

복합재료의 탄성학 소개

황 운 봉

포항공과대학 기계공학과 교수



● 1958년생
● 복합 재료를 전공하였으며, 이방체 탄성학, 복합재료의 기계적 성질에 관한 실험 및 이론에 관심이 있다.

1. 머리말

가볍고 하중에 잘 견디는 이점 때문에 섬유강화 복합재료는 무게에 민감한 비행구조물이나 우주구조물을 비롯하여 여러분야에 걸쳐 과거 20여년동안 그 응용범위가 빠르게 확대되고 있다. 복합재료는 등방체 재료(isotropic material)인 금속, 중합체, 세라믹등과 달리 방향에 따라 물리적 성질이 변하는 이방체(anisotropic material)이다. 이러한 복합재료의 특성때문에 복합재료의 역학적 해석은 등방체 재료보다 훨씬 복잡해 진다. 또한 탄소성 거동, 점탄성 거동, 피로, 파괴등 여러 기계적 현상에서 등방체에서는 볼 수 있는 특이한 현상이 나타난다. 섬유강화 복합재료가 layer사이로 균열이 진전하는 경우 fiber bridging이라는 독특한 현상을 관찰할 수 있는데 그 결과로 발생하는 균열진전 저항 거동은 그 일례이다. 이러한 복합재료의 특이성때문에 복합재료를 구조물에 사용할 때 등방체 재료보다 여러가지 고려할 사항이 많이 발생하나 복합재료의 특성을 잘 이해함으로써 기계공학적으로 여러 이점을 얻을 수 있다. 등방체 재료를 써서 구조물을 설계할 때 하중에 견디기 위해서는 두께를 조정하여야함 하는 경우가 있으나 복합재료를 사용하면 복합재료의 방향등을 고려하여 적층할 수 있어 두께를 조정하지 않고 원하는 강도

를 가진 구조물을 설계할 수 있다. Radar에 감지되지 않는 B-2 Stealth 폭격기는 실제로 이러한 설계개념과 탄소섬유강화 복합재료의 물리적 성질을 이용하여 만든 것이다.

이방체 탄성학에 관하여 많은 연구^(1~38)가 행하여 왔다. 이방체 탄성학의 효시는 1856년 이방체의 비틀에 관한 연구를 한 Saint-Venant⁽²⁾ 등이다. 이후 30~50년대에 전통적으로 수학이 뛰어난 소련 공학자들에게 의해 학문적인 체계가 이루어지기 시작했다. 복합재료가 실제 공학적으로 많이 쓰이기 시작한 60년대 이후에는 미국을 위시한 서반구에서도 복합재료의 탄성학 연구가 활발해져 오늘에 이르고 있으며 우리나라는 70년대 후반 복합재료에 관한 연구가 시작되었다. 현재 우리나라의 복합재료연구활동은 상당히 활발하나, 주로 피로 및 파괴현상, 제조, 응용에 치우쳐 있는 반면 이방체 탄성학 연구는 미미한 실정이다. 또한 대학이나 대학원 과정에 복합재료 탄성학 강좌가 개설되어 있는 학교가 적어 체계적인 복합재료의 탄성학 교육은 이루어져 있지 않다. 따라서 본 글은 복합재료의 탄성학에 지식이 없는 분을 위해 이방체 탄성학에 관하여 간략하게 소개하고자 한다. 복합재료의 고체역학연구는 이방체 탄성론^(1~6), 탄성계수에 관한 이론 및 측정^(7~15), 2차원 이론 즉 Plate이론^(16~26)과 Shell이론^(27~30), 1차원 보 이론^(31~34)으로 나눌 수 있으며 통상 복합재료는 여러판을 적층하여 쓰

이는데 이에 따른 적층이론(lamination theory)⁽³⁵⁻³⁸⁾이 있다. 본 글에서는 각 격우의 기초 이론을 살펴보고 간단한 예를 들어 등방체 해와 비교하였다.

2. 이방체 탄성학(Anisotropic Elasticity)

2.1 일반화된 Hooke의 법칙

통상 탄성문제는 다음과 같은 지배 방정식에 경계값을 고려하면 풀 수 있다.

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

$$e_{ijk} e_{lmn} \frac{\partial^2 \epsilon_{jm}}{\partial x_k \partial x_n} = 0 \quad (3)$$

$$\text{응력-변형률 관계 (Hook의 법칙)} \quad (4)$$

$$\text{경계조건} \quad (5)$$

여기서, τ_{ij} : 응력 텐서

x_i : 위치 벡터

F_i : 물체의 힘 (body force)

ϵ_{ij} : 변형률 텐서

u_i : 변위 벡터

e_{ijk} : 교번 (alternating) 텐서

윗 식에서 첨자는 1, 2, 3이 되며 한 항에서 반복되는 첨자는 Einstein의 summation 약속에 따라 1, 2, 3의 합이 된다(예 : $\tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$). 식 (1)은 평형식이고 식 (2)는 변형률과 변위의 관계를 나타낸다. 식 (3)은 compatibility 식이 되는데 이것은 변위가 연속적이면서 한 값(single valued, continuous)을 갖는 field를 형성한다는 조건의 필요충분조건이 된다. 여기까지 알아본 평형식, 변형률-변위관계 및 compatibility식은 재료의 종류에 관계없이 성립한다. 경계조건은 이방체에서는 등방체의 경우보다 고려할 조건이 더 생기는 경우가 있으나 크게 문제되지 않는다. 반면 이방체와 등방체의 가장 큰 차이는 Hooke의 법칙에서 발생한다. 이것은 등방체의 경우 탄

성계수가 영계수와 프와송의 비 2개이나 이방체의 경우 2개 이상의 탄성계수를 갖기 때문이다. 일반화된 Hooke의 법칙은 다음과 같이 표현된다.

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{ij} \quad (6. a)$$

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \tau_{kl} \quad (6. b)$$

여기서, C_{ijkl} : 탄성계수(stiffness)

S_{ijkl} : 컴플라이언스

윗 식에서 탄성계수는 4th order 텐서가 되고 81개의 값을 갖는다. 여기에 응력 텐서와 변형률 텐서가 대칭이라는 조건을 고려하면 다음과 같은 조건을 구할 수 있다.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (\tau_{ij} = \tau_{ji} \text{에서}) \quad (7. a)$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \text{에서}) \quad (7. b)$$

식 (7)에 의해 81개의 탄성계수는 36개로 줄어들음을 알 수 있고 식 (6)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_p = C_{pq} \epsilon_q \quad (p, q = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (8. a)$$

$$\epsilon_p = S_{pq} \tau_q \quad (8. b)$$

여기서, ϵ_q 는 엔지니어링 변형률이 되며 (8. a) 식을 행렬 관계식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

윗 식은 36개의 탄성계수가 존재함을 보여 주는데, 단위 체적당 변형률 에너지(strain energy density)로 나타낼 수 있는 탄성 potential이 존재하면 (즉 변형이 일어나는 동안 물체의 내부온도가 변형에 의해 변화하지 않는다면) 탄성계수는 대칭이 되며 21개로 줄어든다. 이러한 성질을 갖는 재료를 hyperelastic 재료라 하며 본 글에서는 이러한 재료

만 고려한다. 또한 Novozhilov⁽⁴⁾는 지형적으로 보면, 모든 좌표계가 동등(equivalent)하기에 가장 일반적인 경우에도 물리적 성질은 대칭성을 갖게 되어 독립적인 탄성계수는 18개뿐이라고 주장하였다. 이렇게 가장 복잡한 이방체를 triclini 재료라 부르기도 한다.

재료에 따라 탄성계수 또는 물리적 성질이 변하지 않는 대칭면(material property symmetry)을 갖는다. 하나의 대칭면을 갖는 재료를 monoclinic 재료라 하는데 단섬유 복합재료를 특이하게 배열하면 이러한 재료가 된다. 대칭면의 성질을 이용하면 monoclinic 재료에서의 탄성계수는 다음과 같이 13개가 된다.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

3개의 대칭면을 갖고 있으면 orthotropic 재료가 되는데 이러한 재료는 나무, 복합재료, 등이며, 다음과 같이 9개의 탄성계수를 갖게 된다.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (11)의 탄성계수를 영계수와 프와송의 비를 이용하면 다음과 같은 컴플라이언스를 얻게 된다.

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서 E 는 영계수이고, ν 는 프와송의 비이며 G 는 전단계수이다. 컴플라이언스가 대칭인 점을 고려하면 다음과 같은 관계식을 갖게 된다.

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j=1,2,3(\text{no sum on } i, j) \quad (13)$$

3개 대칭면과 1-2면이 등방성을 갖고 있는 재료를 transversely isotropic 재료라 하는데 임의로 배열된 단섬유 복합재료와 각 층을 적당히 배열하여 적층하면 이러한 재료를 얻을 수 있다(예 : $[0/+60]$, $[0/45/90]$). 이러한 재료는 5개의 탄성계수를 갖는데 이것은 다음과 같다.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

FCC와 BCC 같은 결정구조는 Cubic 재료라 하는데 이 재료는 다음과 같이 3개의 탄성계수를 갖는다.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (15)$$

등방성 재료는 2개의 탄성계수를 갖는데 이것은 다음과 같다.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

이 절에서는 각 재료의 특성에 따른 탄성 계수를 알아 보았다. 복합재료나 이방체 해석에 있어 가장 큰 난점의 하나는 탄성계수의 측정이다. 이러한 탄성계수 측정 결과^(9~14) 중 참고서적⁽¹²⁾는 주사위 모양의 시편을 이용 유리섬유 강화복합재료의 탄성계수 9개 모두를 측정하는 방법을 제시하고 있으며 참고문헌(14)는 Woven laminate의 탄성계수 측정 및 이론식을 제안하고 있다.

2.2 3차원 문제 예(자중에 의한 봉의 신장)

자중에 의한 봉의 신장문제는 3차원 탄성학 문제중 가장 간단한 것으로 Voigt⁽²⁾에 의해 연구되었다. 그림 1과 같이 봉이 수직으로 자중에 의해 변형될 때의 물체 힘과 경계 조건은 다음과 같다.

물체 힘 :

$$F_x = F_y = 0, F_z = \gamma \quad (17)$$

여기서, γ 는 비중이다.

경계조건 :

양단면

$$\tau_{zz} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0 \quad \text{at } z = l \quad (18)$$

$$\tau_{zz} = -\gamma l, \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0 \quad \text{at } z = 0$$

옆면

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (19)$$

원점(0, 0, 0)

$$u = v = w = \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \quad (20)$$

여기서 u, v, w 는 각각 x, y, z 방향의 변위를 나타내고, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 는 각각 x, y, z 축

에 대한 회전을 나타낸다. 이 경우 물체내부의 응력분포는 다음과 같다고 가정한다.

$$\tau_{zz} = \gamma(l-z), \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0 \quad (21)$$

Hooke의 법칙, 식(8. b)를 적용하면 변형률은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= S_{13}\gamma(l-z), \epsilon_{yy} = S_{23}(l-z), \\ \epsilon_{zz} &= S_{33}\gamma(l-z) \\ \gamma_{yz} &= S_{34}\gamma(l-z), \gamma_{zx} = S_{35}\gamma(l-z), \\ \gamma_{xy} &= S_{36}\gamma(l-z) \end{aligned} \quad (22)$$

식(21)에 나타낸 응력은 식(18)과 (19)로 표현된 경계조건을 만족시킨다. 식(22)에 나타낸 변형율은 식(3)의 compatibility식을 만족시킨

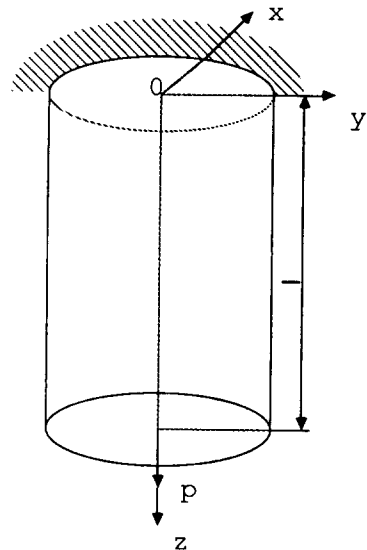


그림 1 자중에 의한 봉의 신장

다. 즉 가정한 해인 (21)과 식(22)가 평형식, compatibility 식 및 경계조건을 만족시킨다. 그러므로 이 해는 Stoke의 유일해 정리에 의해 정해(exact solution)가 됨을 알 수 있다. 식(22)를 변형률 변위관계식 식(2)에 대입하면 u, v, w 에 관한 미분방정식을 얻을 수 있다. 이 방정식을 경계조건인 식(20)에 의해 풀면 다음과 같다.

triclinic 재료 :

$$\begin{aligned} u &= \gamma \left[-\frac{1}{2} S_{35} z^2 + (S_{12} x + \frac{1}{2} S_{36} y)(l-z) \right] \\ v &= \gamma \left[-\frac{1}{2} S_{34} z^2 + (S_{23} y + \frac{1}{2} S_{36} x)(l-z) \right] \\ w &= \gamma \left[\frac{1}{2} (S_{13} x^2 + S_{23} y^2 + S_{36} xy) \right. \\ &\quad \left. + (S_{34} y + S_{35} x) + \frac{1}{2} S_{33} z(2l-z) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

식 (12) 컴플라이언스를 윗식에 고려하면 orthotropic재료에서의 해를 구할 수 있으며 여기에 등방성을 고려하면 isotropic재료에서의 해도 얻어진다. 등방체의 경우의 해는⁽³⁹⁾에 잘 나타나있다. 각 재료에서의 변위와 변형률은 다음과 같다.

orthotropic재료 :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\gamma \nu_{31}}{E_3} x(l-z) \\ v &= -\frac{\gamma \nu_{32}}{E_3} y(l-z) \\ w &= \frac{\gamma}{2E_3} [-(\nu_{31} x^2 + \nu_{32} y^2) + z(2l-z)] \\ \epsilon_{xx} &= -\frac{\gamma \nu_{31}}{E_3} (l-z), \\ \epsilon_{yy} &= -\frac{\gamma \nu_{32}}{E_3} (l-z), \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\gamma}{E_3} (l-z) \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

isotropic재료 :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\gamma \nu}{E} x(l-z) \\ v &= -\frac{\gamma \nu}{E} y(l-z) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{\gamma}{2E} [-\nu(x^2 + y^2) + z(2l-z)] \\ \epsilon_{xx} &= \epsilon_{yy} = -\frac{\gamma \nu}{E} (l-z), \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\gamma}{E} (l-z) \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

각각 변형률을 비교해보면 각 재료는 중력방향으로 신장하고 가로방향으로 줄어듦을 알 수 있다. 이때 등방체의 경우 x, y 방향의 변형률이 같아지나 triclinic재료와 orthotropic재료에서는 x, y 방향의 변형률이 같지않다. 한편 triclinic재료에서는 전단변형이 생기는 것을 알 수 있으나 orthotropic재료와 isotropic재료에서는 전단 변형이 생기지 않는다. 이것은 triclinic재료의 S_{34}, S_{35} 그리고 S_{36} 으로 표현된 계수때문임을 알 수 있다. 이러한 계수들은 전단계수와 상호영향계수(mutual influence coefficient)로 표현할 수도 있다.

z 축에 직각인 평면들의 변형을 관찰하면 모든 재료에서 이 평면이 변형후에 평면이 아니라 포물면을 만들게 됨을 알 수 있다. 반면에 z 축에 평행한 평면들을 관찰하면 orthotropic재료와 isotropic재료에서는 z 축에 평행한 평면들도 변형후에 포물면이 된다. 이것은 z 축 $(0, 0, z)$ 의 변위를 살펴보면 쉽게 알 수 있다.

orthotropic과 isotropic재료 : $u = v = 0$

$$\begin{aligned} \text{triclinic재료 : } u &= -\frac{1}{2} \gamma S_{34} z^2, \\ v &= -\frac{1}{2} \gamma S_{35} z^2 \end{aligned}$$

그러므로 밑면의 중심에서 변형을 살펴보면 orthotropic재료와 isotropic재료는 Z 방향의 변위만 생기나 triclinic재료에서는 x, y 방향으로도 변위가 발생하게 된다.

이 절에서 살펴본 이방체 탄성문제의 또 한 가지 흥미로운 점은 식 (21) 즉 응력분포해는 재료의 종류에 관계없이 성립한다는 것이다. 즉 재료의 이방성은 변위와 변형률에만 영향을 미친다고 결론지을 수 있다. 이러한 사실은 인

장 경우뿐 아니라 압축, 비틀림 및 굽힘에서도 관찰할 수 있다⁽³⁾.

3. 복합재료의 2차원 이론

앞에서는 모든 재료에서 이방체 탄성문제를 고려하였으나 지면 관계상 이후는 이방체 재료 중 가장 많이 쓰이고 있는 복합재료(orthotropic)의 적층판만 고려하기로 한다.

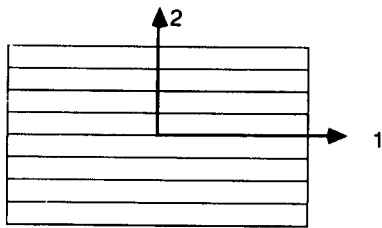
3.1 적층이론과 판 이론

일방향으로 보강된 복합재료의 예를 그림 2에 나타내었다. 여기서 1 및 2는 각각 섬유방향과 섬유에 직각인 방향을 나타내는데 주축이 된다. 평면 응력조건의 경우 변형률 응력관계는 식 (8. b)로 부터 다음과 같이 구해진다.

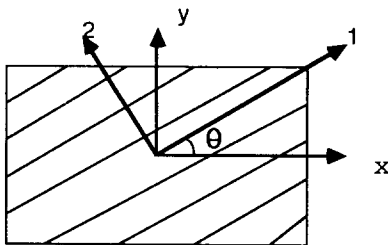
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

윗 식에서 [S]를 식 (12)와 비교하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}$$



(a) $\theta = 0^\circ$



(b) $\theta = \theta$

그림 2 일방향으로 보강된 복합재료

$$\begin{aligned} S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (29)$$

식 (28)로 부터 응력변형을 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

여기서

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} = G_{12} \end{aligned} \quad (31)$$

그림 2(b)와 같이 임의의 방향을 갖는 층의 응력-변형률 관계는 텐서변환 법칙을 식(28)과 (29)에 적용하면 구할 수 있는데 그 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{22} \sin^4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{12} - 4Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4 + \cos^4\theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{22} \cos^4\theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin\theta \cos^3\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \overline{Q}_{22} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 & + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 \overline{Q}_{66} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^2 \cos^2 \theta \\
 & + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (34) \\
 \overline{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 & + S_{22} \sin^4 \theta \\
 \overline{S}_{12} &= S_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (S_{11} + S_{66} - S_{66}) \\
 & \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 \overline{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 & + S_{22} \cos^4 \theta \quad (35) \\
 \overline{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 & - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \overline{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 & - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 \overline{S}_{66} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \\
 & \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
 \end{aligned}$$

복합재료는 그림 3에서 나타낸 것과 같이 여러장의 ply를 적층하여 쓴다. 그림 4에 n 개의 ply로 적층한 적층판의 지형을 나타내었다. 이러한 적층판의 수직응력 resultant, N_x, N_y 와 전단응력 resultant, N_{xy} 와 Q , 굽힘모멘트 M 은 다음과 같이 구해진다.

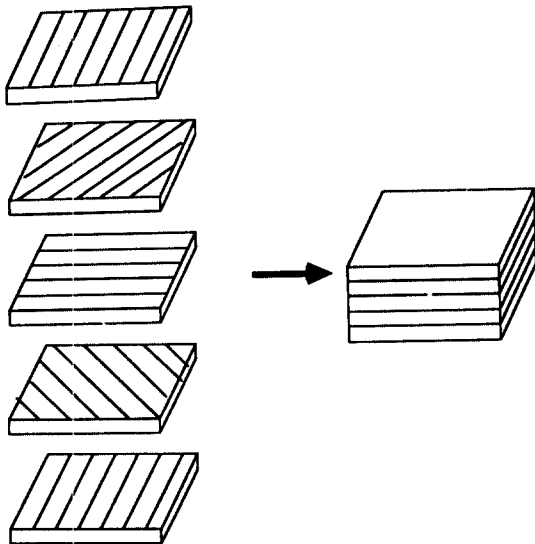


그림 3 복합재료의 적층

$$\begin{aligned}
 (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] dz \\
 (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} [\tau_{xz}, \tau_{yz}] dz \quad (36) \\
 (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] z dz
 \end{aligned}$$

그림 5에 윗식의 관계를 나타내었다. 윗식에 식 (33)을 고려하면 다음과 같은 결과식이 구해진다.

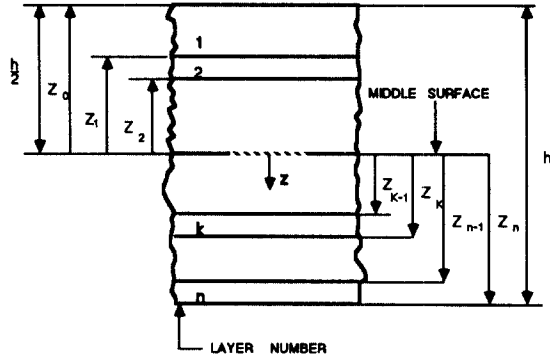
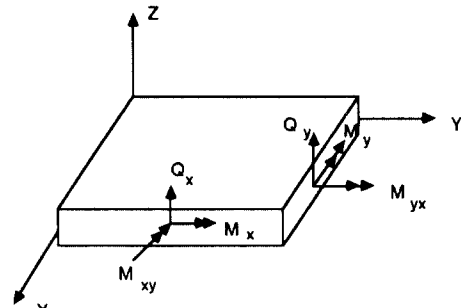
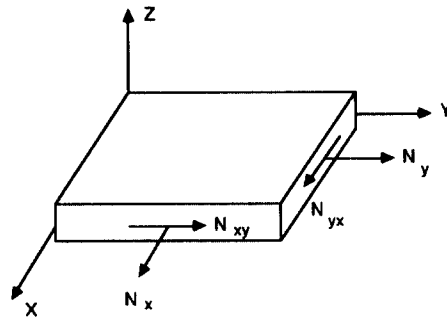


그림 4 복합재료 적층판의 지형



(a) 전단력과 굽힘 모멘트



(b) 축방향 합력과 전단력 (x-y평면)

그림 5 복합재료 평판과 합력

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad (37)$$

여기서,

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (38) \\ (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}) &= (\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \epsilon_z^0) + z(k_x, k_y, k_{xy}) \quad (39) \end{aligned}$$

윗식에서 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 각각 extensional stiffness, coupling stiffness 및 bending stiffness가 되고 ϵ^0 는 mid-plane 변형률이 되고 k 는 곡률이다. 식 (37)로 결론 지워지는 과정이 적층이론으로 알려져 있다. 동방체의 경우 식 (37)의 stiffness 행렬은 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} A & \nu A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu A & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)D \end{bmatrix} \quad (40)$$

여기서

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

적층이론을 이용하여 변형률과 응력을 구하는 방법은 다음과 같다. 먼저 식 (38)을 이용 주어진 적층판의 stiffness matrix를 구한다. 식 (37)의 합력·모멘트-변형률·곡률관계를 역으로 변형률·곡률-합력·모멘트 관계로 나타낸다. 이 관계를 이용하면 주어진 외력에서의 중간면의 변형률과 곡률이 구해진다. 이 중간면의 변형률과 곡률을 식 (39)에 대입하면 원하는 ply에서의 변형률을 구할 수 있다. 여기서 구한 변형률을 식 (32)에 대입하면 이때의

응력이 구해진다.

탄성 평형식 식 (1)에서 보다 힘을 무시하고 식 (36)관계를 고려하여 평형식을 적분하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \quad (41) \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q &= 0 \end{aligned}$$

여기서, q 는 평판에 작용하는 압력이다. Kirchhoff-Love 가정에 의하면 변위는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \quad (42) \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned}$$

평형식에서 유도된 식 (41)은 3차원에서 마찬가지로 재료의 종류에 관계없이 성립한다. 결국 복합재료 적층판과 등방성 재료의 차이는 식 (37)과 식 (40)의 차이에서 시작된다. 식 (37)과 (42)를 (41)에 대입하면 복합적층판에서 변위의 식들이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} A_{11}u_{0,xx} + 2A_{16}u_{0,xy} + A_{66}u_{0,yy} + A_{16}v_{0,xx} \\ + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} + A_{26}v_{0,yy} - B_{11}w_{,xxx} \\ - 3B_{16}w_{,xxy} - (B_{12} + 2B_{66})w_{,yyy} = 0 \\ A_{16}u_{0,xx} + (A_{12} + A_{66})u_{0,xy} + A_{26}u_{0,xy} \\ + 2A_{26}v_{0,xy} + A_{22}v_{0,yy} - B_{16}w_{,xxx} - (B_{12} \\ + 2B_{66})w_{,xxy} - 3B_{26}w_{,xyy} - B_{22}w_{,yyy} = 0 \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxxxy} + 2(D_{12} \\ + 2D_{66})w_{,xxyy} + 4D_{26}w_{,xyyy} + D_{22}w_{,yyyy} \\ - B_{11}u_{0,xxx} - 3B_{16}u_{0,xyy} - (B_{12} \\ + 2B_{66})u_{0,xyy} - B_{26}u_{0,yyy} \\ - B_{16}v_{0,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})v_{0,xyy} \\ - 3B_{26}v_{0,xyy} - B_{22}v_{0,yyy} = +q \end{aligned}$$

식 (43)으로 표현되는 일반적인 복합적층판을 해석적으로 풀기란 어려운 일이다. 여기서 는 대칭이고 ($B_{ij}=0$) 또한 $D_{16}=D_{26}=0$ 이 되

는 특별한 복합적층판을 고려한다. (대부분의 복합적층판은 이러한 조건을 만족하지는 않는다.) 이러한 복합적층판의 경우 식 (43)의 세번째 식은 다음과 같이 표현된다.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (44)$$

3.2 2차원 문제 예(단순지지된 사각적층판의 굽힘)

그림 6에 나타낸 바와 같이 단순지지된 사각 복합적층판에 분포하중 $q(x,y)$ 가 작용할 때의 굽힘을 살펴보자. 여기서 경계조건은 다음과 같다.

$$w = M_x = 0 \quad \text{for } x=0, a \quad (45)$$

$$w = M_y = 0 \quad \text{for } y=0, b$$

Navier⁽⁴⁰⁾의 방법을 적용하여 식 (44)와 (45)를 풀면 다음과 같다.

$$w = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{[D_{11}(\frac{m}{a})^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(\frac{mn}{ab})^2 + D_{22}(\frac{n}{b})^4]} \quad (46)$$

여기서

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

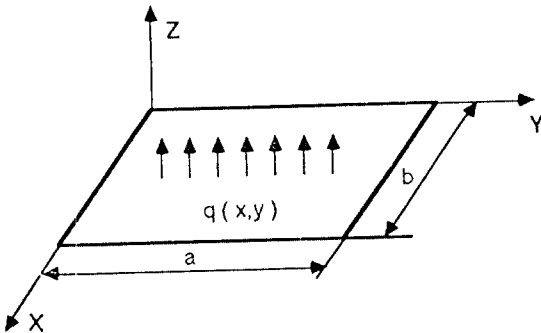


그림 6 단순 지지된 사각 적층판

등방체의 경우 해는 다음과 같이 구해진다.

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{[(\frac{m}{a})^4 + (2+\nu)(\frac{mn}{ab})^2 + (\frac{n}{b})^4]} \quad (47)$$

4. 복합재료의 1차원 이론

4.1 보 이론

복합재료 적층판의 1차원 이론은 보의 이론과 1차원 판 이론으로 나누워지는데 그 차이는 보의 이론은 평면응력 가정을 사용하는데 반해 1차원 판 이론은 평면 변형률 가정을 사용한다. 여기서는 보의 이론만을 알아 보았다. 또한 커플링효과가 없는 대칭 복합적층 보만 고려한다. 복합적층 보의 이론은 굽힘 stiffness를 나타내는 EI 를 동등한 stiffness $E_x^b I$ 로 대체하면 등방체의 보의 이론을 적용하여 해석할 수 있다⁽³¹⁾. $E_x^b I$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$E_x^b I = \sum_{k=1}^n E_t^k I^k \quad (48)$$

여기서

E_x^b : 유효한 굽힘 (effective bending) 계수

E_t^k : 보의 축 방향에 관한 k 번째 층 계수

I^k : 중간면에 대한 k 번째 층의 2차모멘트

곡률과 모멘트 식 (37)로 부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

보 이론을 유도하기 위해 다음과 같이 가정한다.

$$M_y = M_{xy} = 0 \quad (50)$$

그러면 식 (49)로 부터 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D_{11}^* M_x \quad (51)$$

여기서 보의 처짐, w 는 x 만의 함수로 가정한다. 그러므로 식 (51)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= -D_{11}^* M_x \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= -D_{11}^* \frac{M}{6} \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{M}{E_x^b I} \end{aligned} \quad (52)$$

여기서,

$$E_x^b = \frac{12}{h^3 D_{66}^*}, \quad M = bM_x, \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

식 (52)의 세번째 식은 등방체 보 이론과 같은식이 됨을 알 수 있다. 식 (41)로 표현되는 평형식에서 z -방향 평형식에 식 (50)을 고려하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q = 0 \quad (53)$$

식(52)를 식 (53)에 대입하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{E_x^b I} \quad (54)$$

여기서, $p = bq$

다시, 식 (54)는 등방체 보 이론식과 같음을 알 수 있다. 복합 적층 보에서 응력 분포는 모멘트-곡률관계와 굽힘응력-곡률관계와 굽힘응력-굽힘변형률 관계를 이용하여 유도할 수 있는데 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x^k &= Z f_1^k \frac{M}{I} \\ \sigma_y^k &= Z f_2^k \frac{M}{I} \\ \tau_{xy}^k &= Z f_3^k \frac{M}{I} \end{aligned} \quad (55)$$

여기서

$$\begin{aligned} f_1^k &= \bar{Q}_{11}^k \bar{S}_{11}^b + \bar{Q}_{12}^k \bar{S}_{12}^b + \bar{Q}_{16}^k \bar{S}_{16}^b \\ f_2^k &= \bar{Q}_{12}^k \bar{S}_{11}^b + \bar{Q}_{22}^k \bar{S}_{13}^b + \bar{Q}_{26}^k \bar{S}_{16}^b \\ f_3^k &= \bar{Q}_{16}^k \bar{S}_{11}^b + \bar{Q}_{26}^k \bar{S}_{12}^b + \bar{Q}_{66}^k \bar{S}_{16}^b \end{aligned} \quad (56)$$

윗 식에서, \bar{S}_{ij}^b 는 굽힘 컴플라이언스이다.

식 (55)에서 $f_1^k=1, f_2^k=f_3^k=0$ 가 되면 등방체 보에서의 굽힘응력이 됨을 알 수 있다. 복합 적층보에서 층간 전단 강도가 상대적으로 약하기 때문에 층간 전단 응력은 중요한 의미를 갖는다. 층간 전단응력은 x 방향의 평형식을 z 에 관하여 적분하고 식 (55)의 첫째 식을 고려하면 구할 수 있는데 이것은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_{xz}^k = -\frac{Q}{I} \int_{-h/2}^{z^k} f_1^k z dz \quad (57)$$

여기서, Q 는 전단력이다.

등방체 경우 윗 식에 $f_1^k=1$ 을 대입하여 적분하면 구할 수 있는데 그 결과는 다음과 같다.

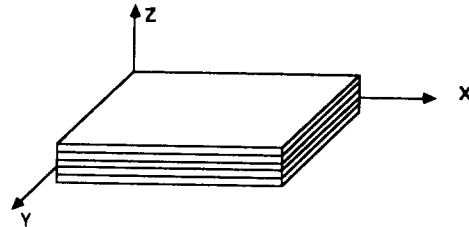
$$\tau_{xz} = [1 - 4(\frac{z}{h})^2] \frac{h^2 Q}{8I} \quad (58)$$

식 (58)은 등방체 보의 이론에서 구한 식과 같아진다.

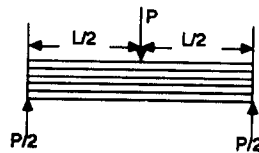
4.2 1차원 문제 예(단순 지지된 복합재료 적층보의 굽힘)

복합재료 적층 보의 이론의 예로 그림 7(b)에 나타난 바와 같은 단순 지지된 복합 재료 적층보의 3점 굽힘을 고려한다. 이 때 경계조건은 다음과 같다.

$$w=0, \quad M=0 \quad \text{at } x=0 \quad (59)$$



(a) 보의 지형



(b) 3점 굽힘

그림 7 복합 적층보

$$\frac{dw}{dx} = 0 \text{ (대칭조건) at } x = L/2$$

보의 왼쪽에서 굽힘모멘트는 다음과 같이 된다.

$$M = -\frac{Px}{2} \quad 0 \leq x \leq L/2 \quad (60)$$

윗 식을 식 (52)에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{Px}{2E_x b I} \quad (61)$$

윗 식을 경계조건, 식 (59)를 고려하여 x 에 관하여 두 번 적분하면 다음과 같은 처짐식이 구해진다.

$$w = -\frac{PL^2x}{48E_x b I} \left[3 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right] \quad (62)$$

이때, 응력은 식 (60)을 식 (55)에 대입하면 구할 수 있다. 최대응력은 보의 중심에서 일어남을 알 수 있다. x 방향의 최대응력은 다음과 같다.

$$\sigma_x^*(L/2) = -3Zf_1^* \frac{PL}{bh^3} \quad (63)$$

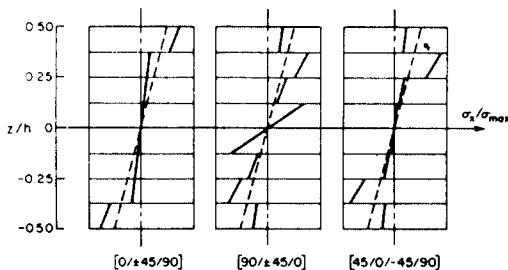


그림 8 3점굽힘에서 복합 적층보의 응력 분포

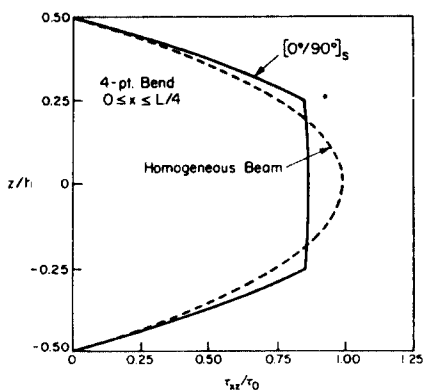


그림 9 4점 굽힘에서 층간 전단응력분포

등방체 보에서의 최대응력은 윗 식에 $f_1^*=1$ 을 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_{max} = \pm \frac{3PL}{2bh^3} \quad (64)$$

여기서 한 가지 중요한 것은 복합적층보의 경우 최대응력이 등방체보의 경우와는 달리 항상 보의 바깥면에서만 일어나지는 않는다는 것이다. 그림 8은 보에서의 응력분포를 보여 주는데, 점선이 등방체경우이고 실선이 복합재료를 나타낸다. 그림에서 보듯이 $[0/\pm 45/90]$ 적층판의 경우 최대응력이 바깥면에서 나타났으나 $[90/\pm 45/0]$ 와 $[±45/0/-45/90]$ 의 경우 보의 내부에서 최대응력이 나타남을 알 수 있다. 윗 세가지 경우 최대응력은 모두 $\theta=0^\circ$ 인 ply에서 일어났음을 알 수 있다. (항상 성립하는 것은 아님) 이것은 $\theta=0^\circ$ 인 ply가 가장 stiffness가 크다는 것으로 설명될 수 있다. 그림 9에 cross laminate를 이용, 4점 굽힘에서의 층간 전단응력을 등방체의 경우와 비교하였다. 그림에서 실선이 복합재료이고 점선은 등방체이다.

5. 맺음말

지금까지 알아본 복합재료의 탄성 문제를 정리하면 다음과 같다. 복합재료와 등방성 재료의 탄성학적 차이는 재료의 탄성계수에 기인하며 이것은 각각 다른 형태의 응력-변형률관계를 갖게 한다. 한편 응력-변형률 관계식을 제외한 탄성학의 지배방정식은 재료의 종류에 관계없이 성립한다.

복합적층판의 Stiffness와 응력 등은 Lamination이론을 사용하여 구할 수 있다. 판이론은 평형식을 z 방향으로 적분한 식, 즉 합력(resultant force)과 모멘트로 나타낸 평형식을 사용하는데 이 때 처짐 방정식을 구하기 위해 합력·모멘트·곡률·변형률 관계식을 이용하는데 이 관계식이 복합재료와 등방성재료가 상이하다. 결과로 복합재료는 커플링 효과를 갖게 되며, 복합적층판을 대칭으로 쌓으면 이 효과를 상쇄시킬 수 있다.

복합적층 보의 이론은 유효 굽힘 계수를 도입하면 등방체 보 이론을 사용하여 보의 처짐을 해석할 수 있다. 복합적층 보의 경우 굽힘 응력의 최대치는 등방체와는 달리 보의 표면에서만 일어나지 않고 내부에서도 일어날 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Saint-Venant, B., 1856, "Memoire sur la Torsion des Prismes," Memoires Presentes par Divers Savants a l'academie des Science, Sciences Mathematiques et Physiques, Vol. 14, pp. 233~560.
- (2) Voigt, W., 1928, "Lehrbuch der Kristallphysik", Teuber, Germany.
- (3) Lekhnitskii, S.G., 1977, "Theory of Elasticity of an Anisotropic Body", Mir Publishers, Moscow, U.S.S.R.
- (4) Novozhilov, V.V., 1958, "Theory of Elasticity", Sudpromaiz, U.S.S.R., Transl. Pergamon Press.
- (5) Stubbs, N., 1984, "Experimental Estimation of Saint-Venant's End Effects for Cruciform Fabric Specimens", Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 3, pp. 180~192.
- (6) Pagano, N.J., and Whitford, L.E., 1985, "On the Solution for the Elastic Response of Involute Bodies", Composites Science and Technology, Vol. 22, pp. 295~317.
- (7) Whitney, J.M., 1967, "Elastic Moduli of Unidirectional Composites with Anisotropic Filaments", J. Composite Materials, Vol. 1, pp. 188~193.
- (8) Rosen, B.W., 1971, "On Some Symmetry Conditions for Three Dimensional Fibrous Composites", J. Composite Materials, Vol. 5, pp. 279~282.
- (9) Enie, R.B., et al., 1969, "Three-Dimensional Laminate Moduli", J. Composite Materials, Vol. 4, pp. 150~154.
- (10) Rosen, B.W., 1972, "A Simple Procedure for Experimental Determination of the Longitudinal Shear Modulus of Unidirectional Composites", J. Composite Materials, Vol. 6, pp. 552~555.
- (11) Wolfgang, S., 1974, "Measurement of the Elastic Moduli of Continuous Filament and Eutectic Composite Materials", J. Composite materials, Vol. 8, pp. 378~390.
- (12) Ko, H.Y., and Stue, S., 1974, "Three Dimensional Mechanical Characterization of Anisotropic Composites", J. Composite Materials, Vol. 8, pp. 178~189.
- (13) Knight, M., 1982, "Three-Dimensional Elastic Moduli of Graphite/Epoxy Composites", J. Composite Materials, Vol. 16, pp. 153~159.
- (14) Takashi, I., et al., 1984, "Experimental Confirmation of the Theory of Elastic Moduli of Fabric Composites", J. Composite materials, Vol. 18, pp. 443~458.
- (15) Nilsson, S., and Carlsson, L., 1985, "Influence of Thickness on Three Dimensional Elastic Properties of a Unidirectional Graphite/Epoxy Composite", J. Reinforced Plastics and Composites, Vol. 4, pp. 383~385.
- (16) Lekhnitskii, S.G., 1968, "Anisotropic Plates", translated in English by S.W. Tsai & T. Cheron, Gordon & Breach Science Publishers.
- (17) Ashton, J.E., and Whitney, J.M., 1970, "Theory of Laminated Plates", Technomic Publishing Co.
- (18) Ashton, J.E., and Waddoups, M.E., 1968, "Analysis of Anisotropic Plates", J. Composite Materials, Vol. 3, pp. 148~165.
- (19) Ashton, J.E., 1969, "Anisotropic Plate Analysis-Boundary Conditions", J. Composite Materials, Vol. 4, pp. 150~154.

- ite Materials, Vol. 4, 162~171.
- (20) Whitney, J.M., 1969, "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates", *J. Composite Materials*, Vol. 3, pp. 534~547.
- (21) Pipes, R.B., and Paganio, N.J., 1970, "Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension", *J. Composite Materials*, Vol. 4, pp. 538~548.
- (22) Ren, J.G., 1986, "A New Theory of Laminated Plate", *Composite Science and Technology*, Vol. 26, pp. 225~239.
- (23) Brunelle, E.J., 1986, "Eigenvalue Similarity Rules for Symmetric Cross-Ply Laminated Plates", *AIAA Journal*, Vol. 24, pp. 151~154.
- (24) Wu, C.M.L., and Webber, J.P.H., 1986, "Analysis of Tapered(in Steps)Laminated Plates Under Uniform in Plane Load", *Composite Structures*, Vol. 5, pp. 87~100.
- (25) Iyengar, N.G.R., and Umaretiya, J.R., 1986, "Deflection Analysis of Hybrid Laminated Composite Plates", *Composite Structures*, Vol. 5, pp. 15~32.
- (26) Sharma, S., et al., 1983, "A Study of Coupling in Laminated Plates", *Fibre Science and Technology*, Vol. 18, p. 287.
- (27) Ambartsumgan, S.A., 1961, "Theory of Anisotropic Shells", *Fibre Science and Technology*, Vol. 18, pp. 287~299.
- (28) Vasil'ev, V.V., 1982, "Theory of Composite Shells", *Mechanics of Composites*, I. F. Obraztsov, et al., eds.
- (29) Bogdanovich, A.E., 1985, "Calculation of Transverse and Interply Stresses in Cylindrical Shells Made of Laminated Composites in Dynamic Compressive Loading", *Mekhanika Kompozitnykh Materialov*, pp. 455~467.
- (30) Reddy, J.N., 1982, "Bending of Laminated Anisotropic Shells by A Shear Deformable Finite Element", *Fibre Science & Technology*, Vol. 17, pp. 9~24.
- (31) Whitney, J.M., 1981, "One-Dimensional Theory of Anisotropic Plates and Beams", in *Composite Design Guide*, D.W. Wilson, et al., eds, University of Delaware, U.S.A.
- (32) Kassimali, A., et al., 1986, "Bending and Transverse Shear Stresses in Fiber-Composite Beams by the Transformed-Section Method", *Composite Structures*, Vol. 5, pp. 33~49.
- (33) Fischer, S., et al., 1986, "Dependence of the Interlaminar Shear Strength on the Loading Span-to-depth Ratio in Aramid Fibre-reinforced Beams", *Composites Science & Technology*, Vol. 25, pp. 69~73.
- (34) Sullivan, J.L., 1986, "An Elasticity Analysis for the Generally and Specially Orthotropic Beam Subjected to Concentrate Loads", *Composite Science and Technology*, Vol. 27, pp. 133~155.
- (35) Christensen, R.M., 1979, "Mechanics of Composite Materials", Wiley-Interscience Publication.
- (36) Tsai, S.W., and Hahn, 1980, "Introduction to Composite Materials", Technomic Publishing Co.
- (37) Agarwal, B.D., and Broutman, L.J., 1980 "Analysis and Performance of Fiber Composites", Wiley-Interscience Publication.
- (38) Jones, R.M., 1975, "Mechanics of Composites Materials", Scripta Book Co.
- (39) Sokolnikoff, I.S., 1956, "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw Hill Book Co.
- (40) Timoshenko, S., and Woinowsky-Krienger, S., 1958, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill Book Company.