

고유 변형도법에 의한 잔류응력의 계산

장 창 두*, 서 승 일**

Calculation of Residual Stresses by Inherent Strain Method

C. D. Jang*, S. I. Seo**

Key Words : Inherent Strain(고유 변형도), Degree of Restraint(구속도), Incompatibility(부적합도), Collocation Method(선점법)

Abstract

Among various calculation methods for residual stresses, inherent strain method can be useful one for its simplicity. In comparison with finite element method, it is more economical and efficient.

First, inherent strain is assumed, and then incompatibility can be calculated from this inherent strain. Based on collocation method, incompatibility equation is solved assuming stress function which satisfies boundary conditions. Assumed inherent strain can be determined through iterations on the condition that longitudinal residual stress in centerline is yield stress and transverse distortion is the same as predicted one from other method.

Calculated results according to this analytic method yield good agreement with experimental ones.

1. 서 론

구조물의 용접에 따른 잔류응력은 심각한 구조 손상의 원인이 되고 있으므로 그 크기와 분포를 추정하기 위한 연구는 이미 오래 전부터 수행되어 왔다. 잔류응력의 분포 특성을 알기 위해서 실험적인 방법과 이론적인 방법이 적용되고 있는데, 근래에 전자계산기의 발달과 함께 이론적인 방법이 위력을 발하고 있다. 잔류응력을 이론 해석을 통해 구하는 수단으로 유한요소법과 고유변형도법이 이용되고 있다. 유한요소법은 특히 전자계산기

의 도움으로 막강한 위력을 발휘하여 용접에 따른 열전달 과정 및 복잡한 탄소성 반복 과정을 시간에 따라 추적하여 최종 잔류응력을 구해 내고 있다[1]. 그런데, 유한요소법을 적용할 경우는 많은 전산기 사용 시간을 요하고 있으므로, 경제적인 면에서 무리가 따르게 된다. 한편 고유변형도(Inherent strain)는 불균일한 온도분포의 결과로 생기는 용접부 주위의 비탄성 변형도(Inelastic strain)라고 할 수 있다. 비탄성 변형도를 제외한 영역은 탄성 영역이라고 볼 수 있는데, 고유변형도는 탄성 응력장에서 특이점(Singular point)의

고유 변형도법에 의한 잔류응력의 계산 형태인 부적합도(Incompatibility)를 형성한다. 이 부적합도를 이용하여 탄성적으로 잔류응력을 계산할 수 있다. Masubuchi[2]는 실험 결과를 바탕으로 용접부 근처에 소성 영역을 가정하고 轉位이론(Dislocation theory)를 이용하여 용접선 길이 방향의 잔류응력을 구하였다. 佐藤[6]는 가정된 고유변형도에 의해 잔류응력을 구하고, 고유 변형도는 실험에 의해 얻어진 변형을 이용하여 추정하는 방법을 사용하였다. 藤本은 깊이있게 고유 변형도법의 이론과 그 적용을 연구하였다. 藤本은 부적합 방정식(Incompatibility equation)의 이론적인 정해(Exact solution)에서 출발하였다. 藤本[3]은 먼저 고유변형도 분포 함수를 가정하고 고유 변형도를 부적합 방정식의 정해에 대입한 후, Fourier급수 전개를 통해 응력을 구하고 경계 보정을 위해 반복 계산을 수행하였다. 藤本の 방법은 무한판(Infinite plate)에 대한 정해에서 출발함으로 인해 많은 수학적 과정을 거쳐야 하는 복잡함을 내포하고 있으므로, 본 연구에서는 경계 조건을 만족하는 근사해에서 출발하여 잔류응력을 계산하는 방법을 제안하고자 한다. 가정된 고유 변형도는 佐藤에 의해 제시된 고유 변형 산식과 上田[4]에 의해 제시된 구속도(Degree of restraint) 계산식을 이용하여 결정하였다.

2. 이론 해석

열변형도나 소성변형도와 같은 비탄성변형도(고유 변형도) ϵ_x^* , ϵ_y^* , γ_{xy}^* 가 존재하는 2차원 탄성 응력장 내에서 다음의 방정식이 성립된다.

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \cdot R(x, y) \quad (1)$$

여기서 $F(x, y)$ 는 Airy의 응력함수

$$R(x, y) = - \left(\frac{\partial^2 \epsilon_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^*}{\partial x \partial y} \right) \quad (2)$$

이고, 부적합도(Incompatibility)이다. 또

E 는 탄성 계수이다.

Fig 1. 과 같은 평판의 경계에서는 자유의 상태이므로 경계에서 다음의 조건이 만족되어야 한다.

$$x = \pm a \text{ 에서 } \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4)$$

$$y = \pm b \text{ 에서 } \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

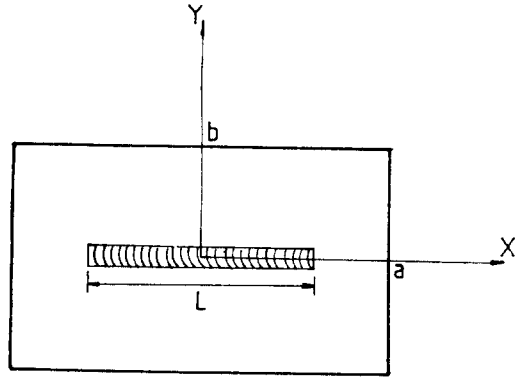


Fig 1. Specimen for type welding.

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

경계를 표현하는 곡선을 $g(x, y)$ 라 하면 (3) ~ (6)을 만족하는 함수는 다음 식으로 표시된다.

$$F(x, y) = g(x, y)^2 f(x, y) \quad (7)$$

$f(x, y)$ 는 임의의 함수인데 삼각 함수로 표현할 수 있다. 따라서 응력 함수를 다음 식으로 가정할 수 있다.

$$F(x, y) = \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos^2 \frac{\pi y}{2b} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} \cos \frac{k\pi x}{a} \cdot \cos \frac{l\pi y}{b} \quad (8)$$

3. 고유 변형도의 분포

용접 중 열응력은 소성영역의 범위에서 발생하므로, 같은 크기의 두 열원에 의해 발생된 응력이 각 열원에 의해 발생된 응력의 합과 일치하지 않는다. 그러나 고유응력의 이론에 있어서는 최종적인 응력 상태에만 관심을 가지므로, 계산의 편의상 고유 변형도의 분포를 여러 개로 분할하여 각 고유 변형도 성분의 중첩에 의해 응력을 구할 수가 있다.

藤本은 맞대기 용접부의 고유 변형도 분포로부터 적분 방정식을 풀어 다음의 고유 변형도 기본 함수를 제안하였다[3].

$$f(r) = K \exp(-\beta r^2) \quad (9)$$

$$K = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \cdot H \quad (10)$$

맞대기 용접의 고유 변형도 분포에 있어서 β 값은 등가 소성 영역의 반폭 δ 에 의해 다음 식으로 주어진다[5].

$$\delta eq = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \quad (11)$$

藤本은 고유 함수의 총첩에 의해 Slit형 맞대기 용접의 고유변형도를 3가지 형태로 제안하였다

(1) 편평형 분포 (flat type)

$$f(x, y) = \frac{k_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp(-\beta y^2) \cdot \left\{ \phi(z) \right\}_{z=\frac{\sqrt{\beta}(x+L/2)}{z=\frac{\sqrt{\beta}(x-L/2)}}} \quad (12)$$

$$\text{여기서 } \phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz \quad (13)$$

(2) 볼록형 분포 (Convex type)

$$f(x, y) = \frac{k_1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp(-\beta y^2) \left\{ 1 - \frac{4k_1}{L^2} \right.$$

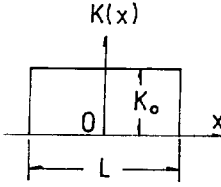
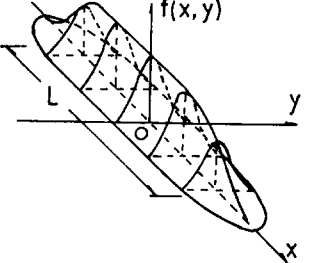
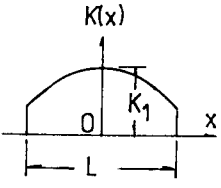
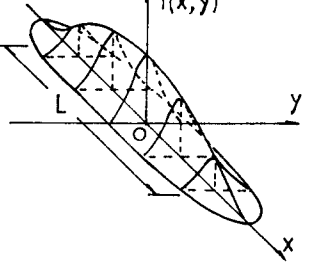
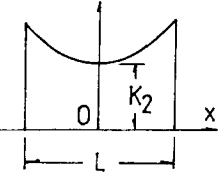
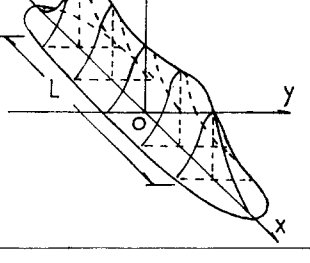
$$\left. \left(x^2 + \frac{1}{2\beta} \right) \right\} \phi(z) - \frac{4k_1}{L^2 \sqrt{\beta}} \left(x - \frac{z}{2\sqrt{\beta}} \right) \cdot \varphi(z) \Bigg|_{z=\frac{\sqrt{\beta}(x+L/2)}{z=\frac{\sqrt{\beta}(x-L/2)}}} \quad (14)$$

$$\text{여기서 } \varphi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \quad (15)$$

(3) 오목형 분포 (Concave type)

$$f(x, y) = \frac{k_2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp(-\beta y^2) \left\{ \left(1 + \frac{4k_2}{L^2} \right) \left(x^2 + \frac{1}{2\beta} \right) \right\} \phi(z) + \frac{4k_2}{L^2 \sqrt{\beta}} \left(x - \frac{z}{2\sqrt{\beta}} \right) \cdot \varphi(z) \Bigg|_{z=\frac{\sqrt{\beta}(x+L/2)}{z=\frac{\sqrt{\beta}(x-L/2)}}} \quad (16)$$

Table 1. Three fundamental types of distributions

Type	Density	Distribution
I Flat type		
II Convex type		
III Concave type		

고유 변형도법에 의한 잔류응력의 계산

위 3가지 형태 중에서 藤本은 중 고유변형도 ϵ_x^* 에는 편평형 분포를, 횡 고유변형도 ϵ_y^* 에는 볼록형 분포를 사용할 것을 추천하고 있다. 횡 고유변형도 ϵ_y^* 에 따른 고유횡수축 η_y 는 x축을 중심으로 2δ 의 띠영역에 횡 고유변형도가 분포한다고 할 때 다음 식으로 구해진다.

$$\begin{aligned} \eta_y &= -\int_{-\delta}^{\delta} \epsilon_y^* dy \\ &= \frac{\pi K_1}{2\beta} \left\{ \left(1 - \frac{4k}{L^2} \left(x^2 + \frac{1}{2\beta} \right) \right) \phi(z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4k}{L^2\beta} \left(x - \frac{z}{2\sqrt{\beta}} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \phi(z) \right\}_{z=\sqrt{\beta}(x+L/2)}^{z=\sqrt{\beta}(x-L/2)} \end{aligned} \quad (17)$$

r_{xy}^* 는 그 양이 미소하므로 무시한다.

4. 고유변형도의 결정

고유변형도의 확정적인 값은 ϵ_x^* 와 ϵ_y^* 중의 β , K_0 , K_1 과 k 의 값에 의해 결정된다. β 는 소성 영역의 폭에 관계하는 상수인데, 용접부로 공급되는 열량에 의해 결정된다. 藤本은 정밀 열탄소성 해석 결과를 참고하여 고유 변형도의 특성치를 입력 자료로 구하는 곡선을 제시하였다[5].

무차원 계수는 다음의 관계가 있다.

$$\xi_0 = \delta_0 / b \quad (18)$$

$$\tau = \alpha \cdot T \cdot E / \sigma_y \quad (19)$$

$$\xi_{eq} = \delta_{eq} / b \quad (20)$$

$$\beta = \frac{\pi}{4\delta_{eq}^2} \quad (21)$$

여기서, δ_0 =최초에 용접으로 가열된 영역

T =온도

α =선팅창 계수

δ_{eq} =등가의 소성 영역의 폭

σ_y =항복 응력

재료의 성질과 용접 조건을 알면 Fig.2로 부터 ξ_{eq} 를 구할 수 있고 (20), (21)에서 β 를 구할 수 있다.

ϵ_y^* 의 분포를 확정하는 상수 K_1 과 k 는 횡수축 분포로부터 구할 수 있다. Slit형 용접의 횡수축 분포는 佐藤의 이론을 이용할 수 있다[6].

횡수축 S_{tr} 는 다음 식으로 표현된다.

$$S_{tr} = F_c \times S_{tr} \quad (22)$$

F_c 는 이음의 외적 구속 상태에 의해 결정되는 함수이고, S_{tr} 는 외적 구속이 없는 자유 수축량이다. 또한

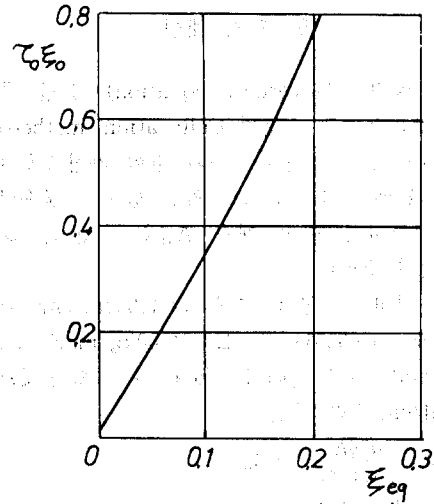


Fig 2. Welding inherent strain vs. Heat input.

$$S_{tr} = \xi_{tr} \times F_g \quad (23)$$

로 표시되는데, F_g 는 용접된 물체의 형상, 치수에 의해 정해지는 함수이고, Slit형 맞대기 용접에서 이음부의 길이가 적으면 1로 되고 길이가 길면 $1 + \nu$ 로 근사된다. ξ_{tr} 는 佐藤의 실험에 의한 제안식에 따라

$$\xi_{tr} = C_1 \left(\frac{A}{h^2} \right) \log_{10} \frac{W}{W_0} + C_2 \sqrt{\frac{A}{h^2}} \quad (24)$$

여기서, A =개선 면적(cm^2)

W_0 =첫 층의 단위 길이당 용착 중량 (g/cm)

W =단위 용접 길이당 전용착 중량 (g/cm)

C_1, C_2 =각각 전류 I 및 \sqrt{I} 에 비례하는 상수

용접부의 구속도(degree of restraint)를 p 라 하면, 上田의 제안식[4]에 의해

$$p(x) = (1 - \beta_p) \cdot \frac{E}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2}} \quad (25)$$

$$\beta_p = \frac{0.6}{\left(\frac{2a}{L} \right)^n} + \frac{0.75}{\left(\frac{2b}{L} \right)^{1.82}} \quad (26)$$

$$n = \frac{5.8}{\left(\frac{2b}{L} \right)^2} + 2.2 \quad (27)$$

로 표시되고 (22)의 F_c 는

$$F_c = \frac{1}{1 + 0.086p^{0.87}} \quad (28)$$

이 된다.

5. 수치 계산

지배 방정식(Governing equation) (1)을 푸는 데는 기본적으로 선점법(Collocation method)를 이용한다. 응력 함수를 (8)과 같이 가정했을 때, (8)을 (1)에 대입하고 고려하는 함수의 갯수만큼 점을 대입하여 미정 계수 A_{ki} 을 구한다. β 는 Fig. 2에서 구한다.

단위 면적 당 공급 열량 $q=4200\text{cal/cm}^2$ 이라 하고, $\alpha=0.000011/\text{C}$, $E=21000\text{kg/mm}^2$, $\sigma_y=28\text{kg/mm}^2$, 비열(Specific heat)과 밀도를 $C\rho=1.00\text{cal/cm}^3\text{C}$ 라 하면

$$\tau_0 \xi_0 = \frac{\alpha q E}{2bc\rho \sigma_y} = 0.43$$

$$\delta_{eq} = b \xi_{eq} = 5.0\text{cm}$$

$$\beta = \frac{\pi}{4\delta_{eq}} = 0.03125\text{cm}^{-2}$$

이 된다.

시편의 크기는 $2a \times 2b \times t = 120\text{cm} \times 80\text{cm} \times 1.2\text{cm}$ 이고, 개선 면적 $A=0.83\text{cm}^2$, 용착 중량 $W_0=0.435\text{g/cm}$, $W=3.166\text{g/cm}$ 라고 하면 4의 방법에 따라 용접 길이 $L=30\text{cm}$, 45cm , 60cm 에 대해 고유 횡수축이 구해진다. 계산에 의해 구해진 고유 횡수축과 실험에 의해 측정된 값이 Fig. 3으로 부터 알 수 있듯이 양호한 일치율을 보여주고 있다.

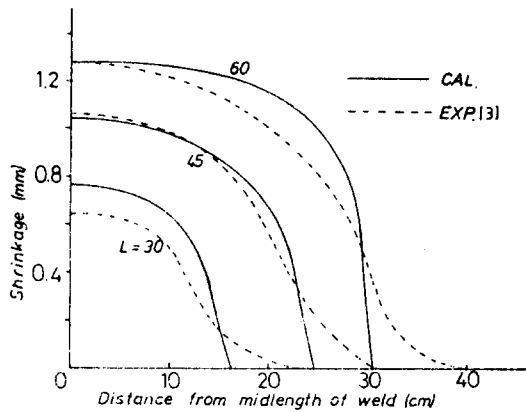


Fig 3. Inherent transverse shrinkage.

K_1 과 k 는 위에서 구해진 고유 횡수축을 (17)에 대입함으로 얻어진다. K_0 는 중앙에서 잔류 종응력이 σ_y 가 되도록 반복법에 의해 구한다. $L=45\text{cm}$ 인 모델에 대해 K_1 , k , K_0 를 구하면 다음과 같다.

$$K_0 = 0.3891 \times 10^{-4} \text{cm}^{-1}$$

$$K_1 = 0.1343 \times 10^{-2} \text{cm}^{-1}$$

$$k = 0.2435$$

확정된 고유변형도를 바탕으로, 계산된 잔류응력은 Fig. 4, 5와 같다. Fig. 4, 5에 따르면 실험 결과

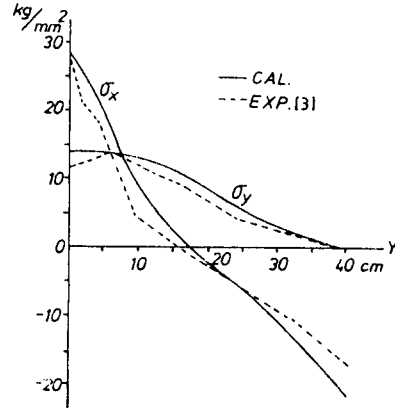


Fig 4. Residual stress distribution along Y-axis.

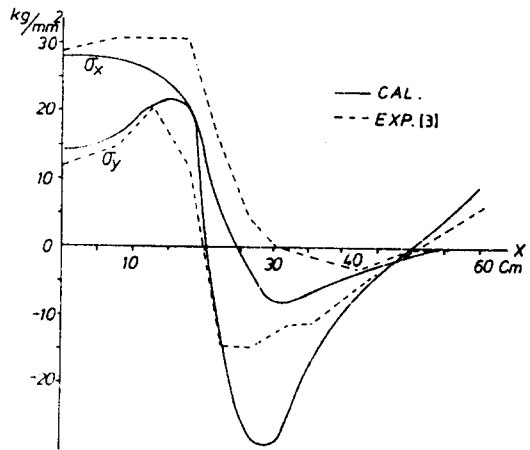


Fig 5. Residual stress distribution along X-axis.

과와 계산 결과는 양호한 일치율을 보여 준다. 용접선 방향으로 분포하는 응력이 약간 차이를 보이지만, 藤本은 실험 시에 굽힘 변형이 발생하기 때문이라고 설명하였다.

6. 결 론

고유변형도를 가정하여 탄성적으로 잔류응력을 구하는 방법은 이상의 과정을 통해 볼 때 유효함을 알 수 있다. 구속도를 도입하여 고유변형을 구

고유 변형도법에 의한 잔류응력의 계산

하는 과정도 적절함을 알 수 있다. 藤本の 정해에서 출발한 방법과 비교하여 볼 때에도 응력 함수를 가정한 근사 방법이 더 효과적이다.

고유변형도법은 잔류응력을 해석적으로 구할 수 있는 용이한 방법이지만, 가장 큰 난점은 고유변형도의 정확한 결정에 있다 하겠다. 고유변형도의 기본 함수는 藤本の 제안이 적절함을 입증하였으나, 확정값을 구하기 위한 상수가 계속하여 미정으로 남게 된다. 지속적인 연구를 통해 다양한 용접 이음부 형태에 대한 고유변형도 결정 방법이 확립된다면 고유변형도법은 잔류응력 해석에 긴요한 방법이 될 것이다.

참고 문헌

1. 장창두, 서승일, 열탄소성 해석에 의한 잔류응력의 계산, 대한용접학회지, 6(4), 1988.

2. K. Masubuchi, Analysis of Welded Structures, Pergamon press, 1980.
3. 藤本二男, スリット形突合せ溶接継手を有する長方形板の残留應力, 溶接學會誌, 40(5), 1971.
4. 上田, 福田, 金, スリット溶接継手の拘束度, 溶接學會誌, 48(10), 1979.
5. 藤本二男, 固有ひずみの概念による溶接残留應力および溶接變形の解析法, 溶接學會誌, 39(4), 1970.
6. 渡邊, 佐藤, 溶接力學とその應用, 朝倉書店, 1965.
7. 山田忠彦, 溶接構造物の残留應力および變形に關する研究, 溶接學會誌, 33(3), 1964.
8. M. Abramowitz, Z. A. Stegun, Handbook of Mathematical Function, DOVER PUBLICATION, 1970.