

탄소성유한요소법에 있어서 구성식의 응용

김 영 석

산업과학기술연구소 강재연구부 가공연구실 주임연구원



● 1957년생
● 소성역학을 전공하였으며, 재료의 탄소성거동 및 불안정현상 해석, 관재가공 기술 개발 및 소성 가공 공정의 최적화에 관심이 있다.

1. 머리말

최근 대형컴퓨터의 출현에 따른 계산능력의 향상과 더불어 소성가공 과정의 해석에 있어서도 컴퓨터를 이용한 수치해석기술의 발달이 현저해지고 있다. 특히 유한요소법으로 대표되는 계산역학적(computational mechanics)수법의 도입에 따라 종래의 고전적해석법(초등해석, 상계해법, 미끄럼선장법 등)으로는 생각할 수 없었던 복잡한 경계조건을 갖는 문제나 소성가공중의 재료성질의 변화, 열발생 및 공구와의 마찰등이 서로 연관되어 있는 복잡한 문제의 해석이 가능하게 되었다.

이 유한요소법 중에서 소성가공을 받고 있는 비선형재료의 기하학적 비선형변형을 수반하는 large strain, large displacement문제의 해석에 탄소성유한요소법(elastic-plastic finite element method)이 최근 주목을 받고 있다^(1~5). 이 방법은 재료의 미소 탄성변형에서 소성 대변형까지 일괄적으로 재료의 소성거동을 추적할 수 있고 각종 소성가공 과정중에 발생하는 소성 불안정현상(plastic instability)과 소성변형의 집중화(strain localization)에 의한 재료의 연성파괴거동을 해석할 수 있는 유력한 수단으로 인식되고 있다^(6~13).

한편 탄소성유한요소법을 이용하여 재료의 탄소성 변형거동을 효율적으로 정확히 해석하기 위해서는 재료의 변형특성을 적절히 표현할

수 있는 구성식(constitutive equation)의 선택이 중요하다. 구성식은 본래 미시적으로 무한에 가까운 자유도를 갖는 물체의 거동을 이론적으로 계측가능한 적은 수의 변수로 근사표현하여 정식화한 것으로 보는 관점에 따라 여러 가지 특징을 갖고 있다. 본 글에서는 탄소성 유한요소법에 대한 간단한 정식화와 탄소성체의 변형거동해석에 자주 이용되고 있는 대표적인 구성식에 대하여 소개하고 계산 예를 통하여 구성식의 선택이 변형의 국소화거동 해석에 미치는 영향을 고찰하고자 한다.

2. 탄소성 유한요소법의 정식화

대변형문제가 미소변형문제와 다른 것은 변형을 지배하는 기초식이 명확하게 설정된 기준상태를 참조하여 기술된다는 점이다. 탄소성체의 특성은 통상 속도형으로 표시된 구성식에 의하여 표현되므로 변형을 지배하는 기초식도 속도형으로 표시된다. 탄소성경계값 문제에서 탄소성변형은 이런 속도형 기초식을 구성식과 주어진 경계조건을 이용하여 순차적으로 풀어 가는 것에 의해 구해진다. 이들 구성식과 기초식은 변형과정중의 기준상태를 변형전 초기상태 혹은 현 변형상태중 어디에 설정하는가에 따라 전자의 경우 Total Lagrangian Formulation(TLF), 후자의 경우 Updated Lagrangian Formulation(ULF)으로 구별된다. 그림 1에서와 같이 탄소성 변형중에 있는 물체를 고

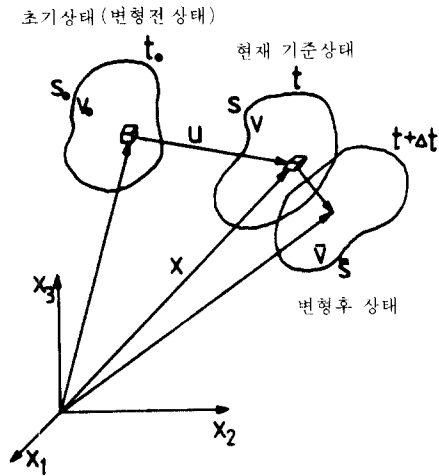


그림 1 변형상태에 대한 기준좌표계

려하면 시간 t 에서 평형상태에 있는 물체의 모든 값(변형량분포, 응력분포, 변형형상등)이 알려져 있을 때 시간중분 Δt 동안 미소 외부변형에 대한 물체의 반응(탄소성 해)은 직교 데카르트 좌표계 \mathbf{x} 를 기준좌표로한 ULF표시에 의한 다음의 가상일 원리를 푸는 것에 의하여 구해진다⁽¹⁴⁾.

$$\int_V (\dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}) \delta \mathbf{L} dV = \int_{S_e} \dot{\mathbf{p}} \delta \mathbf{v} ds \quad (1)$$

여기서 $\dot{\mathbf{p}}$ 는 물체의 표면 s 의 단위면적에 작용하는 외력의 변화율, \mathbf{v} 는 변위속도, $\mathbf{L} = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ 는 속도구배텐서, $(\)$ 는 $(\)$ 의 물질도함수, $\delta \mathbf{v}$ 는 가상변위속도이다. 또 v , s 는 각각 물체의 체적과 표면적을 나타낸다. \mathbf{s} 는 Kirchhoff 응력텐서이고 Cauchy응력텐서 $\boldsymbol{\sigma}$ 와는 다음의 관계가 있다.

$$\mathbf{s} = \frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \text{tr} \mathbf{L} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L} - \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma}$$

여기서 ρ_0 , ρ 는 각각 변형전(t_0), 변형후(t)의 물체의 밀도이다.

탄소성경계값 문제, 식 (1)을 풀기 위해서는 재료고유의 응답특성을 나타내는 변형률속도와 응력속도의 대응관계인 구성식을 도입하여야 한다. 구성식은 재료의 물리적 성질을 나타내

므로 물체의 운동 혹은 좌표계의 운동에 무관하게 객관성(frame indifference, objectivity)를 가져야 한다. 식 (1)에 객관성을 갖는 구성식으로 Kirchhoff응력의 Jaumann속도 $\dot{\mathbf{s}}$ 와 변형률속도 \mathbf{d} 의 대응관계를 이용하면

$$\int_V \{(\mathbf{D} - \mathbf{F}) \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}\} \delta \mathbf{L} dV = \int_{S_e} \dot{\mathbf{p}} \delta \mathbf{v} ds \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w} - \mathbf{w} \boldsymbol{\sigma} = \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{F} \mathbf{d}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$$

이 된다. 여기서 \mathbf{D} 는 구성 매트릭스이고 재료의 소성변형조건을 나타내는 항복곡면의 형태에 따라 구체적인 형태가 구해진다^(15~16).

탄소성 변형문제의 해를 구하기 위한 탄소성 유한요소방정식은 가상일의 원리 식 (1)에 의해 정식화된다. 즉, N 개의 절점들을 갖는 요소내의 임의의 점에서 변위속도를 \mathbf{v} , 변형률속도를 \mathbf{d} , 변위 속도구배를 \mathbf{g} 로 하고 이것을 절점에서의 변위속도 $\hat{\mathbf{v}}$ 와 형상함수 ϕ 와 ϕ 의 도함수를 성분으로 하는 매트릭스 \mathbf{B} , \mathbf{E} 로 표시하여 가상일의 원리 식 (2)에 대입을 하여 정리하면 다음과 같은 매트릭스형으로 요소의 강성방정식이 얻어진다.

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{f}} \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \int_{V_e} \{ \mathbf{B}^T (\mathbf{D} - \mathbf{F}) \mathbf{B} + \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \} dV$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \int_{S_e} \phi^T \dot{\mathbf{p}} ds$$

$$\mathbf{v} = \phi \hat{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{E} \hat{\mathbf{v}}$$

V_s , S_e 는 요소의 체적과 표면적을 나타낸다. 매트릭스 \mathbf{K} 는 강성 매트릭스이고 $\hat{\mathbf{f}}$ 는 표면력에 등가인 절점력이다. 식 (4)의 유한요소방정식을 모든 요소에 대하여 구하고 절점력의 평형조건과 변위의 적합조건을 만족하도록 중첩시키면 물체 전체의 강성방정식이 얻어지고 여기에 절점력중분 및 절점변위 중분으로써 경계조건을 가하면 물체내의 모든 미지의 절점변위 중분이 구해진다.

상기의 정식화는 중분 변형전의 상태를 기준으로 중분 변형후의 상태를 표시하는 소위 Euler법에 의한 것이므로 계산정도의 향상을 위해서 중분간에는 선형영역에서 비선형영역으로의 재료특성의 변화나 형상의 급격한 변화가

발생하지 않도록 증분의 크기를 결정하는 것이 중요하다^(2,17,18).

3. 탄소성체에 대한 각종 구성식

객관성을 갖는 응력속도와 변형률속도 간의 대응관계인 구성식으로서 탄소성체의 소성변형 해석에 자주 이용되고 있는 구성식은 크게 연합유동법칙(associated flow rule)을 따르는 구성식으로서 J2-flow theory와 J2-kinematic hardening theory, 항복곡면에 코너의 존재를 고려한 구성식으로서 J2-deformation theory와 J2-corner theory, 비연합유동법칙(non-associated flow rule)을 따르는 구성식으로서 Rudnicki-Rice's theory와 Gurson's theory에 의한 구성식으로 대별된다. 이하에서 각각의 구성식 모델을 소개하고 소성 불안정 현상 해석에 있어서 각 구성식의 특징에 대하여 논한다.

통상 탄소성 구성식의 도출에 있어서 전 변형률속도 \mathbf{d} 는 가역적인 탄성성분 \mathbf{d}^e 와 비가역적인 소성성분 \mathbf{d}^p 로 분해할 수 있다고 가정하고

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (5)$$

탄성성분은 Hooke의 법칙을 유한변형까지 확장시켜 일반화시킨 선형관계에 의해 나타나고 소성성분은 항복함수 f (yield function)와 유동법칙(flow rule)에 의해 나타난다. 즉, 탄소성체의 구성식은 Hill에 의해

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{D}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{D}^e (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \quad (6)$$

여기서 \mathbf{D}^e 는 순간 탄성강성계수(instantaneous elastic modulus)이다. 소성변형률속도 \mathbf{d}^p 는 다음식으로 주어진다.

$$\mathbf{d}^p = \frac{1}{h} \mathbf{m} (\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}) \quad (7)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / \left| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|$$

\mathbf{m} 은 소성변형률 속도방향, \mathbf{n} 은 항복곡면에 세운 법선방향을 나타낸다. h 는 재료의 변형경화특성을 나타내는 스칼라함수로 응력, 변형이력의 함수이다. 식 (6)과 식 (7)에서 $\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}$ 을 구하면

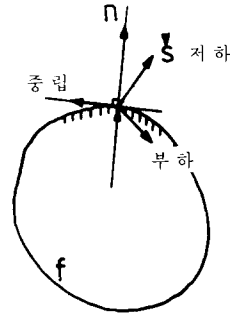


그림 2 부하, 중립, 제하의 구별

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{d} = \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{D}^e \mathbf{d}^p) \quad (8)$$

$$= \begin{cases} (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{s}}) \left\{ 1 + \frac{1}{h} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{m}) \right\}; & \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{s}} > 0, \text{부하} \\ \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{s}}; & \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{s}} \leq 0, \text{제하, 중립} \end{cases}$$

따라서 식 (6)에서 탄소성 구성식은

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{D}^e (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \\ &= \left\{ \mathbf{D}^e - \beta \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{m} \mathbf{D}^e \mathbf{n}}{h + \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{m}} \right\} \mathbf{d} = \mathbf{D} \mathbf{d} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\beta = 1 : \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{d} > 0, \text{부하}$$

$$0 : \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{d} \leq 0, \text{제하, 중립}$$

로 주어진다. 여기서 β 는 그림 2에 나타낸 것과 같이 소성영역과 중립·제하영역을 구분하는 지수이다. $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ 인 경우에 연합유동법칙이 성립하고 \mathbf{D} 은 ij, kl 에 대해 대칭이 되나 $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$ 인 경우에는 비연합유동법칙이 성립하여 \mathbf{D} 은 ij, kl 에 대하여 비대칭이 된다.

3.1 연합유동법칙에 따르는 구성식

(1) J2-flow theory에 의한 구성식

초기 항복함수가 Von Mises형의 매끈한 항복곡면으로 주어지는 등방경화(isotropic hardening)탄소성체의 경우 소성변형률 속도방향은 항복곡면에 세운 법선방향과 일치한다($\mathbf{m} = \mathbf{n}$, 소성변형률 속도방향의 법선성 성립). 따라서 Von Mises형의 항복함수 $f = 3/2 \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \sigma_y^2$ ($\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - 1/3 \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}$)를 식 (9)에 대입하면 J2-flow theory에 의한 탄소구성식의 구체형은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{\mathbf{s}} = \left(\mathbf{D}^e - \frac{\beta}{g} \mathbf{N} \mathbf{N} \right) \mathbf{d} = \left(\mathbf{D}^e - \frac{2\beta G}{g} \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\sigma}' \right) \mathbf{d}$$

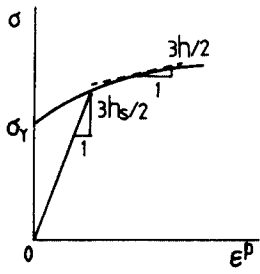


그림 3 진응력-소성변형률곡선의 접선계수, 활선계수

$$N = D^e n \quad (10)$$

$$g = h + N \cdot n = \frac{3}{2} \bar{\sigma}^2 \left(1 + \frac{h}{2G} \right)$$

가공경화 파라미터 h 는 그림 3에서와 같이 단축인장 진응력-대수변형을 관계로 부터 구할 수 있다.

$$h = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon^p}{d\sigma} \quad (11)$$

$$= \frac{3}{2} \left[\left(1 - \frac{1-2\nu}{E} \sigma \right) \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right]$$

E_t : 진응력-대수변형률 곡선의 접선계수 (= $d\sigma/d\epsilon$)

(2) J2-kinematic hardening theory에 의한 구성식

한편 초기 항복조건을 만족한 후 소성변형의 진행에 따라 항복곡면이 형상 및 크기를 그대로 유지한 상태에서 응력공간내를 평행이동하는 이동경화이론(Kinematic hardening theory)에 의한 구성식은 다음과 같이 구해진다. 즉, 현재상태에서 항복곡면의 중심위치를 α 라 하고 항복함수 $f = 3/2 \bar{\sigma}' \cdot \bar{\sigma}' - \sigma_Y^2$ ($\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$)를 식 (9)에 대입하면 이동경화 탄소성체에 대한 구성식이 얻어진다⁽¹⁹⁾.

$$\dot{\bar{s}} = \left(D^e - \frac{2\beta G}{\bar{g}} \bar{\sigma}' \bar{\sigma}' \right) d \quad (12)$$

$$\bar{g} = \frac{2}{3} \sigma_Y^2 \left(1 + \frac{h}{2G} \right)$$

항복곡면의 중심위치를 결정하는 방법으로 Ziegler는 항복곡면의 중심의 이동은 현응력점

과 항복곡면의 중심을 연결하는 방향과 일치한다고 가정하여 항복곡면 중심의 이동량을 결정하였다⁽²⁰⁾.

$$\dot{\bar{\alpha}} = \mu \bar{\sigma}, \quad \mu > 0 \quad (13)$$

$$\mu = \left(\frac{3}{2} \bar{s} \cdot \bar{\sigma}' \right) / \sigma_Y^2$$

가공경화 파라미터 \hat{h} 를 구하기 위해서는 식 (11)에서 진응력 σ 에 대응하는 양으로 식 (14)를 대입하면 된다.

$$\sigma = \sigma_Y + \bar{\alpha} \quad (14)$$

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{2}{3} \bar{\alpha}' \cdot \bar{\alpha}' \right)^{1/2}$$

3.2 항복곡면에 코너의 존재를 고려한 구성식

(1) J2-deformation theory에 의한 구성식

J2-flow theory에 의한 구성식은 Von Mises 형의 매끈한 항복곡면을 기초로 하고 있어 각 응력상태에 대한 항복곡면에서의 법선방향은 항상 유일하게 결정되고 그 결과 소성변형률 속도의 방향은 응력속도방향과 무관하게 항상 현재의 응력점에서 항복곡면에 세운 법선방향이 된다. 따라서 응력속도가 항복곡면의 접선방향성분만을 갖는 경우에는 소성변형을 속도에 대한 기여는 없고 탄성적으로만 반응한다. J2-flow theory를 이용하면 소성좌굴이나 넥킹과 같은 소성불안정현상의 해석에 있어서 응력속도가 급변하여도 소성변형률 속도의 방향이 변화하지 않고 지금까지의 안정한 기본 변형모우드로부터 벗어난 변형 상태로의 천이를 곤란하게 한다(그림 4). 따라서 분기(bifurcation)

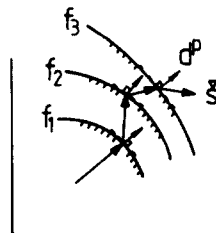


그림 4 소성변형률속도 방향의 변화

발생을 억제하는 효과를 가져 실질적인 응력레벨에서 분기발생은 생기지 않는 등의 불합리성이 지적되고 있다⁽²¹⁾.

이것에 대해 J2-deformation theory는 일반적으로 금속 다결정체내에 활동하는 다중슬립(slip)에 의해 예측되는 항복곡면이 현 응력점을 정점으로 하는 코너(corner, vertex)를 갖는 효과를 실용적인 형태로 고려한 것으로, 항복곡면에 법선방향으로부터 어떤 각도 범위내에서 응력속도의 항복곡면의 접선방향성분에 대해서도 소성변형을 야기하도록 한 모델이다. 이 이론은 특히 판재의 소성불안정 현상의 해석에 있어서 J2-flow theory를 이용한 경우에 발생하는 이론해석결과와 실험결과와 차이를 대폭 개선시킨다.

Stören-Rice는 그림 5에서와 같이 소성 변형률속도를 응력속도 $\dot{\mathbf{s}}$ 의 항복곡면에 대한 법선방향성분의 기여와 응력속도 $\dot{\mathbf{s}}$ 의 항복곡면에 대한 접선방향성분의 기여로 평가하였다⁽²⁰⁾.

$$\mathbf{d}^p = \frac{1}{h} \mathbf{n}(\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{h_s} (\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{n}(\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n})) = B^p \dot{\mathbf{s}} \quad (15)$$

$$\frac{1}{h_s} = \frac{3}{2} \frac{\epsilon^p}{\sigma}$$

대변형 탄소성체의 J2-deformation theory에 의한 구성식은 식 (15)의 소성 변형률속도 \mathbf{d}^p 를 식 (6)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 구해진다⁽²³⁾.

$$\dot{\mathbf{s}} = \left(\mathbf{D}_s^e - \frac{2\beta G_s}{g_s} \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\sigma}' \right) \mathbf{d} \quad (16)$$

$$\mathbf{D}_s^e = \mathbf{D}^e(E_s, \nu_s), \quad G_s = G(E_s, \nu_s)$$

$$g_s = g(h_s, G_s), \quad h_s = h(E_s, \nu_s)$$

$$\frac{\nu_s}{E_s} = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right)$$

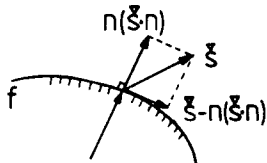


그림 5 응력속도성분

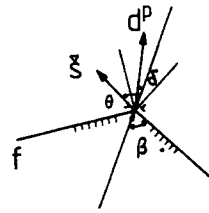


그림 6 항복곡면의 코너점

식 (16)은 식 (10)에서 $E_s \rightarrow E, \nu_s \rightarrow \nu$ 로 치환한 형태를 취하고 있다⁽¹⁶⁾. 식 (15)는 Budiansky에 의해 재평가된 Henchy의 전변형 이론의 속도형구성식을 유한변형의 경우에 대해 일반화한 식과 일치한다⁽²⁴⁾. 위의 J2-deformation theory에 의한 구성식, 식 (15)는 응력속도의 방향이 비례부하경로(proportional loading path)에서 크게 벗어나지 않고 Budiansky의 전부하조건(total loading condition)을 만족하는 경우에만 유용하다. 전부하조건은 그림 6에서 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{d}^p &> 0 \\ \theta &\leq \beta \end{aligned} \quad (17)$$

$$\theta + \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

(2) J2-corner theory에 의한 구성식

분기후(post-bifurcation)의 거동해석 혹은 불균일 변형이 현저한 경우의 해석에 있어서는 응력상태가 전부하영역으로부터 현저하게 벗어나거나 탄성제하를 수반하는 경우가 있어서 J2-deformation theory를 이용하는 것은 적절하지 않다. 이런 문제점을 해결하기 위하여 Christoffersen-Hutchinson은 항복곡면상에 코너의 존재를 가정하여 비례부하에 가까운 응력상태에 대해서는 J2-deformation theory에 의한 결과와 일치하도록 하고 응력상태가 전부하영역으로부터 점차 멀어질수록 연속적으로 탄성상태에 이동하도록 하는 현상학적 J2-corner theory를 도입하였다⁽²⁵⁾. 이 이론에 기초한 구성식을 도입함으로써 판재의 단축인장하에서와 같이 균일변형에서 확산넥킹 그리고 국부넥킹에 의한 전단밴드(shear band)의 성장에 이르

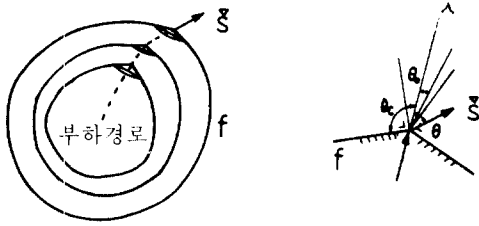


그림 7 현상학적 코너이론

기까지의 소성불안정 형상의 전 과정의 해석이 가능하게 되었다⁽²⁶⁾.

그림 7에서와 같이 현응력점 근방의 항복곡면을 편차응력 공간에서 편차응력 방향을 축으로 하는 원추체라고 생각하여 이 축과 응력속도의 방향이 이루는 각도를 θ 라고 하면 응력속도 프텐셜은 식 (18)로 주어진다.

$$w = \frac{1}{2} B^e \dot{s} \dot{s} + \frac{1}{2} f(\theta) B^p \dot{s} \dot{s} \quad (18)$$

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\theta - \theta_0}{\theta_c - \theta_0} \right) \right] & : \theta_0 \leq \theta \leq \theta_c \\ 0 & : \theta_c \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$\cos \theta = \frac{\lambda B^p \dot{s}}{(\dot{s} B^p \dot{s})^{1/2}}$$

여기서 B^e 는 순간 탄성반응계수 (instantaneous elastic compliance), B^p 는 식 (15)에서 주어지는 J2-deformation theory의 순간 소성반응계수 ($B^p = D^{-1} - B^e$)이다. 한편 $f(\theta)$ 는 응력상태가 전부하영역으로부터 멀어져 탄성영역으로 이동하는 경우 1에서 0까지 연속적으로 변하는 천이함수 (transition function)이다. 식 (18)로부터 구성식의 구체형은 다음과 같이 표시된다.

$$d = \frac{\partial^2 w}{\partial \dot{s} \partial \dot{s}} \dot{s} = B(\theta) \dot{s} \quad (19)$$

식 (19)에서 역관계를 구하면

$$\dot{s} = D(\theta) d \quad (20)$$

이고 전부하영역, $0 < \theta < \theta_0$ 에서 모듈 $D(\theta)$ 는 J2-deformation theory에 의한 식 (16)과 같게 된다. 이 이론의 유효성은 여러 해석에^(12,26,27)에서 증명되고 있지만 현상론적으로

정식화된 것이므로 재료정수로써 전부하영역을 나타내는 θ_0 , 코너각 θ_c , 천이함수 $f(\theta)$ 를 정하는 방법에는 아직 검토의 여지가 남아 있다⁽²⁵⁾.

3.3 비연합유동법칙에 따르는 구성식

도양 또는 암석과 같이 소성 변형전에 재료 내부에 미세크랙이나 간극을 갖고 있는 재료나 소성변형과 더불어 재료내부에 보이드(void)의 발생, 성장을 나타내는 연성 금속재료의 항복 조건은 정수압응력에 영향을 받고 거시적으로 보아 소성변형은 압축성을 나타낸다. 따라서 이런 재료의 구성식은 소성변형률 속도의 법선성이 만족하지 않는 비연합유동법칙에 따른다.

(1) Rudnicki-Rice's theory에 의한 구성식

Rudnicki와 Rice는 암석과 같은 재료의 변형국소화 형상의 해석에 있어서 소성변형률속도를 다음과 같이 표시하였다⁽²⁸⁾.

$$\begin{aligned} d^p &= \frac{1}{h} m(\dot{\sigma} \cdot n) \\ m &= \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}} / \left| \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}} \right| + \frac{\beta_0}{3} I \\ n &= \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}} / \left| \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}} \right| + \frac{\mu_0}{3} I \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 β_0 는 소성팽창계수 (plastic dilatancy factor)이고 μ_0 는 항복에 대한 정수압응력의 영향을 나타내는 내부마찰계수 (internal friction coefficient)이다. 상기 식 (21)을 식 (6)에 대입하고 역관계를 구하면 구성식은

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \left(D^e - \frac{\beta}{g} N M \right) d \\ N &= D^e n, \quad M = D^e m \\ g &= h + N \cdot m \end{aligned} \quad (22)$$

이 된다. 한편 가공경화 파라미터는 다음 식으로 구해진다.

$$\frac{1}{h} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \left\{ \left(1 + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}} \right) \left(1 + \frac{\mu_0}{\sqrt{3}} \right) \right\}^{-1} \quad (23)$$

식 (22)에서 $\beta_0 \neq \mu_0$ 인 경우에 $m \neq n$ 이 되어 연합유동법칙이 성립하지 않게 된다.

(2) Gurson's theory에 의한 구성식

연성재료가 큰 소성변형을 받으면 재료내부에 마이크로 보이드의 발생과 성장이 현저하게

되고 이들 보이드는 서로 합쳐져서 재료의 연성 파괴를 야기한다. Gurson은 보이드를 포함하고 있는 연속체를 균일하게 분포한 구형의 보이드를 포함하고 있는 연속체로 이상화하고 축대칭 변형에 대한 강소성 극한해석을 통하여 근사적으로 다음과 같은 항복함수를 도출하였다^(29,30).

$$f = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_M^2} + 2V_f q_1 \cos h\left(\frac{q_2 tr\sigma}{2\sigma_M}\right) - (1 + q_3 V_f^2) = 0 \quad (24)$$

여기서 σ 은 연속체에 작용하는 거시적응력, σ_M 은 모재의 항복응력, V_f 는 보이드의 체적 함유율이다. 보이드가 없는 경우, $V_f=0$, 식(24)는 Von Mises의 항복함수가 된다. 항복조건인 정수압 의존성을 그림 8에 나타내었다.

모재에 대해서는 항상 소성변형률 속도의 법선성이 만족되므로 보이드를 함유한 연속체의 거시적 소성변형에 대해서도 법선성이 성립한다고 간주한다^(31,32).

$$d^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (25)$$

보이드를 포함한 연속체의 소성일은 모재부에서만 행해지므로

$$\sigma \cdot d^p = (1 - V_f) \sigma_M \dot{\epsilon}_M^p \quad (26)$$

이 성립한다. 보이드의 발생과 성장에 의한 보이드 함유율의 변화는 식(27)로 표시할 수 있다⁽³³⁾.

$$\dot{V}_f = \dot{V}_f^{\text{발생}} + \dot{V}_f^{\text{성장}} \quad (27)$$

$$= \left(A \dot{\sigma}_M + \frac{B}{3} tr \dot{\sigma} \right) + (1 - V_f) tr d^p$$

적합조건 (consistency condition; $\dot{f}=0$) 과 식(24)~(26)을 이용하면 소성변형률 속도 d^p 는

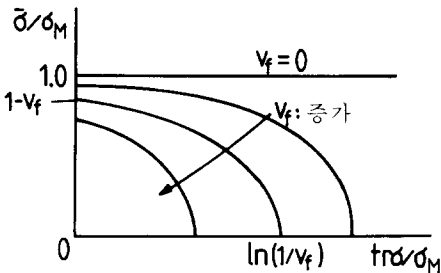


그림 8 항복곡면의 정수압 의존성

$$d^p = \frac{1}{H} m(\dot{\sigma} \cdot n) \quad (28)$$

$$n = \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad m = \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{B}{3} \frac{\partial f}{\partial V_f} I$$

이 된다. 여기서 $B \neq 0$ 인 경우는 연합유동법칙이 성립하지 않음을 알 수 있다. 식(28)을 식(6)에 대입하여 정리하면 구성식이 얻어진다⁽³⁰⁾.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \left(D^e - \frac{\beta}{g} NM \right) d \\ N &= D^e n, \quad M = D^e m \\ g &= H + N \cdot m \end{aligned} \quad (29)$$

H 는 연속체의 거시적 경화파라미터이다. 보이드모델을 이용하면 모재의 경화 파라미터는 항상 양의 값을 갖는데 반해 거시적 경화파라미터 H 는 소성변형에 수반하여 보이드의 함유율이 커짐에 따라 음의 값을 가져 변형의 불안정화와 집중화를 촉진하여, 항복곡면에 코너의 존재를 가정하지 않아도 소성불안정현상을 적절히 해석할 수 있다. 상기 모델은 정수압성분에 의존한 항복함수의 도입에 따른 소성변형률속도의 비법선성을 허용한 Rudnicki와 Rice의 모델과, 식(22), 유사한 형태를 갖는다⁽¹⁶⁾.

상기의 여러 구성식을 이용하여 평면변형하에서 블럭의 단축인장해석 결과를 그림 9에 나타내었다. 그림으로 부터 구성식의 선택은 변형의 국소화거동 해석에 강한 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

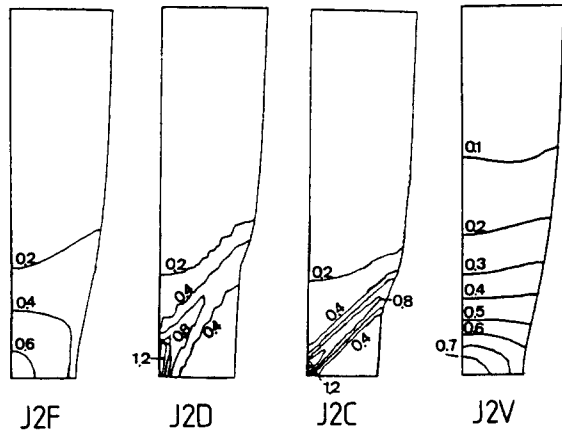


그림 9 각종 구성식을 이용한 계산결과 ($U/L_0=0.15$)

5. 맺 음 말

최근 탄소성체의 소성불안정 현상과 소성 변형집중화에 의한 연성파괴 거동의 해석에 유력한 수단으로 인식되고 있는 대변형 탄소성유한요소법의 정식화에 대하여 소개하였다. 또한 이 유한요소법에 의한 각종 소성불안정 현상의 해석에 있어서 구성관계식의 선택은 매우 중요한 의미를 갖고 있어 자주 이용되고 있는 대표적인 구성식의 특성에 대해서 논하였다.

참 고 문 헌

- (1) Marcal, P.V. and King, I.P., 1967, *Int.J. Mech. Sci.*, 9, p. 143.
- (2) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T., 1968, *Int.J. Mech. Sci.*, 10, p. 343.
- (3) Zienkiewicz, O.C., Valliapan, S. and King, I.P., 1969, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, p. 75.
- (4) Kigagawa, H. and Tomita, Y., 1971, *Proc. 21st Japan Natl. Congr. Appl. Mech.*, p. 243.
- (5) Kitagawa, H., Seguchi, Y. and Tomita, Y., 1972, *Ing. Arch.*, 41, p. 213.
- (6) Argyris, J.H., 1980, J.T. Oden ed., *Computational Mechanics in Nonlinear Mechanics*, p. 12.
- (7) Lee, E.H., Mallet, R.L. and Yang, W.H., 1977, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 10, p. 339.
- (8) Tomita, Y., Shindo, A. and Kim, Y.S., 1985, *Proc. 28th Japan Congr. Materials Research*, p. 7.
- (9) Tomita, Y., Shindo, A., Kim, Y.S. and Michiura, K., 1986, *Int. J. Mech. Sci.*, 28, p. 263.
- (10) Key, S.W., Krieg, R.D. and Bathe, K.J., 1979, *Comp. Mech. Appl. Mech. Engng*, 17/18, p. 597.
- (11) Triantafyllidis, N., Needleman, A. and Tvergaard, V., 1982, *Int.J. Solids Structures*, 18, p. 121.
- (12) Kim, Y.S., Tomita, Y. and Shindo, A., 1989, *Computational Mechanics*, 4, p. 211.
- (13) Needleman, A., 1984, H. Kardestuner ed., *Unification of Finite Element Methods*, p. 249, North Holland.
- (14) Hill, R., 1958, *J.Mech.Phys. Solids*, 6, p. 236.
- (15) Neale, K.W., 1981, *SM Arch.*, 6, p. 79.
- (16) Tomita, Y., 1988, *기계의 연구*, 40-6, p. 743, 40-7, p. 837, 40-8, p. 929.
- (17) Nagtegaal, J.C. de Jong, J.E., 1981, *Int. J.Num. Meth. Engng.*, 17, p. 15.
- (18) Krieg, R.D. and Krieg, D.B., 1977, *Trans. ASME, J. Pressure Vessel Tech.*, 99 p. 51.
- (19) Tvergaard, V., 1978, *Int.J. Mech.Sci.*, 20, p. 651.
- (20) Ziegler, H, 1959, *Q. Appl. Math.*, 17, p. 55.
- (21) Kitagawa, H., 1982, *Trans.JSME.*, 48-427, p. 250.
- (22) Storen, S. and Rice, J.R., 1975, *J. Mech. Phys.Solids*, 23-6, p. 421.
- (23) Needleman, A. and Tvergaard, V., 1977, *J. Mech. Phys. Solids*, 25, p. 159.
- (24) Budiansky, B., 1959, *J. Appl. Mech.*, 26, p. 259.
- (25) Christofferson, J. and Hutchinson, J.W., 1979, *J. Mech.Phys.Solids*, 27-5/6, p. 465.
- (26) Tvergaard, V., Needleman, A. and Lo, K. K., 1981, *J. Mech.Phys.Solids*, 29-2, p. 115.
- (27) Larsson, M., Needleman, A., Tvergaard, V. and Storakers, B., 1981, *J. Mech.Phys. Solids*, 30-3, p. 121.
- (28) Rudnicki, J.W. and Rice, J.R., 1975, *J. Mech.Phys.Solids*, 23, p. 371.

- (29) Gurson, A.L., 1977, Trans. ASME, Ser-H, 99-1, p. 2,
(30) Tvergaard, V., 1982, J. Mech. Phys. Solids, 30, p. 399,
(31) Bishop, J.F.W. and Hill, R., 1951, Phil. Mag., 42, p. 414,
(32) Berg, C.A., 1970, M.F. Kanninen ed., Inelastic Behaviour of Solids, p. 171,
(33) Needleman, A. and Rice, J.R., 1987, D. P. Koistinen and N.W. Wang ed., Mechanics of Sheet Metal Forming, p. 237.



국제 학술대회 참가 안내

COMODIA'90

**—International Symposium on Diagnostics and Modelling of
Combustion in Internal Combustion Engines—**

- 주 관 : The Japan Society of Mechanical Engineers
The Society of Automotive Engineers of Japan
The Marine Engineering Society in Japan
분 야 : Diagnostics and Modeling of Fluid Mechanics and Combustion-Related Processes in Internal Combustion Engines
일 시 : 1990년 9월 3일~5일 (3일간)
장 소 : Kyoto Park Hotel, Kyoto, Japan
일 정 : 1989년 11월 30일 : 500단어 내외 영문초록 제출
1990년 1월 10일 : 채택여부 통보
1990년 3월 1일 : 논문제출 마감
1990년 6월 30일 : 심포지움 예비 등록

연락처 : Prof. Makoto Ikegami
Department of Mechanical Engineering
Kyoto University, Sakyo-ku, Kyoto 606, Japan
TEL : (075)753-5248, FAX : (075)771-7286, Telex : 5423115 ENG KU J