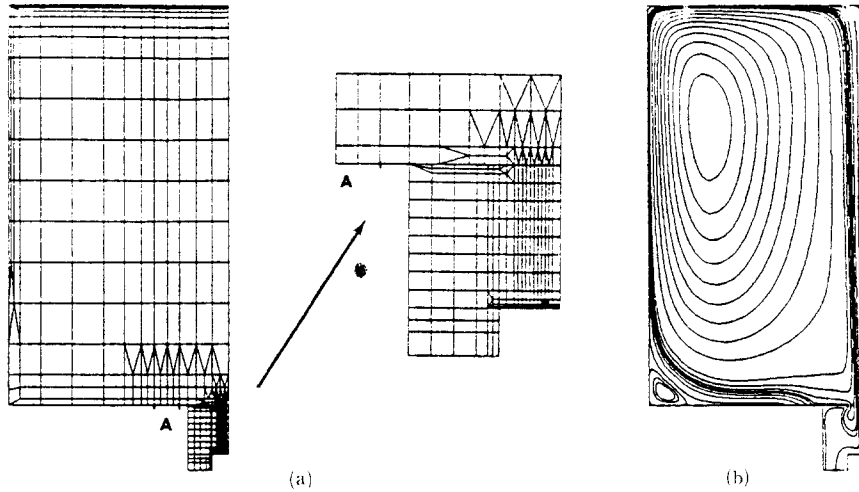


그림 6 복잡한 형태의 건물내부의 난류유동 해석(Hutton등<sup>(18)</sup>에서 인용), (a) 유한 요소망, A:출입구, (b) 유선도

해석의 예를 보여준 것인데 불규칙 유한요소망을 이용하여 유동의 변화가 가장 심한 입구 부분과 재순환 영역에 조밀하게 요소망을 구성함으로써 계산 결과의 향상을 기대할 수 있다.  $k-\epsilon$  모델을 이용한 계산방법은 FIDAP, FLOWTRAN 등 시판 프로그램들에 이미 응용이 된 상태이다.

### 3. 압축성 유동(Compressible Flows)

#### 3.1 계산방법(Algorithms)

작동유체를 비점성 이상가스(ideal gas)로 가정했을 때 압축성 유동의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial X_i} = 0 \quad (7)$$

여기서

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1 u_1 + P \delta_{11} \\ \rho u_2 u_1 + P \delta_{12} \\ \rho u_3 u_1 + P \delta_{13} \\ u_1(\rho e + P) \end{bmatrix}$$

그리고

$$P = (\gamma - 1) \rho \left( e - \frac{1}{2} u_i u_i \right)$$

현재까지 알려진 압축성 유동해석을 위한 가장 일반적인 방법은 Donea<sup>(21)</sup>에 의해서 처음으로 개발되었고 Zienkiewicz등<sup>(9)</sup>에 의하여 일반화된 Taylor-Galerkin 방법이다. 특히 Zienkiewicz등<sup>(9)</sup>에 의해서 정립된 2단계 방법(two-step method)은 유한차분법에 있어서 Lax-Wendroff 방법과 그 기본개념이 일치한다. Taylor-Galerkin 방법이란 시간영역에서 Taylor-series를 2차까지 정확도(2nd order accuracy)를 유지할 수 있는 방법이다. 또한 explicit 시간적분을 함으로 인해 매트릭스 inversion의 과정이 필요없이 연속적 방법(iterative method)를 이용하여 대수방정식을 풀수가 있기 때문에 특히 supercomputer의 vectorization 과정에서 매우 유용하게 쓰일 수 있는 장점이 있다. 다만 explicit 시간 적분으로 인해 조건적으로 안정(conditionally stable)하므로 시간적분 구간을 크게 정할수가 없어 정상상태의 해를 구할때는 비경제적인 점이 단점이다.

2단계 Talyor-Galerkin방법을 식 (7)에 적용하는 과정은 다음과 같이 요약될 수 있다.

제 1단계

$$\left(\int_{\Omega} P_e P_e d\Omega\right) U_e^{n+1/2} d\Omega = \left(\int_{\Omega} N_j P_e d\Omega\right) U_j^n - \frac{1}{2} \Delta t \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial x_i} P_e d\Omega\right) F_{ij}^n \quad (8)$$

제 2단계

$$\left(\int_{\Omega} N_j N_k d\Omega\right) \delta U_j = \Delta t \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial x_i} P_e d\Omega\right) F_{ie}^{n+1/2} - \Delta t \left(\int_{\Gamma} l_i N_k P_e d\Gamma\right) F_{ie}^{n+1/2} d\Gamma \quad (9)$$

여기서  $\delta U_j = U_j^{n+1} - U_j^n$ 이다.

특히, 제2단계에서는  $U = N_j U_j$ ,  $F_i = P_e F_{ie}$ 로 각각 interpolation되었는데 보간함수  $N_j$ 는 1차원의 선형함수인 반면  $P_e$ 는 정수(constant, 실제로 1.0)이다. 따라서, 각 유한요소내의 플럭스  $F_i$ 는 일정한 값으로 interpolation된 형태이다. 또 한가지 coding을 할 때 주의해야 할 점은 식 (9)의 경계적분항은 유동영역의 경계에서의 플럭스를 유출, 유입에 관계되므로 정확하게 계산해 주어야 할 필요가 있다. 식 (9)를 대수방정식 형태에서 풀고자 할때 비정상상태(unsteady state)에서는 Jacobi iteration을 주로 사용하며 정상상태(steady state)일 경우에는 Lumped mass방법을 쓰는데 어느 경우에도 matrix inversion과정이 필요하지 않다.

Taylor-galerkin 방법은 공간 영역(spatial domain)에서 2차 정확도를 가지므로 충격파 등의 급격한 불연속성이 존재할때는 불안정한 해가 존재하므로 이를 제거할 수 있는 또다른 방법이 반드시 필요하다. 이를 위해서 가장 손쉽게 사용될 수 있는 방법이 Lapidus<sup>(22)</sup>에 의해서 개발되었고 Lohner<sup>(23)</sup>에 의해 처음으로 유한요소법에 적용시킨 가상점성법(artificial viscosity method)이다. 가상 점성법을 Taylor-Galerkin방법에 explicit하게 적용시키는 과정은 다음과 같다.

$$U_s^{n+1} - U^{n+1} = \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ii} \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x_i} \right) \quad (10)$$

여기서

$$K_{ii} = C_k h^2 \left| \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_2} \right| \text{이다.}$$

$U_s^{n+1}$ 은 가상점성법을 적용시킨후 다시 구해진 해를 나타내고  $h$ 는 각 유한요소법의 특성변위(characteristic length), 그리고  $C_k$ 는 임의의 상수이다. 가상점성법과 함께 Taylor-Galerkin법을 이용하여 구한 해의 한예를 그림 7에 나타내었다.

그러나 Lapidus의 가상점성법은 numerical diffusion이 너무 크므로 실제 정확한 해를 요구하는 경우에는 부적절하다. 이를 위하여 Lohner<sup>(25)</sup>에 의해서 역시 유한차분법에서 개발된 FCT(flux-corrected transport)방법이 유한요소법에 도입하였다. FCT방법의 장점은 충격파 등의 불연속 해를 가장 정확하게 잡아 줄 수 있는 것외에도 유한요소법의 가장 큰 장점

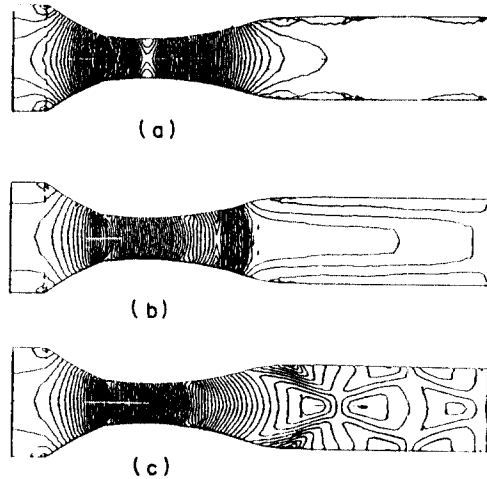


그림 7 Taylor-Galerkin 방법을 이용한 laval nozzle 내부의 압축성 유동해석 (Sohn 등<sup>(24)</sup>에서 인용), (a) 아음속 입구조건-아음속 출구조건, (b) 아음속 입구조건-아음속 출구조건(충격파가 존재하는 경우), (c) 아음속 입구조건-초음속 출구조건

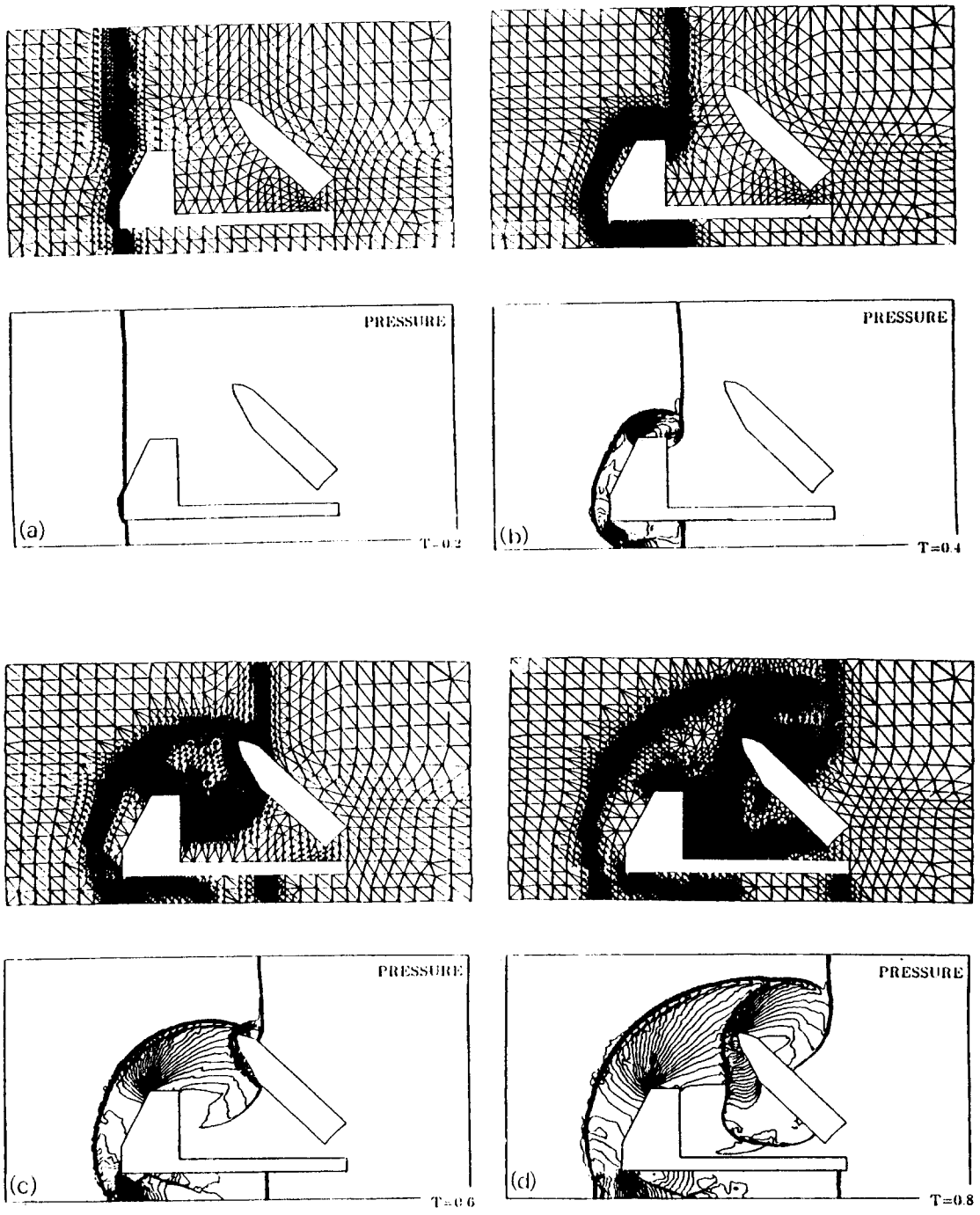


그림 8 적응적 소요망을 이용한 미사일 발사대와 충격파의 interaction 해석, (Lohner<sup>(29)</sup>에서 인용), (a)  $T=0.2$ , (b)  $T=0.4$ , (c)  $T=0.6$ , (d)  $T=0.8$ , 여기서  $T$ 는 무차원 시간을 나타냄



인 불규칙요소망(unstructured mesh)에 응용할 수 있다는 것이다.

Taylor-Galerkin 방법외에도 압축성 유동을 풀수있는 방법들이 많이 개발되어 있지만 그중에서도 Hughes와 Tezduyar<sup>(26)</sup>에 의해서 개발된 SUPG형 implicit방법이 있다. 이 방법은 앞절에서 소개된 SUPG를 불연속해에 적용시키기 위하여 변형시키면서 Taylor-Galerkin방법과는 반대로 implicit법을 사용하였다. 이로 인해 발생하는 matrix inversion은 EBE(element-by-element)방법, 즉, matrix inversion이 전체적인 매트릭스에서 이루어지는 것이 아니고 각 유한요소내에서 이루어지는 방법으로 해결을 시도하였다. 그러나 이 방법은 매트릭스의 조건(condition)에 크게 그 응용성이 좌우되므로 지배방정식을 대칭(system)화 시키는 작업등이 보완되어져야 한다.

### 3.2 적응적 요소망(Adaptive Mesh)

적응적 요소망의 사용은 불규칙요소망의 장점을 최대한 활용하여 계산의 정확도가 요구되는 부분에 요소망을 집중시킴으로써 계산의 효율을 높이는 방법으로 구조해석 분야를 중심으로 발달되어 왔으나 최근에는 유동해석 분야, 특히 압축성 유동에서 충격파의 위치를 찾아내기 위하여 사용되어지고 있다. 적응적 요소망을 사용할 때 가장 큰 문제점은 어떠한 error indicator를 사용하는가인데 Lohner<sup>(29)</sup>등이 충격파 문제를 풀때는 변수(압력)의 이차미분치(2nd order differentiation)를 교정한 값을 채택하였다. 그림 8은 Lohner에 의해서 계산된 적응적 요소망을 적용한 결과의 예를 보여준 것이다. 지금까지는 error indicator를 규정하기가 비교적 쉬운 충격파가 존재하는 압축성 유동해석에 adaptive mesh가 사용되어 왔지만 앞으로는 비압축성 유동 혹은 난류나 반응을 동반한 유동등 국부적인 물리적인 형상이 복잡한 경우를 해석할 경우에도 반드시 응용되어져야 하며 이를 위한 이론적 뒷받침도 따라 주어야 한다.

## 5. 맺음말

유한요소법의 전산유체 역학분야에 대한 응용현황을 계산방법과 적용예를 중심으로 정리하였다. 유한요소법의 가장 큰 장점은 복잡한 유동영역을 해석하기 위한 불규칙 요소망(unstructured mesh)의 사용이라 볼 수 있으며 적응적 요소망을 이용하여 계산의 정확도를 높일 수 있는 것 또한 강점이라 할 수 있다. 다만 불규칙 요소망 사용으로 인해 수반되는 대수 방정식 계산시간 및 기억용량의 증가는 conjugate gradient방법등을 이용하여 반드시 해결되어야만 한다.

지금까지 유한요소법을 이용한 계산방법을 개발해 오는 과정을 보면 유한차분법에서 오래전에 개발된 방법들을 도입한 경우가 많았으며 특히 난류 및 개발된 경우가 많으며 대부분의 경우 이들을 그대로 도입, 이용하였다. 반대로 최근에 항공기 동체설계 분야를 중심으로 복잡한 형태의 유동영역을 해석이 요구되는 경우 유한차분법, 특히 유한체적법(finite volume method)에 삼각형 유한요소를 이용한 불규칙 요소망을 도입하여 성공적으로 이용하고 있다. 따라서 전산유체 역학의 발전을 위하여 두 분야의 유기적인 협조가 필요하며 결과적으로 전산유체 역학기법이 완전히 기계설계의 한 분야로 정립될 수 있도록 많은 노력이 필요하다고 본다.

## 참고 문헌

- (1) Schmidt, W, 1989, "Computational Fluid Dynamics in West Germany", AIAA Paper, 87-1130.
- (2) Ghoniem, A.F. and Ng, K.K., 1986, "Effect of Harmonic Modulation on Rates of Entrainment in a Confined Shear Layer", AIAA Paper, 86-0056.
- (3) Kutler, P., Steger, J.L., and Bailey, F.R., 1987,

- "Status of Computational Fluid Dynamics in the United States", AIAA Paper, 87-1135.
- (4) Oden, J.T. and Welford, L.C., 1972, "Analysis of Flow of Viscous Fluids by the Finite Element Method", AIAA Journal, Vol. 10, pp. 1590~1599.
- (5) Chung, T.J., 1978, Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, McGraw Hill Book Co.
- (6) Taylor, C. and Hood, P., 1973, "A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations Using the Finite Element Technique", Computers and Fluides, Vol. 1, pp. 73~100.
- (7) Engelman, M., Sani, R.L., Gresho, P.M., and Bercovier, M., 1982, "Consistent VS. Reduced Integration Penalty Methods for Incompressible Media Using Several Old and New Elements", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 2, pp. 25~42.
- (8) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R., 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 32, pp. 199~259.
- (9) Zienkiewicz, O.C., Lohner, R., Morgan, K. and Peraire, J., 1985, "High Speed Compressible Flow and Other Advection-Dominated Problems of Fluid Dynamics", Finite Elements in Fluids-Volume 6 (Ed. by Gallaher, R.H., Carey, G.F., Oden, J.T. and Zienkiewicz, O.C.), A Wiley-Interscience Publications, pp. 41~88.
- (10) Kim, Y., Sohn, J.L. and Chung, T.J., 1989, "Calculations of the Flow Properties of a Confined Diffusion Flame", Proceedings of the 7th International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems, pp. 296~303.
- (11) Oden, J.T. and Jacquotte, O.P., 1984, "Stability of Some Mixed Finite Element Methods for Stokesian Flows", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 43, pp. 231~247.
- (12) Sani, R.L., Gresho, P.M., Lee, R.L., Griffiths, D.F., and Engelman, M., 1981, "The Cause and Cure(!) of the Spurious Pressure Generated by Certain FEM Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations: Part 2", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 1, pp. 171~204.
- (13) Lee, R.L., Gresho, P.M., and Sani, R.L., 1979, "Some Techniques for Certain Primitive Variable Solutions of the Navier-Stokes Equations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, pp. 1785~1804.
- (14) Sohn, J.L. and Heinrich, J.C., 1989, "Pressure Calculations in Penalty Finite Element Approximations to the Navier-Stokes Equations", Submitted to the International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- (15) Sohn, J.L., Y. Kim, and Chung, T.J., 1989, "Finite Element Solvers for Incompressible Fluid Flows and Heat Transfer", Proceedings of the 7th International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems, pp. 880~885.
- (16) Oden, J.T., 1982, "RIP Methods for Stokesian Flows", Finite Element Methods in Fluid Mechanics, Vol. 4, (Ed. by Gallagher, R.H., Norrie, D.H., Oden, J.T., and Zienkiewicz, O.C.), pp. 305~318, A Wiley-Interscience Publications.
- (17) Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee R.L., and Upson, G.D., 1984, "A Modified Finite Element Method for Solving the Time Dependent, Incompressible Navier-Stokes Equations, Part 1: Theory", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 4, pp. 557~598.
- (18) Hutton, A.G., Smith, R.M. and Kickmott, S., 1987, "The Computation of Turbulent Flows of Industrial Complexity by the Finite Element Method-Progress and Prospects", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 7, pp. 1277~1289.
- (19) Betts, P.L. and Haroutunian, V., 1985, "K-ε Modeling of Turbulent Flow Over a Backward Facing Step by a Finite Element Method,

- Comparison with Finite Volume Solutions and Experiments”, in Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow (Ed. by Taylor, C., Olson, M.D., Gresho, P.M., and Habashi, W.G.), Pineridge Press.
- (20) Sohn, J.L., 1988, “Evaluation of FIDAP on Some Classical Laminar and Turbulent Benchmarks”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 8, pp. 1469 ~ 1490.
- (21) Donea, J., “A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp. 101 ~ 119.
- (22) Lapidus, A., 1967, “A Detached Shock Calculation by Second-Order Finite Differences”, Journal of Computational Physics, Vol. 2, pp. 154 ~ 177.
- (23) Lohner, R., Morgan, K., and Peraire, J., 1985, “A Simple Extension to Multidimensional Problems of the Artificial Viscosity due to Lapidus”, Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 1, pp. 141 ~ 147.
- (24) Sohn, J.L., Kim, Y., and Chung, T.J., 1989, “Applications of Taylor-Galerkin Finite Element Method to Compressible Internal Flow Problems”, Proceedings of the 7th International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems, pp. 370 ~ 376.
- (25) Lohner, R., 1986, “FEM-FCT and Adaptive Refinement Schemes for Strongly Unsteady Flows”, Proceeding of the ASME Winter Annual Meeting, Anaheim, California, December.
- (26) Hughes, T.J.R., and Tezduyar, T.E., 1984, “Finite Element Methods for First-Order Hyperbolic Systems with Particular Emphasis on the Compressible Euler Equations”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 45, pp. 217 ~ 284.
- (27) Demkowicz, L., Oden, J.T., and Strouboulis, T., 1984, “Adaptive Finite Elements for Flow Problems with Moving Boundaries, Part I : Variational Principles and a Posteriori Estimates”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 46, pp. 217 ~ 251.
- (28) Demkowicz, L. and Oden, J.T., 1986, “An Adaptive Characteristic Petrov-Galerkin Finite Element Method for Convection-Dominated Linear and Nonlinear Parabolic Problems in two Space Variables”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 55, pp. 63 ~ 87.
- (29) Lohner, R., 1987, “An Adaptive Finite Element Scheme for Transient Problems in CFD”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 61, pp. 323 ~ 338.

