

<論 文>

마찰을 고려한 치차의 접촉 문제 해석

이 대 희* · 최 동 훈**

(1989년 9월 20일 접수)

Analysis of Contact Problem of Mating Gear Teeth Taking Account of Friction on the Involute Surface

Dae Hee Lee and Dong Hoon Choi

Key Words : Contact Problem(접촉문제), Friction(마찰), Gear(치차), Finite Element Method (유한 요소법), Linear Programming(선형 계획법)

Abstract

The gears which are used to transmit power and motion in most machines should be designed to satisfy the limit conditions in terms of the bending stress, the contact stress, the thickness of the lubrication film, and the increase of the maximum local temperature. For the pitch line velocities of middle range, the limit on the contact stress between gear teeth dominates among these factors, which requires the stringent analysis of the contact phenomena between the meshing teeth. In practice, the contact between the mating teeth has been approximated to the contact between two idealized frictionless cylinders, and contact stress distribution has been found by applying the Hertz's formula. however, since the actual tooth profile is generated by an involute curve and the tangential load apparently exists due to the relative motion and the friction between the teeth in contact, these actual condition need be considered for scrupulous analysis. In this paper, the frictional contact problem between two involute teeth is analyzed to obtain the distribution of tangential tractions. In the process, finite element method is used to calculate the necessary flexibility matrices for the pinion and the gear and the solution is effeciently found by using an optimization technique. The analysis of the frictional contact problem between involute gears by the proposed algorithm seems to provide an accurate method to obtain the distribution of the compound contact stress which governs pitting, one of the most improtant factors for gear failure.

기 호 설 명

a	: 半徑	f	: 摩 擦 係 數
a^*	: 圓形 接觸面의 半徑	$\underline{F}^1, \underline{F}^2$: 影 響 係 數 行 列
e	: $[1, 1, \dots, 1]^T$	F_{ki}	: 影 響 係 數
E	: 彈 性 係 數	\underline{I}	: 單 位 行 列 (Identity matrix)
		L	: 예 상 接 觸 點 處 的 거 리
		L^*	: 接 觸 길 이
		m	: 모 두 을
		n	: 예 상 接 觸 點 的 數

*정회원, 한국과학기술연구원 기계시스템연구실
**정회원, 한양대학교 공과대학 기계설계학과

- p_k : 任意的 k 點에서 垂直力
- P : 垂直力 벡터
- r : 接觸點까지의 半徑
- s : 接線力 벡터
- s_k : 任意的 k 點에서의 接線力
- T : 接線 荷重
- u_k : 接線 方向으로의 接線 變位
- Y_1, Y_2 : slack 變數 벡터
- Y_{1k}, Y_{2k} : 음이 아닌 變數
- Z_j, Z_{2n+1} : 任意 變數
- Z_1, Z_2 : 任意 變數 벡터
- β : 接線 荷重 方向으로의 剛體 變位
- ν : 登점성 係數

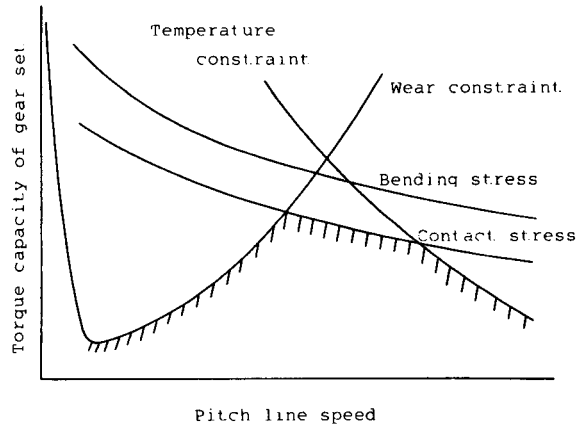


Fig. 1 The regions of gear failure

1. 서 론

1984年 Duddley⁽¹⁾에 의하면 齒車의 設計에 있어 고려 되어야 할 因子는 疲勞現象에 의하여 이의 破斷을 일으키는 굽힘 應力, 피팅(pitting)을 유발하는 接觸 應力, 마멸량을 결정하는 潤滑油내의 最大 局所 溫度 上昇이다. 그리고 많은 實驗과 經驗을 통하여 피치선 速度에 대한 限界荷重의 變化는 Fig. 1과 같이 각 因子에 의하여 影響을 받는다는 것이 알려져 있다. Fig. 1에서 볼 수 있는 바와 같이 중간 범위의 速度로 돌아가는 齒車의 경우 接觸 應力이 設計 制限 條件이 되어 齒車의 接觸 應力을 자세하게 해석 할 필요가 있다.

현재의 齒車 設計는 대부분 AGMA^(2,3)의 設計 기준에 의존하고 있으며 이중에서도 接觸 應力에 대한 것은 다음과 같은 가정하에 Hertz⁽⁴⁾의 理論解를 사용하여 구하였다.

- (1) 인벌루우트 曲面간의 接觸을 두개의 圓筒의 接觸으로 이상화한다.
- (2) 摩擦을 무시하여 垂直 荷重만을 고려한다.

첫번째 가정은 피치선 근처에서는 오차가 작지만 기초원 근처에서는 인벌루우트 曲線의 曲率 半徑의 變化가 크므로 부적합하다. 두번째 가정은 垂直 荷重에 의하여 接觸 領域이 형성되고 相對 運動과 摩擦로 인하여 接線力이 증척되기 때문에 실제적인 齒車에 대한 接觸 應力 解析에는 부적합하다.

本 研究에서는 두 齒車사이의 接觸 問題를 解析, 하기 위하여 摩擦을 고려한 垂直 荷重과 接線 荷重이 동시에 작용하는 경우에서의 接觸 問題를 수식화하였다. 그리고 두개의 圓筒의 接觸으로 가정함

이 없이 실제적인 인벌루우트 曲面간의 接觸 問題를 解析하기 위하여 有限 要素法을 사용하였으며 非線形 聯立 方程式으로 수식화된 接觸 問題를 효과적으로 풀기 위하여 最適化 技法을 이용한 算法을 제시하였다. 이때 摩擦을 고려한 齒車의 接觸 問題 解析에 필요한 垂直 壓力 分布는 李⁽⁵⁾ 등에 의하여 이루어진 結果를 이용하였다. 제시한 算法에 의하여 摩擦을 고려한 두 齒車의 接觸 問題를 解析하여 齒車 損傷의 重要한 原因중의 하나인 피팅(pitting) 현상을 유발하는 실제적인 條件을 고려함으로써 자동화 및 정밀화 되어가는 機械의 重要한 부품으로서 齒車의 精密 設計를 하기 위한 精確한 資料를 제시하였다.

2. 摩擦이 있는 彈性 接觸 問題 解析

Johnson⁽⁶⁾에 의하면 垂直 荷重에 의하여 형성된 接觸 領域에서의 摩擦로 인한 接線 方向의 traction이 接觸 領域의 크기와 형태 그리고 接觸 壓力 分布에 미치는 影響은 일반적으로 작으며, 특히 摩擦 係數가 1보다 상당히 작은 경우에 그 影響이 매우 작다. 따라서 接線 荷重이 작용하는 摩擦 接觸 問題를 해석하는데 있어 接觸 壓力과 接線 方向으로의 traction 상호간의 影響을 무시할 수 있고 垂直 荷重과 接線 荷重에 의한 應力과 變形量들은 서로 독립적인 것을 간주하여 接觸 壓力과 接線 方向의 traction을 중첩함으로써 合力(resultant stress)을 구할 수 있다. 그러므로 本 研究에서는 다음과 같은 순서로 摩擦 接觸 問題를 해석하였다.

- (1) 垂直 荷重만이 작용할때 형성되는 接觸 領域에서의 接觸 壓力의 分布와 크기를 구한다.
- (2) (1)에서 구한 결과를 이용하여 接觸 荷重在 작용할때 接觸 方向으로의 traction을 구한다.

2.1 接觸 荷重在 작용하는 摩擦 接觸 問題의 數式化

接觸 荷重에 의한 接觸 方向으로의 traction이 작용하는 摩擦 接觸 問題의 解析을 위해 假定된 事項은 다음과 같다.

- (1) 變形은 線形 彈性論을 따른다.
- (2) 매끄러운 表面사이의 接觸이다.
- (3) 接觸 荷重은 완전 미끄름(gross sliding)을 일으키는 臨界 荷重值보다 작다.

(가) 問題의 모델링

Fig. 2와 같이 垂直 荷重에 의해 形成된 接觸面에 接觸 荷重在 중첩된 摩擦 接觸 問題를 解析하기 위하여 서로 接觸하고 있는 두 物體를 物體 1과 物體 2로 구별한다.

완전 미끄름(gross sliding)을 일으키는 臨界 荷重값보다 작은 接觸 荷重在 작용할 경우, 接觸面에 微小 相對 미끄름이 발생하는 領域(slip region)과 발생하지 않는 領域(no-slip region)이 共存하며, 全 接觸面에서 接觸力은 摩擦 係數와 垂直力의 곱보다 클 수 없다⁽⁷⁾.

Fig. 3과 같이 任意 形狀의 接觸 領域을 사각형 要素로 분할하고 각 要素에서는 일정한 接觸 變位와 接觸力을 가진다고 근사화할때 任意的 k점에서 接觸 荷重 方向으로의 接觸 變位를 u_k 로, 接觸力을 s_k 로, 垂直力을 p_k 로 표기하기로 한다.

(나) 變形후의 接合 條件式

變形後의 接觸 荷重 方向의 變位를 위한 接合 條件式은 式 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_k &= \beta && \text{in the no-slip region} \\ u_k &< \beta && \text{in the slip region} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 β 는 接觸 荷重 方向으로의 剛體 變位 β 와 彈性 變形量 u_k 의 차는 미끄름(micro-slip) 領域에서의 미끄름량을 나타낸다.

式 (1)은 아닌 變數 Y_{1k} 를 導入하여 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u_k + Y_{1k} &= \beta \\ Y_{1k} &= 0 && \text{in the no-slip region} \\ Y_{1k} &> 0 && \text{in the slip region} \end{aligned} \quad (2)$$

(다) 接觸力에 대한 條件

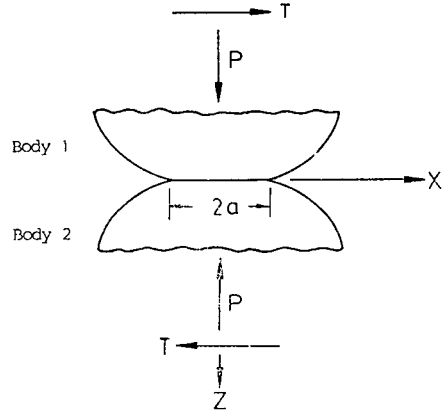


Fig. 2 The contact of elastic bodies pressed by a normal load and subjected to a tangential load

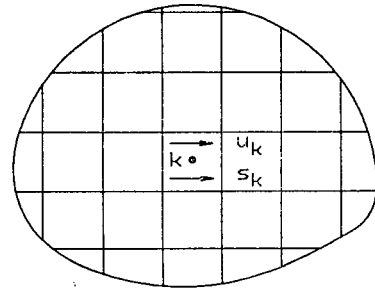


Fig. 3 Surface traction and displacement

接觸力이 摩擦 係數와 垂直力의 곱보다 클수 없다는 條件은 式 (3)과 같이 나타 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} s_k &< fp_k && \text{in the no-slip region} \\ s_k &= fp_k && \text{in the slip region} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 f 는 摩擦 係數를 나타낸다.

式 (3)은 음이 아닌 變數 Y_{2k} 를 導入하여 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} s_k + Y_{2k} &= fp_k \\ Y_{2k} &> 0 && \text{in the no-slip region} \\ Y_{2k} &= 0 && \text{in the slip region} \end{aligned} \quad (4)$$

(라) 摩擦 接觸 問題의 條件

任意的 점 k에서는 미끄름(slip)이 일어나거나 미끄름이 일어나지 않아야 (no-slip) 하므로 接觸 條件을 式 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{either } Y_{1k} = 0 \text{ or } Y_{2k} = 0 \quad (5)$$

(마) 平衡 方程式

接觸 方向에 대한 平衡 方程式은 다음과 같이 나

타낼 수 있다.

$$\sum_{k=1}^n s_k = T \quad (6)$$

여기서 n 은 요소의 수, T 는 접선荷重을 나타낸다.

(b) 彈性變形에 대한 一般的인 모델

接觸하는 두物體가 線形 彈性論을 따른다고 假定하였으므로 k 節點에서의 彈性 變位 u_k 는 接觸 領域에 작용하는 모든 s_j 에 의한 變位の 합이므로 式 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i = \sum_{j=1}^n F_{k,j} s_j \quad (7)$$

여기서 $F_{k,j}$ 는 j 節點에 單位 接線力을 주었을때 k 節點에서의 接線 荷重 方向으로의 變位를 나타낸다.

(c) 摩擦 接觸 問題의 數式化

式 (7)을 式 (2)에 代入한 후 모든 條件式을 고려하면 摩擦 接觸 問題는 다음 聯立 方程式을 만족시키는 s, Y_1, Y_2, β 를 구하는 問題로 數式化된다.

$$Fs + \underline{I}Y_1 = \beta e \quad (8)$$

$$\underline{I}s + \underline{I}Y_2 = fp \quad (9)$$

$$e^T s = T \quad (10)$$

$$Y_{1k} = 0 \text{ or } Y_{2k} = 0 \quad (11)$$

for $k=1, 2, \dots, n$

$$s_k \geq 0, Y_{1k} \geq 0, \beta \geq 0 \quad (12)$$

for $k=1, 2, \dots, n$

2.2 有限要素法을 利用한 影響係數의 計算

任意 形狀의 彈性 接觸에 대한 影響係數 行列 \underline{F} 를 구하기 위하여 有限 要素法을 適用하였다. 解析하고자 하는 모델을 有限 要素化하여 剛性 行列 \underline{K} 를 구하고 이것의 逆行列을 구하여 모든 節點에 대한 影響係數 行列을 구할 수 있다. 그러나 變形 接合 條件式에서 필요로하는 影響係數 行列 \underline{F} 는 예상 接觸 領域에 속한 극히 일부의 節點에 대한 것으로 이와 같은 경우에는 프론탈법(Frontal method)을 사용하는 것이 効率的이다. 本 研究에서는 일반적인 프론탈법을 수정하여 필요한 부분의 影響係數를 구하였고 그 過程은 다음과 같다.

- (1) 接觸 물체를 有限 要素化하고 예상되는 接觸 領域에 포함된 節點을 기억시킨다.
- (2) 境界 條件을 적용시킨후, 有限 要素化된 전체 要素에 대해 組合과 消去過程을 反復한다. 이 때 기억된 節點에 대한 係數들을 消去시키지 않는다.
- (3) 組合과 消去의 反復이 끝난후 기억된 節點에 서의 응축된 剛性 行列을 구한다.

(4) 위와 같이 하여 얻어진 응축된 剛性 行列의 逆行列을 구해 影響係數行列을 얻는다.

(5) 接線 荷重이 작용하는 摩擦 接觸 問題를 解析하기 위하여 接線 方向으로의 힘과 變位만이 필요하므로 응축된 影響係數 行列에서 接線 方向으로의 힘과 變位에 관계되는 列과 行을 취한다.

2.3 最適化 問題로의 變換 및 解法

2.1節에서 數式化된 摩擦 接觸 問題는 變數에 制限 條件이 있는 非線形 聯立 方程式의 解를 구하는 問題이나 이의 解를 구하기가 매우 어렵기 때문에 음의 값을 가질수 없는 任意 變數 z_j 를 導入하여 다음과 같은 最適化 問題로 變換한다.

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^{2n+1} z_j \quad (13-a)$$

subject to

$$\underline{F}s + \underline{I}Y_1 - \beta e + \underline{I}z_1 = 0 \quad (13-b)$$

$$\underline{I}s + \underline{I}Y_2 + \underline{I}z_2 = fp \quad (13-c)$$

$$e^T s + z_{2n+1} = T \quad (13-d)$$

$$Y_{1k} = 0 \text{ or } Y_{2k} = 0 \quad (13-e)$$

for $k=1, 2, \dots, n$

$$s_k \geq 0, Y_{1k} \geq 0, Y_{2k} \geq 0, \beta \geq 0 \quad (13-f)$$

for $k=1, 2, \dots, n$

$$z_k \geq 0 \text{ for } k=1, 2, \dots, 2n+1 \quad (13-g)$$

여기서 z_1, z_2 는 任意 變數 벡터를, z_{2n+1} 는 平衡 方程式에서의 任意 變數를 나타낸다.

위의 最適化 問題에서 式 (13-e)를 제외한 모든 條件式과 目的 函數가 線形이며 式 (13-e)는 線形 計劃法의 entgry rule을 수정하여 처리할수 있으므로 垂直 荷重과 接線 荷重이 동시에 작용하는 摩擦 接觸 問題는 수정된 線形 計劃法을 적용하여 効率的으로 解析할 수 있다.

수정된 entry rule은 다음과 같다.

Basis로 들어가는 變數가 Y_{1s} 로 선택되었다고 하면 Basis에 Y_{1s} 에 해당하는 變數 Y_{2s} 가 있는가를 확인하고 만약 Y_{2s} 가 Basis에 없으면 Y_{1s} 는 자유롭게 Basis로 들어갈수 있는 그러나 Y_{2s} 가 Basis에 있으면 Y_{2s} 는 Y_{1s} 가 Basis로 들어가는 行에 위치해 있어야 한다. 만약 Y_{2s} 가 Basis로 들어가는 行에 위치하지 않는다면 새로운 變數가 선택되어야 한다. Basis로 들어가는 變數가 Y_{2s} 로 선택되었을 때도 똑같은 論理가 적용된다.

垂直 荷重과 동시에 接線 荷重이 작용하는 摩擦

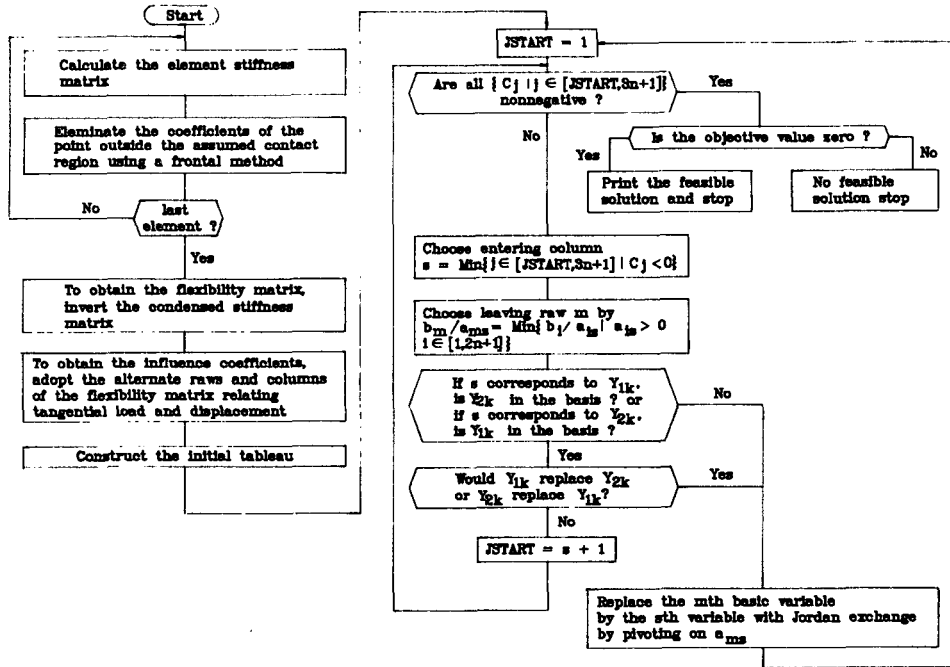


Fig. 4 Flow chart for the frictional contact problem under a tangential load

Table 1 Initial table

s	Y_1	Y_2	β	
\underline{F}	\underline{I}	0	$-e$	0
\underline{I}	0	\underline{I}	0	f_p
e	0	0	0	T
c	$-e$	$-e$	$-n$	ω

where

c ; A cost coefficient vector of length n

$$c_j = \sum_{i=1}^n F_{ij} - 2$$

ω ; Initial merit value

$$\omega = - \sum_{i=1}^n f p_i - T$$

接觸 問題를 解析하기 위한 프로그램 構造는 Fig. 4에 圖示하였고 수정된 線形 計劃法을 위한 初期 tableau를 Table 1에 나타내었다.

2.4 解析 結果 및 考察

(1) 두 개의 球사이의 摩擦 接觸 問題
두 개의 球사이의 摩擦 接觸 問題는 Mindlin⁽⁷⁾에

의한 理論解가 존재하므로 本 算法의 正確性을 보이기 위하여 먼저 고려하였다.

(i) 彈性 係數가 同一한 두개의 球사이의 摩擦 接觸 問題

球의 半徑은 同一하게 1m의 半徑을 가진것으로 하였고 彈性 係數는 206GPa, 프와송 比는 0.3으로 하였다.

垂直 荷重은 4.724MN, 接線 荷重은 0.3MN이 가해지고 摩擦 係數는 0.1로 하였으며 圓形 接觸 領域을 121개의 정사각형 要素로 분할하여 解析하였다.

Fig. 5는 Mindlin의 理論解와 本 解析과의 結果를 比較한 것이며 잘 일치함을 알수 있다. Fig. 6은 接觸 領域에서의 미끄럼량을 圖示한 것이며 接觸 領域 내부에서는 미끄럼이 일어나지 않고 接觸 領域의 외부쪽으로 나아감에 따라 미끄럼량이 커짐을 알수 있다.

이때의 剛體 變位는 $0.37 \times 10^{-4}m$ 이였으며 Mindlin의 結果($0.3716 \times 10^{-4}m$)와 0.4%의 誤差를 보였다.

(ii) 彈性 係數가 서로 다른 두개의 球사이의 摩擦 接觸 問題

彈性係數 6.89GPa인 球와 彈性 계수 206GPa인 球사이의 摩擦 接觸 問題를 解析하였다. 球의 半徑은 모두 1m로 하였으며 프와송 비는 0.3으로 하였다.

垂直 荷重은 4.724MN, 荷重은 0.6MN을 가하였

으며 摩擦 係數는 0.2로 하였다.

解析 結果를 Fig. 7에 圖示하였으며 Mindlin의 理論解와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 8은 接觸 領域에서의 미끄럼량을 圖示한 것이며 역시 接觸 領域 내부에서는 미끄럼이 일어나지 않고

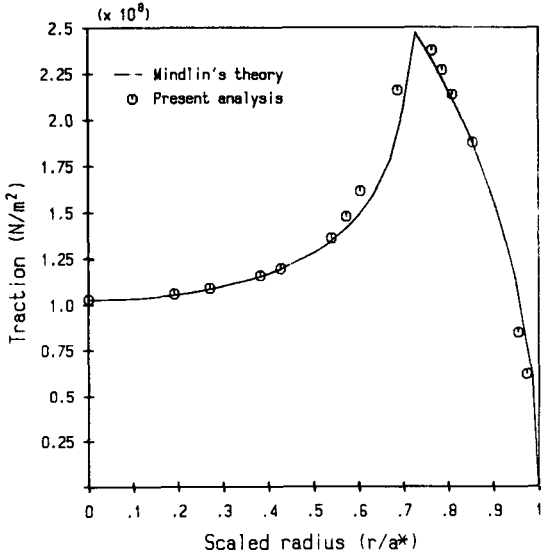


Fig. 5 Traction distribution on the circular contact between two bodies of same materials as compared with Mindlin's theory

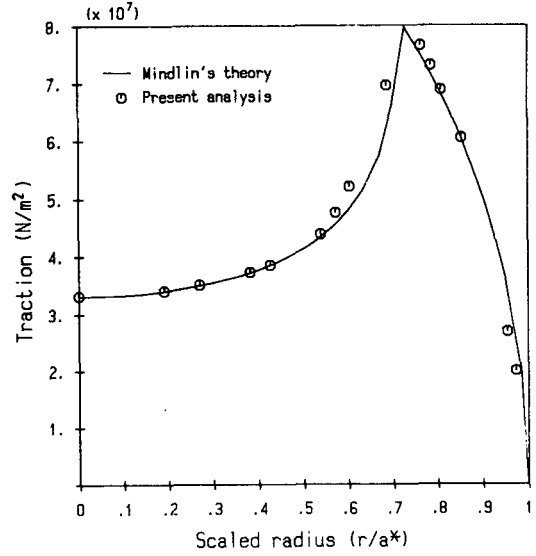


Fig. 7 Traction distribution on the circular contact between two bodies of different materials as compared with Mindlin's theory

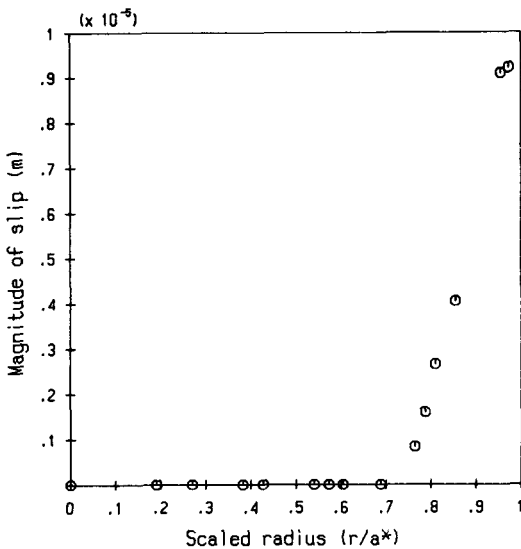


Fig. 6 Magnitude of slip on the circular contact between two bodies of the same materials

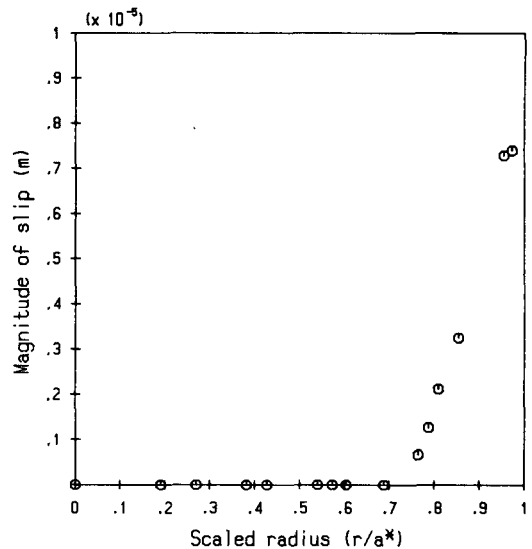


Fig. 8 Magnitude of slip on the circular contact between two bodies of different materials

接觸 癘疫의 외부쪽으로 나아감에 따라 미끄럼량이 커짐을 알 수 있다. 이때 연한 材質의 剛體 變位 ($0.8896 \times 10^{-3}m$)는 강한 材質의 剛體 變位 ($0.2975 \times 10^{-4}m$)의 약 30배의 크기를 가지며 Mindlin의 理論解와 0.3%의 誤差를 보였다.

(2) 齒車의 摩擦 接觸 問題

(i) 摩擦 係數의 結晶

대부분의 齒車가 서로 맞물려 움직일 때, 油膜을 전단시키는데 필요한 힘으로써 나타나는 구름에 대한 摩擦 저항은 가해지는 荷重에 실질적을 비례한다.

어떤 특별한 환경하에서 摩擦 係數는 표면 거칠기와 材料의 조합에 어느 정도 影響을 받지만 우선적으로 相對 曲率 半徑, 速度, 接觸 條件 그리고 潤滑油의 壓力, 溫度, 점성 계수(viscosity) 특성에 의존하는 油膜의 두께와 평균 점성 계수에 의해서 影響을 받는다. 그러나 設計 資料를 확립하기 위해서 대부분의 경우 Benedict, Kelly, Watson이 디스크 장치(disc machine)으로 실험한 결과를 검토하고 있다. 본 연구에서도 이 결과에 의한 實驗式⁽⁸⁾으로 摩擦 係數를 결정하였으며 그식은 다음과 같다.

$$f = \frac{0.0182}{\nu^{0.15} V_e^{0.15} V_s^{0.35} R_r^{0.5}}$$

or

$$f = \frac{0.0182}{\nu^{0.15} (V_e/s)^{0.15} V_s^{0.5} R_r^{0.5}}$$

여기서

f : 摩擦 係數

ν : 潤滑油의 동정성 계수(cS)

V_e : 두 齒車의 구름 속도의 힘(m/sec)

V_s : 미끄럼 속도(m/sec)

R_r : 相對 曲率 半徑(m/sec)

本 研究에서는 ν 를 100cS, V_e/V_s 를 1, V_s 를 1 m/sec로 하여 맞물리는 두 齒車 사이의 摩擦 係數를 0.1로 결정하였다.

(ii) 摩擦을 고려한 齒車 接觸 問題에 대한 解析 結果

일반적으로 齒車의 接觸 問題 解析은 先端에 最大 荷重이 걸리는 條件을 最大 荷重 條件으로 假定하여 齒車의 接觸 問題 解析이 이루어지고 있으나 대부분의 齒車들을 물림률이 1.2이상이기 때문에 先端 荷重 條件이 最大 荷重 條件이 아니고 두 쌍의 齒의 接觸에서 한 쌍의 齒의 接觸으로 넘어 갈 때

가 最大 荷重 條件이 되며 이때 한 쌍의 齒가 전 荷重을 받게 된다. 本 研究에서는 이러한 最大 荷重 條件의 위치를 결정하여 齒車의 接觸 問題 解析을 하였다.

기어와 피니언에 대한 有限 要素 모델을 Fig. 9, 10에 圖示하였고 두 齒車의 單性 係數는 206GPa, 프와송 비는 0.3, 모듈은 5, 壓力角은 20°로 하였으며 기어의 잇수는 60개, 피니언의 잇수는 30개로 하였다.

要素 크기에 대한 影響은 參考交獻 (5)에서 검토한 結果를 이용하여 가장 조밀하게 분할한 모델을 선택하였으며 有限 要素는 1次 補間 函數를 갖는 isoparametric 要素를 사용하였다.

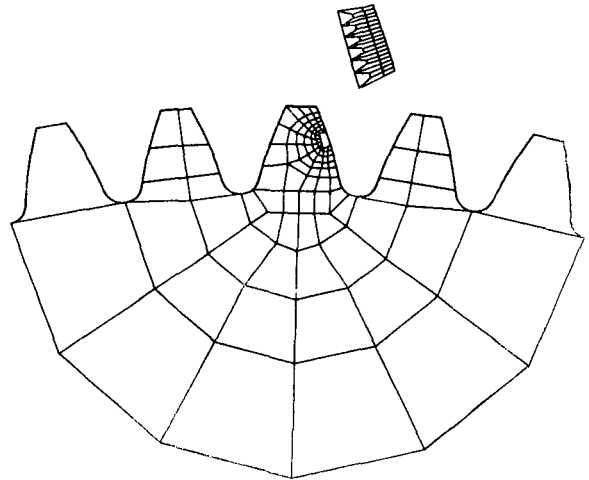


Fig. 9 Finite element mesh of gear

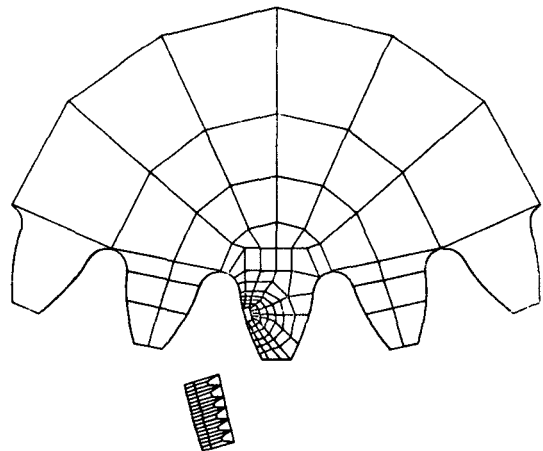


Fig. 10 Finite element mesh of pinion

垂直 荷重이 4KN 작용하고 接線 荷重을 250 N, 300N, 350N으로 변화시켰을 때 각 荷重 條件에서의 traction 分布 狀態를 Fig. 11,13,15에 각각 圖示하였으며 Fig. 12,14,16에 가가 荷重 條件하에서의 미끄럼량을 圖示하였다.

미끄럼이 일어 나지 않는 領域에서는 接線力이 摩擦力보다 작으며 미끄럼이 일어나는 領域에서는

接線力이 摩擦力과 같음을 알 수 있었다. 또한 接線 荷重이 증가함에 따라 미끄럼 領域이 증가함을 알 수 있었다.

3. 摩擦 接觸 應力을 고려한 齒車 設計

중래의 齒車 設計에서 齒車 破損의 원인중의 하

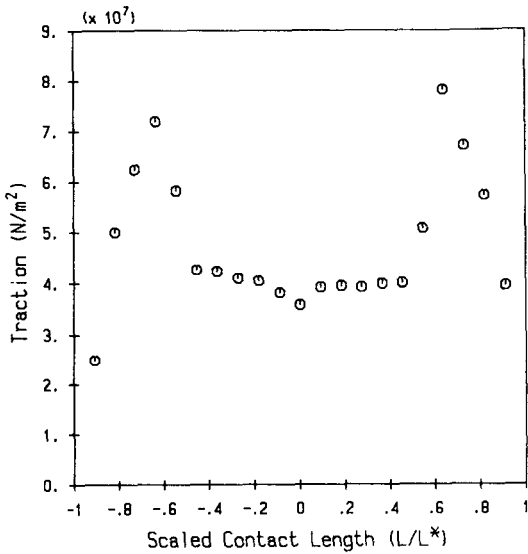


Fig. 11 Traction distribution between two gears (normal load : 4KN, tangential load : 250 N)

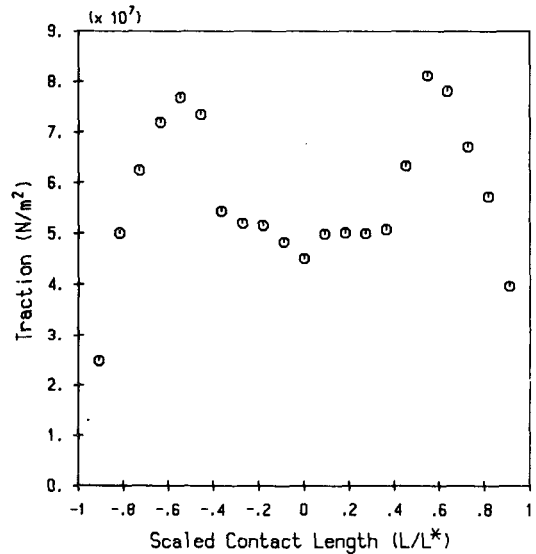


Fig. 13 Traction distribution between two gears (normal load : 4KN, tangential load : 300 N)

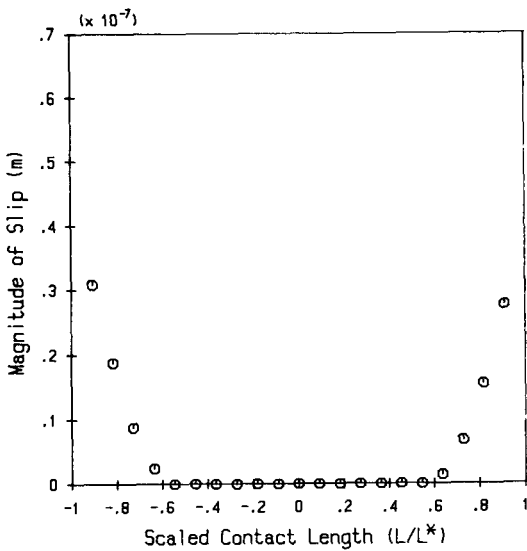


Fig. 12 Magnitude of slip (normal load : 4KN, tangential load : 250N)

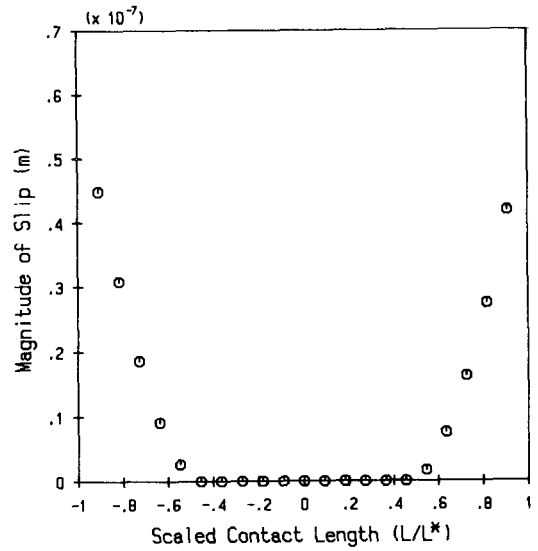


Fig. 14 Magnitude of slip (normal load : 4KN, tangential load : 300N)

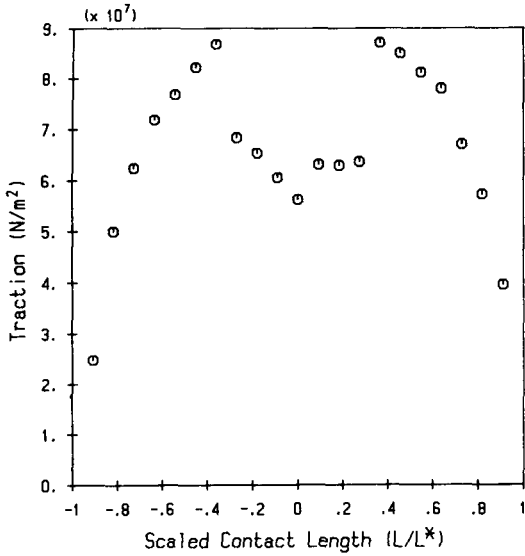


Fig. 15 Traction distribution between two gears(normal load : 4KN, tagntential load : 350 N)

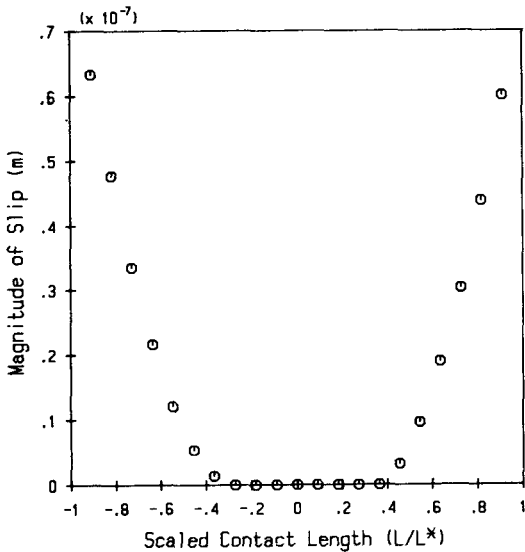


Fig. 16 Magnitude of slip(normal load : 4KN, tagntential load : 350N)

나인 피팅(pitting)을 고려함에 있어 피팅(pitting)을 유발하는 접촉 현상의 해석은 인벌루우트 곡면간의 접촉을 접촉점에서 곡률 반경에 해당하는 두개의 원통사이의 접촉으로 가정하고 또 접촉 영역에는 접촉면에 수직한 방향으로의 접촉 압력만이 작용하는 것으로 이상화한 Hertz 식에 기초를 두

고 있다⁽⁴⁾. 그러나齒車의齒의接觸은垂直荷重에 의하여接觸領域이 형성되고相對運動과摩擦로 인하여接線力이 중첩되게 된다. 이로 인하여齒 내부에서 피팅(pitting)을 일으키는最大剪斷應力(maximum subsurface shear)이 발생하는 위치와 크기가垂直荷重만이 작용할 때와는 다르게 된다. 그러므로齒車設計에 있어摩擦을 고려함은 중요하다. 그러나垂直荷重과 동시에接線荷重이 작용하는齒車사이의接觸問題는垂直荷重과接線荷重의 크기에 따라接觸領域과 미끄럼領域이 변하는移動境界值問題이기 때문에 일반적인有限要素法으로 해석이 어려우므로 현재의齒車設計는摩擦에 대한影響을 고려하고 있지 않다.

本 研究에서는有限要素法을 이용하여인벌루우트曲面간의接觸으로解析하였고 실제條件하에서摩擦係數를 결정하여摩擦을 고려한齒車의接觸問題를解析하여接觸領域에서의接觸壓力分布와接線方向으로의traction分布를 구하였다. 따라서摩擦을 고려한齒車의設計는 다음과 같은 순서에 의하여 할 수 있다.

- (1) 垂直荷重만이 작용할때 형성되는接觸領域에서의接觸壓力的分布와 크기를 구한다⁽⁵⁾.
- (2) 接線荷重이 작용할때接線方向으로의traction을 구한다.
- (3) (1),(2)에서 구해진接觸壓力과接線方向으로의traction을荷重境界條件으로 하여 일반적인有限要素法으로齒車의應力解析을 한다.
- (4) (3)에서 구한 피팅(pitting)을 일으키는最大剪斷應力を 허용치와 비교하여齒車設計에 대한材質과 제원에 대한接合性 여부를 판정한다.

4. 結 論

彈性領域에서摩擦을 고려한垂直荷重과接線荷重이 동시에 작용하는 경우의 일반적인接觸問題를 효과적을解析할 수 있는汎用算法을 제시하였다. 任意形狀의彈性體사이의接觸問題를解析하기 위하여有限要素法을 적용하였으며非線形聯立方程式으로 수식화된接觸問題를最適化問題로 변환한 후 수정된線形計劃法을 이용하여效率的으로解를 구하였다. 제시한算法으로摩擦을 고려한 두齒車사이의接觸問題를解析하여接觸

領域에서 接線 方向으로의 traction 分布를 구하였다. 구해진 接觸 壓力 分布와 接線方向으로의 traction 分布는 일반적인 有限 要素法으로 摩擦을 고려한 齒車의 接觸 應力을 解析함에 있어 荷重 境界 條件으로 이용하면 垂直 荷重과 接線 荷重이 동시에 작용할 때 接觸 領域에서의 齒 표면의 피팅 (pitting) 현상을 일으키는 最大 剪斷 應力을 쉽게 구함으로써 보다 정확한 齒車 設計에 귀중한 資料가 될 것으로 생각된다.

後 記

이 研究는 1987년 韓國科學財團의 신진연구비 지원하에 이루어졌으며, 關係者께 感謝드립니다.

참 고 문 헌

(1) Duddley, D.W., 1984, Handbook of Practical

Gear Design, McGraw-Hill Book Company.

- (2) AGMA, 1966, "Surface Durability(Pitting) of Spur, Helical, Herringbone and Beve.
- (3) AGMA, 1982, "Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur and Helical Involute Gear Teeth", AGMA 218.01.
- (4) Hertz, H., 1896, English traslation in Hertz H., "Miscellaneous Papers", Translated by D.E.Jones and G.A.Schott, Macmillan, Newyork, pp. 146~162, 163~183.
- (5) 이대회, 최동훈, 임장근, 윤갑영, 1988, "유한 요소법을 이용한 치차의 접촉 응력 해석", 한국윤활학회지, 제4권, 제2호, pp. 28~35.
- (6) Johnson, K.L., 1984, Contact Mechanics, Cambridge University Press.
- (7) Mindlin, R.D., 1949, "Compliance of Elastic Bodies in Contact", J.of Appl. Mech., Vol. 16, pp. 259~268.
- (8) Merrit, H.E., 1971, "Gear Engineering", John Wiley & Sons, pp. 347~349.