

<論 文>

Vuilleumier 냉동사이클에 대한 단열해석

유 호 선*

(1989년 8월 17일 접수)

An Adiabatic Analysis on the Vuilleumier Refrigeration Cycle

Hoseon Yoo

Key Words: Vuilleumier or VM Cycle, Stirling Cycle(스터링 사이클) Adiabatic Analysis
(단열해석)

Abstract

This paper presents an approximate adiabatic analysis on the Vuilleumier refrigeration cycle which is identical with Stirling cycle in principle except the thermal compression. Assuming that the displacer motion is piecewise linear function of the crank angle, one cycle can be treated as a combination of six kinds fundamental process. For each process, thermodynamic equations are reduced to a generalized form of which solution is pressure and temperature of each active volume is obtained in terms of the pressure and the known quantities. Application of the cyclic steady condition is indispensable to complete the analysis. Also, the present method allows analytical expressions for heat transfer through each heat exchanger, which is of great use to estimate the cycle performance.

기 호 설 명	
a, b	: 계수
A	: 양의 계수
c	: 상수
C_1, \dots, C_4	: 식 (26)의 계수, Table 2
C_p	: 작동유체의 정압비열
D_{ah}, D_{hk}, D_{ka}	: 판별함수, 식 (22), (18) 및 (21)
m, M	: 질량분률, 전체질량
n	: 지수, 식 (8)
p	: 무차원 압력, PV_s/MRT_H
\tilde{p}	: 압력비, p/p_s
P	: 압력
q	: 무차원 열량, Q/MC_pT_H
Q	: 열량
R	: 작동유체의 기체상수
t	: 무차원 크랭크각도, θ/π
T	: 온도
v	: 무차원 체적, V/V_s
v_T	: 가변체적의 합
V, V_s	: 체적, 고온부의 행정체적
$\alpha_1, \dots, \alpha_4$: 식 (25)의 계수
β_1, β_2	: 식 (25)의 계수
γ	: 작동유체의 비열비
θ	: 크랭크각도
ξ	: 가 변수
τ	: 무차원 온도, T/T_H
$\tilde{\tau}$: 조건부 온도
하첨자	
a, A	: 상온부, 상온측 열교환기
d, D	: 불용체적, 가변량 및 불변량
ex	: 출구상태

*정회원, 경상대학교 공과대학 기계공학과

- f : 과정의 최종상태
- h, H : 고온부, 고온측 열교환기
- i : a, h 및 k 를 대표
- in : 입구상태
- j : A, H 및 K 를 대표
- k, K : 저온부, 저온측 열교환기
- RH, RK : 고온측 및 저온측 재생기
- s : 과정의 최초상태

1. 서 론

소형저온냉동기 또는 열펌프에 적용되고 있는 Vuilleumier 냉동사이클(VM사이클로 약칭)은 1918년 고안된 열구동 밀폐 재생사이클로서 고온, 상온, 저온상태하에 있는 합이 일정한 3개의 가변 체적과 2개의 재생기로 구성된다. 고온 및 상온사이에서 냉동에 필요한 압력을 발생시키는 점은 흡수식냉동사이클과 유사하지만 상온과 저온의 냉동 원리는 Stirling 사이클과 동일하다. 구체적인 작동 방법, 특징, 관련 연구동향 및 문헌등에 관해서는 Walker⁽¹⁾가 체계적으로 고찰한 바 있다.

이 사이클의 열역학적 성능은 Fig. 1에 표시한 고온부, 상온부, 저온부의 온도에 절대적으로 의존하며 각부의 온도는 열전달특성에 따라 등온 및 단열이라는 한계조건의 사이에서 변화⁽²⁾한다. 이때 시스템의 압력은 균일한 것으로 취급하며, 각부의 체적은 기구학적 구동기구에 의해 상호결합되어 위상차를 갖고 운동하는 디스플레이서(displacer)에 따라 결정된다. 온도에 관한 두 조건 모두가 이상적인 경우이지만, 실제 VM사이클로 작동되는 대부분의 냉동기에서 각부의 작동유체 온도는 등온보다 단열조건에 접근하여 변화하는 점을 고려할 때, 설계에 필요한 제인자의 성능에 대한 영향을 예측, 평가하는 데는 단열해석(adiabatic analysis)이 등온해석(isothermal analysis)보다 타당한 것은 자명하다. 그럼에도 불구하고, 종래의 성능해석시 각부의 온도가 대응하는 열원의 온도로 유지된다고 가정한 등온모델이 보편적으로 사용된 이유는 해석 결과가 Carnot사이클의 경우처럼 성능의 상한을 제시한다는 열역학적인 의의뿐 아니라, 그 과정에서 종속변수인 압력에 대하여 해석적인 해가 존재하여 취급이 용이하기 때문⁽¹⁾이다. 반면, 단열모델에서는 종속변수가 압력 및 각부의 온도 또는 질량으로서 상호결합된 형태이므로 해석적 일반해를 구

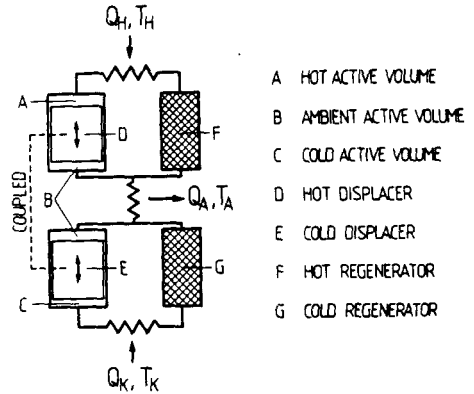


Fig. 1 Thermodynamic principle of the Vuilleumier cycle

하는 것은 불가능하며 근사해도 시도된 바 없다. 따라서, 대부분의 성능해석은 수치해석⁽³⁾에 의존하고 있으며 방대한 관련 자료 및 시간이 소요되므로 효율적인 방법은 아니다.

본 연구에서는, 이러한 단열해석상의 문제점을 해결하기 위한 하나의 방법으로서 적절한 가정을 도입하여 단열모델에 대한 해석적인 근사해를 시도하였다. 실제조건에 부합하면서도 간편하며 경제적인 해석방법의 확립은 VM사이클로 작동되는 냉동기에 대한 최적설계의 중요한 기초가 될 것이다. 해석모델의 정립, 종속변수에 대한 근사해, 성능평가에 필요한 열역학적량들을 종속변수의 해석적 함수형태로 표시하는 과정을 내용에 포함한다.

2. 단열해석모델

2.1 기본가정 및 방정식

해석에 사용된 모든 변수는 무차원량으로서 기호 설명에서 정의하였다. 하첨자 h 및 H, k 및 K, d 및 D, RH 및 RK 는 각각 고온부, 저온부, 상온부, 불용체적(dead volume), 재생기 및 관련된 부분을 표시하며 가변량은 소문자로 불변량은 대문자로 통일하였다. 실제 VM사이클로 작동되는 Fig. 2와 같은 냉동기에 대하여 다음의 가정을 도입하여 해석대상을 단순화 하였으며, (4)항의 온도조건을 제외한 가정도입의 타당성에 관해서는 Walker⁽¹⁾가 자세히 취급하고 있으므로 참조하기 바란다.

(1) 열교환기는 각각 일정 온도 T_H, T_K, T_A 로 유지된다.

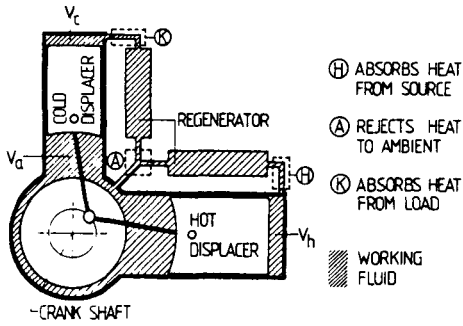


Fig. 2 Schematic diagram of Vuilleumier cryocooler

- (2) 유동에 따른 압력손실은 무시하며 따라서 압력은 균일하다.
- (3) 작동유체는 이상기체로서 전체질량은 일정하다.
- (4) 고온부, 상온부, 저온부 및 재생기는 완전 단열되어 있다.
- (5) 재생기의 효율은 1이며 온도분포는 선형적이다.
- (6) 불용체적은 각 열교환기 및 재생기 체적의 합으로서 일정하다.
- (7) 회전수는 일정하며, 주기 정상조건(cyclic steady condition)을 만족한다.
- (8) 모든 과정은 준평형상태로 진행된다.

각부의 체적은 구동기구에 따라 독립변수인 크랭크각도의 함수로 주어지므로 압력 및 각부의 온도 또는 질량등 4개의 종속변수를 결정하기 위해서는 4개의 방정식이 필요하다. 먼저, 전체질량은 일정하므로

$$dm_h + dm_k + dm_a + dm_c = 0 \quad (1)$$

이다. 이상기체의 상태방정식에서

$$dm_i = d(pv_i/\tau_i), \quad i = h, k, a \quad (2)$$

이며 특히 불용체적에 관해서는 적분평균온도 τ_D 를 도입하여 다음과 같이 표시하는 것이 편리하다.

$$dm_a = d(v_D/\tau_D) dp \quad (3)$$

여기서,

$$v_D = v_h + v_k + v_a + v_{RH} + v_{RK} \quad (4)$$

$$\tau_D = v_D / \left\{ \frac{v_h}{\tau_h} + \frac{v_k}{\tau_k} + \frac{v_a}{\tau_a} + \frac{v_{RH} \ell_n(\tau_h/\tau_a)}{(\tau_h - \tau_a)} + \frac{v_{RK} \ell_n(\tau_a/\tau_k)}{(\tau_a - \tau_k)} \right\} \quad (5)$$

질량이 유출입이 있는 가변체적의 단열시스템에 대한 Finkelstein의 모델^(4,5)로 부터 각부에 대하여

$$\hat{\tau}_i dm_i = p dv_i + \frac{1}{\gamma} v_i dp \quad (6)$$

이 성립한다. 식 (6)에서 질량유입시($dm_i > 0$)에는

$\hat{\tau}_i = \tau_j (j = H, K, A)$ 이며 유출시($dm_i < 0$)에는 $\hat{\tau}_i = \tau_i$ 이다. 특히 유출시에는 식 (2)를 적용하면 다음과 같이 적분된다.

$$\tau_i p^{-n} = c \quad (7)$$

$$n = (\gamma - 1)/\gamma \quad (8)$$

결국, 단열해석은 식 (1) 및 (6)으로 주어진 열역학적 식에 각부의 체적 변화 v_i 를 대입하여 압력 p 및 온도 τ_i 또는 질량 m_i 를 연립적으로 결정하는 것이다. 그러나, 식 (6)은 $\hat{\tau}_i$ 가 dm_i 의 부호에 의존하는 불완전한 형태이며 v_i 는 크랭크각도 t 의 비선형함수이므로 추가적인 가정을 도입하지 않으면 해석적인 해를 구하는 것은 불가능하다.

2.2 해석을 위한 근사

체적 v_i 는 t 의 주기함수로서 일반적으로 정현파형이지만 사이클을 다수의 열역학적 과정으로 구분한다면, 과정의 최초 및 최종상태사이에서는 t 에 대하여 선형적으로 변화한다고 취급할 수 있다. 즉 임의의 과정에 대하여 다음과 같이 근사화하여 고려한다.

$$v_i = a_i t + b_i \quad (9)$$

여기서 a_i, b_i 는 각 과정별로 결정되는 계수이다. 가변체적의 합 v_T 는 일정하므로

$$dv_h + dv_k + dv_a = 0 \quad (10)$$

이다.

한편, 조건부 형태인 식 (6)의 완결을 위하여 dm_i 부호의 가능한 모든 조합을 고려하면 2³경우이다. 제한조건으로서, 식 (1)로부터

$$dm_h + dm_k + dm_a = -(v_D/\tau_D) dp \quad (11)$$

이며 식 (6)을 i 에 대하여 합하고 식 (10)을 적용하면

$$\hat{\tau}_h dm_h + \hat{\tau}_k dm_k + \hat{\tau}_a dm_a = (v_T/\gamma) dp \quad (12)$$

이므로

$$A_h dm_h + A_k dm_k + A_a dm_a = 0 \quad (13)$$

를 유도할 수 있다. 여기서 $A_i = (v_D/\tau_D) \hat{\tau}_i + v_T/\gamma$ 로 정의되는 양수이다. 식 (13)에서 dm_i 모두가 같은 부호인 경우는 제외되므로 결과적으로 다음 여섯 경우만 가능하다.

I. $dm_h > 0, dm_k > 0, dm_a < 0$

II. $dm_h > 0, dm_k < 0, dm_a > 0$

III. $dm_h < 0, dm_k > 0, dm_a > 0$

IV. $dm_h > 0, dm_k < 0, dm_a < 0$

V. $dm_h < 0, dm_k > 0, dm_a < 0$

VI. $dm_h < 0, dm_k < 0, dm_a > 0$

정리하면, 구분된 임의의 과정은 I~VI 여섯 종류 기본과정(fundamental process)중의 하나이며 하나의 사이클은 기본과정의 조합으로 구성된다.

2.3 질량유동방향에 대한 고찰

해석에 선행하여 임의의 과정이 여섯 종류 기본과정중 어느것인가를 결정하기 위하여 각부의 질량유동방향을 고찰한다. 기본적인 방법 및 결과만 취급하고 자세한 과정은 생략한다.

식 (6)을 i 에 대하여 각각 표시하면 다음과 같다.

$$\hat{\tau}_h dm_h = p dv_h + \frac{1}{\gamma} v_h dp \tag{14}$$

$$\hat{\tau}_k dm_k = p dv_k + \frac{1}{\gamma} v_k dp \tag{15}$$

$$\hat{\tau}_a dm_a = p dv_a + \frac{1}{\gamma} v_a dp \tag{16}$$

식 (14) 및 (15)에서 dp 항을 소거하고 식 (9)를 대입하면

$$D_{hk} p dt = v_k \hat{\tau}_h dm_h - v_h \hat{\tau}_k dm_k \tag{17}$$

이며 여기서,

$$D_{hk} = a_{nk} b_k - a_k b_n \tag{18}$$

로 정의된다. 같은 방법으로 식 (15) 및 (16), 식 (14) 및 (16)으로부터 각각 서로 독립적인 다음 조건식을 유도한다.

$$D_{ka} p dt = v_a \hat{\tau}_k dm_k - v_k \hat{\tau}_a dm_a \tag{19}$$

$$D_{ah} p dt = v_h \hat{\tau}_a dm_a - v_a \hat{\tau}_h dm_h \tag{20}$$

여기서,

$$D_{ka} = a_k b_a - a_a b_k \tag{21}$$

$$D_{ah} = a_a b_h - a_h b_a \tag{22}$$

이다. 예를들어, 식 (17) 및 (19)에서 $D_{hk} > 0$, $D_{ka} < 0$ 를 동시에 만족시키는 가능한 질량유동방향은 기본과정 II, IV, VI 세 경우에 해당한다. 그러

나, IV의 경우 $D_{ah} < 0$, VI의 경우 $D_{ah} > 0$ 일 때로 제한되므로 일반적으로는 II의 경우만 가능하다. 같은 방법으로 식 (17), (19) 및 (20)을 이용하여 종합적으로 검토하면 Table 1과 같이 정리된다. 즉, 구분된 임의의 과정에 대하여 구동기구에 의하여 주어진 a_i, b_i 로 부터 판별함수 D_{hk}, D_{ka}, D_{ah} 의 부호를 검사함으로써 질량유동방향을 결정할 수 있다.

3. 기본과정에 대한 해석

임의의 과정은 기본과정중의 하나이므로 기본과정에 대하여 해를 구하면 된다. 전술한 기본방정식에서 식 (6)은 $dm_i > 0$ 인 경우

$$dm_i = \frac{1}{\tau_i} (p dv_i + \frac{1}{\gamma} v_i dp) \tag{23}$$

으로, 또한 $dm_i < 0$ 인 경우 식 (7)을 적용하여

$$dm_i = \frac{p^{-n}}{C} (p dv_i + \frac{1}{\gamma} v_i dp) \tag{24}$$

로 변환된다. 각 기본과정은 적어도 1개이상의 $dm_i > 0$ 및 $dm_i < 0$ 을 포함하므로 식 (1)에 각 경우에 대응하는 식 (23) 및 (24)를 적용한 후 체적항에 식 (9)를 대입하면, 계수는 상이하지만, 각 기본과정 모두 압력에 관한 다음의 비선형 1차상미분 방정식으로 정리된다.

$$(\alpha_1 + \alpha_2 t + (\alpha_3 + \alpha_4 t) p^{-n}) dp + (\beta_1 p + \beta_2 p^{1-n}) dt = 0 \tag{25}$$

식 (25) 해는 필자⁽⁶⁾에 의해 구해진 바 있으므로 참조하기 바람

$$C_1 p^{1-n} - C_2 + C_3 \int_1^p (\xi^n + C_4)^{-1} d\xi = 0 \tag{26}$$

과 같이 압력비 p 가 변수인 적분을 포함한 일반화된 방정식으로 표시 할 수 있다. 여기서 ξ 는 가변수(dummy variable)이다. 각 기본과정에 대한 계수 $C_1 \sim C_4$ 는 Table 2에 요약하였다.

일단 식(26)에서 p 를 구하면 방법이 같으므로 dm_i 의 부호가 양 2, 음 1인 기본과정 I-III의 경우 및 양 1, 음 2인 IV-VI의 경우로 대별하여 취급하는 것이 편리하며 전자는 기본과정 I, 후자는 IV의 예로서 기술하기로 한다. 기본과정 I에서 $dm_a < 0$ 이므로 식 (7)로부터 간단히

$$\tau_{af} = \tau_{as} p^n \tag{27}$$

이다. 또한, $dm_h > 0$ 및 $dm_k > 0$ 이므로 식(23)으로부터

Table 1 Conditions to determine the kind of fundamental process

Process	Conditions	
I	$D_{ka} > 0$	$D_{ah} < 0$
II	$D_{hk} > 0$	$D_{ka} < 0$
III	$D_{hk} < 0$	$D_{ah} < 0$
IV	$D_{hk} > 0$	$D_{ah} < 0$
V	$D_{hk} < 0$	$D_{ka} > 0$
VI	$D_{ka} < 0$	$D_{ah} > 0$

Table 2 Coefficients of Eg.(26) for each fundamental process

Process	C_1	C_2	C_3	C_4
I	$\frac{v_{af}}{\tau_{as}}$	$\frac{v_{as}}{\tau_{as}}$	$C_4 \left(\frac{v_D}{\tau_D} + \frac{b_h}{\gamma\tau_H} + \frac{b_k}{\gamma\tau_K} \right) - \frac{b_a}{\gamma\tau_{as}}$	$\frac{a_s}{\tau_{as}} / \left(\frac{a_h}{\tau_H} + \frac{a_k}{\tau_K} \right)$
II	$\frac{v_{kf}}{\tau_{ks}}$	$\frac{v_{ks}}{\tau_{ks}}$	$C_4 \left(\frac{v_D}{\tau_D} + \frac{b_h}{\gamma\tau_H} + \frac{b_a}{\gamma\tau_A} \right) - \frac{b_k}{\gamma\tau_{ks}}$	$\frac{a_k}{\tau_{ks}} / \left(\frac{a_h}{\tau_H} + \frac{a_a}{\tau_A} \right)$
III	$\frac{v_{hf}}{\tau_{hs}}$	$\frac{v_{hs}}{\tau_{hs}}$	$C_4 \left(\frac{v_D}{\tau_D} + \frac{b_k}{\gamma\tau_K} + \frac{b_a}{\gamma\tau_A} \right) - \frac{b_h}{\gamma\tau_{hs}}$	$\frac{a_h}{\tau_{hs}} / \left(\frac{a_k}{\tau_K} + \frac{a_a}{\tau_A} \right)$
IV	$\frac{v_{kf} + v_{af}}{\tau_{ks} + \tau_{as}}$	$\frac{v_{ks} + v_{as}}{\tau_{ks} + \tau_{as}}$	$C_4 \left(\frac{v_D}{\tau_D} + \frac{b_h}{\gamma\tau_H} \right) - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{b_k}{\tau_{ks}} + \frac{b_a}{\tau_{as}} \right)$	$\left(\frac{a_k}{\tau_{ks}} + \frac{a_a}{\tau_{as}} \right) / \frac{a_h}{\tau_H}$
V	$\frac{v_{hf} + v_{af}}{\tau_{hs} + \tau_{as}}$	$\frac{v_{hs} + v_{as}}{\tau_{hs} + \tau_{as}}$	$C_4 \left(\frac{v_D}{\tau_D} + \frac{b_k}{\gamma\tau_K} \right) - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{b_h}{\tau_{hs}} + \frac{b_a}{\tau_{as}} \right)$	$\left(\frac{a_h}{\tau_{hs}} + \frac{a_a}{\tau_{as}} \right) / \frac{a_k}{\tau_K}$
VI	$\frac{v_{hf} + v_{kf}}{\tau_{hs} + \tau_{ks}}$	$\frac{v_{hs} + v_{ks}}{\tau_{hs} + \tau_{ks}}$	$C_4 \left(\frac{v_D}{\tau_D} + \frac{b_a}{\gamma\tau_A} \right) - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{b_h}{\tau_{hs}} + \frac{b_k}{\tau_{ks}} \right)$	$\left(\frac{a_h}{\tau_{hs}} + \frac{a_k}{\tau_{ks}} \right) / \frac{a_a}{\tau_A}$

$$\frac{a_k}{\tau_K} dm_h - \frac{a_h}{\tau_H} dm_k = - \frac{D_{hk}}{\gamma\tau_H\tau_K} dp \quad (28)$$

이며 적분하여

$$\begin{aligned} & \frac{a_k}{\tau_K} (m_{hf} - m_{hs}) - \frac{a_h}{\tau_H} (m_{kf} - m_{ks}) \\ &= - \frac{D_{hk}}{\gamma\tau_H\tau_K} (p_f - p_s) \end{aligned} \quad (29)$$

를 구한다. 식 (1)의 적분형태인

$$\begin{aligned} & (m_{hf} - m_{hs}) + (m_{kf} - m_{ks}) + (m_{af} - m_{as}) \\ &+ (m_{df} - m_{ds}) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

에서 $(m_{af} - m_{as})$ 는 식 (27)에 의해 계산 가능하므로 식 (29) 및 (30)에서 m_{hf} 및 m_{kf} 를 결정할 수 있다. 따라서 τ_{hf} 및 τ_{kf} 는 β 및 γ 의 함수로 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \frac{v_{hf}}{\tau_{hf}} \beta &= \frac{v_{hs}}{\tau_{hs}} + \left[- \frac{D_{hk}}{\gamma\tau_H\tau_K} (\beta - 1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{v_{af}}{\tau_{as}} \beta^{1-n} - \frac{v_{as}}{\tau_{as}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_D}{\tau_D} (\beta - 1) \right] / \left(\frac{a_h}{\tau_H} + \frac{a_k}{\tau_K} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{kf}}{\tau_{kf}} \beta &= \frac{v_{ks}}{\tau_{ks}} + \left[\frac{D_{hk}}{\gamma\tau_H\tau_K} (\beta - 1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{v_{af}}{\tau_{as}} \beta^{1-n} - \frac{v_{as}}{\tau_{as}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_D}{\tau_D} (\beta - 1) \right] / \left(\frac{a_h}{\tau_H} + \frac{a_k}{\tau_K} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

기본과정 IV의 경우는

$$\tau_{kf} = \tau_{ks} \beta^n \quad (33)$$

$$\tau_{af} = \tau_{as} \beta^n \quad (34)$$

이며 τ_{hf} 는 식 (30)에서 쉽게 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} \frac{v_{hf}}{\tau_{hf}} \beta &= \frac{v_{hs}}{\tau_{hs}} - \left(\frac{v_{kf}}{\tau_{ks}} \beta^{1-n} - \frac{v_{ks}}{\tau_{ks}} \right) \\ &\quad - \left(\frac{v_{af}}{\tau_{as}} \beta^{1-n} - \frac{v_{as}}{\tau_{as}} \right) - \frac{v_D}{\tau_D} (\beta - 1) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

식 (26)에서 압력을, 예들든 식 (27), (31), (32) 및 식 (33)~(35)에서 각부의 온도를 구체적으로 결정하기 위해서는 일종의 초기조건인 기본과정의 최초상태 온도 τ_{is} 가 필요하다. 단열모델의 경우 기준상태가 존재하지 않으므로 각 상태가 주기적으로 반복된다는 주기정상조건의 적용이 불가피하다. 즉 사이클중 임의의 상태에서 τ_{is} 를 가정(일반적으로 $\tau_{is} = \tau_j$)하고 계산을 시작하여 한 사이클 경과후 그 결과를 초기치로 하여 정상상태에 도달할 때까지 반복하여야 한다.

해석의 과정 및 결과에 대하여 검토할 때, 본 연구에서 시도한 바와 같이 각부의 체적을 크랭크각도의 구간선형함수로 취급함으로써 상호결합된 기본방정식의 연립적인 해로 구해져야 할 종속변수를 각각 분리하여 순차적으로 해석하는 것이 가능하며 이점은 계산량과 무관하게 개념적으로 수치해석과는 구분된다. 한편, 실제 식 (26)에서 β 를 결정하기 위해서는 수치계산이 필요한 점을 지적할 수 있다. 다행히 식 (26)의 적분은 β 에 대하여 단조함수이므로 해는 쉽게 구해지지만 피적분함수가 C_4 의 값에 따라 특이점(singularity)을 갖는 경우는 계산시 Cauchy principal value⁽⁷⁾로서 해결하여야 한다. 다만, 여기서 언급한 수치계산의 필요성과 기본방정식 자체에 대한 수치해석은 전술한 바와

같이 본질적으로 상이하다.

4. 열교환량의 계산

VM사이클은 압력손실 및 마찰이 없는 이상적인 경우 디스플레이서 구동에 소요되는 일은 이론적으로 0이다⁽¹⁾. 실체는 0이 아니므로 외부에서 공급하지만 열교환량에 비해서 대단히 작다. 따라서, 성능은 열교환기를 통하여 출입하는 열량에 의존하며 3장에서 수행한 해석의 결과로부터 성능평가에 필요한 열량을 계산하기로 한다.

각 열교환기에 대한 계산모델을 Fig. 3에 표시하였다. 열교환기의 체적 및 온도는 각각 일정하므로 질량보존식은

$$dm_{in} = dm_{ex} + (v_j/\tau_j) d\beta \tag{36}$$

이며 한 사이클동안 외부와의 열교환량은 내부에너지는 불변이므로

$$q_j = \int \tau_{ex} dm_{ex} - \int \tau_{in} dm_{in} \tag{37}$$

로 표시된다. 여기서,

$$dm_{ex} = dm_i \tag{38}$$

로서 식 (37)에서 $dm_{ex} > 0$ 이면 $\tau_{ex} = \tau_j$, $dm_{ex} < 0$ 이면 $\tau_{ex} = \tau_i$ 이며 재생기 효율이 1이므로 $\tau_{in} = \tau_j$ 이다.

식 (37)의 적분은 기본과정에 대한 적분의 조합으로 계산할 수 있다. 3장에서와 같이, 기본과정 I-III의 경우와 IV-VI의 경우로 구분하며 각 경우 방법이 동일하므로 대표적으로 전자는 기본과정 I, 후자는 기본과정 IV를 예로서 취급한다. 기본과정 I에 대해서는 $dm_h > 0$, $dm_k > 0$ 이므로 식 (36) 및 (37)에 대입하면 간단히

$$q_H/p_s = -v_H(\beta - 1) \tag{39}$$

$$q_K/p_s = -v_K(\beta - 1) \tag{40}$$

이다. 그러나, $dm_a < 0$ 이므로 식 (37)은

$$q_A/p_s = \int_s^f \tau_a dm_a/p_s - \int_s^f \tau_A (dm_a/p_s + \frac{v_A}{\tau_A} d\beta) \tag{41}$$

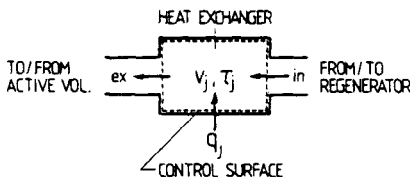


Fig. 3 Model for the evaluation of heat transfer

이 된다. 식 (41) 우변의 dm_a/p_s 는 식 (26)을 이용하여

$$dm_a/p_s = -C_3(\beta^n + C_4)^{-1} d\beta \tag{42}$$

로 표시할 수 있으며 식 (27) 및 (42)로부터

$$\tau_a dm_a/p_s = \tau_{as} C_3 \{C_4(\beta^n + C_4)^{-1} - 1\} d\beta \tag{43}$$

이다. 식 (42) 및 (43)의 적분은 식 (26)에서 쉽게 구해지므로 정리하면 다음과 같다.

$$q_A/p_s = -(v_A + \tau_{as} C_3)(\beta - 1) - (\tau_{as} C_4 + \tau_A)(C_1 \beta^{1-n} - C_2) \tag{44}$$

기본과정 IV에 대해서는, 먼저 $dm_h > 0$ 이므로

$$q_H/p_s = -v_H(\beta - 1) \tag{45}$$

이지만 $dm_k < 0$, $dm_a < 0$ 이므로 식 (37)은 식 (41)과 같은 형태가 된다. 기본과정 IV에 대한 식 (26)으로부터

$$dm_k/p_s + dm_a/p_s = -C_3(\beta^n + C_4)^{-1} d\beta \tag{46}$$

를 유도할 수 있으며 식 (33) 및 (34)를 각각 식 (24)에 대입하고 dv_i 항을 소거하면

$$\frac{q_a}{\tau_{as}} dm_k/p_s - \frac{q_k}{\tau_{ks}} dm_a/p_s = -\frac{D_{ka}}{\gamma \tau_{ks} \tau_{as}} \beta^{-n} d\beta \tag{47}$$

이 된다. 식 (46) 및 (47)에서 dm_k/p_s 및 dm_a/p_s 를 구한 후 각각 적분하여 정리하면 다음과 같다.

$$q_K/p_s = -v_K(\beta - 1) + \left[-\frac{q_k}{\tau_{ks}} (\tau_{ks} C_4 + \tau_K)(C_1 \beta^{1-n} - C_2) - \left(\frac{q_k}{\tau_{ks}} C_3 + \frac{\tau_{ks} D_{ka}}{\gamma \tau_{ks} \tau_{as}} \right) (\beta - 1) + \frac{\tau_K D_{ka}}{\tau_{ks} \tau_{as}} (\beta^{1-n} - 1) \right] / \left(\frac{q_k}{\tau_{ks}} + \frac{q_a}{\tau_{as}} \right) \tag{48}$$

$$q_A/p_s = -v_A(\beta - 1) + \left[-\frac{q_a}{\tau_{as}} (\tau_{as} C_4 + \tau_A)(C_1 \beta^{1-n} - C_2) - \left(\frac{q_a}{\tau_{as}} C_3 - \frac{\tau_{as} D_{ka}}{\gamma \tau_{ks} \tau_{as}} \right) (\beta - 1) - \frac{\tau_A D_{ka}}{\tau_{ks} \tau_{as}} (\beta^{1-n} - 1) \right] / \left(\frac{q_k}{\tau_{ks}} + \frac{q_a}{\tau_{as}} \right) \tag{49}$$

이상과 같이 각 기본과정에 있어서 열교환기별로 출입하는 열량을 β 및 기지량의 해석적인 함수형태로 표현하였으므로 성능계수(COP) 등 성능평가를 위한 지표는 쉽게 계산된다.

5. 결 론

VM사이클의 단열모델에 대하여 각부의 체적변화를 구간선형적으로 근사화하여 해석적 접근을 시

도한 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다.

(1) 하나의 사이클을 여섯 종류 기본과정의 조합으로 취급할 수 있다.

(2) 임의의 과정이 기본과정중의 하나로 되는 조건을 확립하였다.

(3) 각 기본과정에 대하여, 압력을 일반화된 식의 해로서 결정할 수 있었으며 각부의 온도 또는 질량을 압력의 함수로 표시하였다.

(4) 사이클의 성능평가에 필요한 열교환량을 종속 변수들의 해석적인 함수로 유도하였다.

즉, 단열모델에 대하여 해석적 근사해를 구하였으므로 수치해석에 의존하지 않으면서도 등온해석보다는 실제 작동조건에 부합하는 성능의 예측이 가능하며, 따라서 본 연구의 결과는 VM사이클로 작동되는 냉동기의 설계에 유용할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

(1) Walker, G., 1983, "Cryocoolers", Vol. I, Plenum

Press, New York, pp. 185~236.

(2) West, C.D., 1986, "Stirling Machines-Adiabatic to Isothermal", Proc. 3rd ISEC, Vol. II, pp. 557~570.

(3) Kuehl, H.D., Richter, N. and Schulz, S., 1986, "Computer Simulation of a Vuilleumier Cycle Heat Pump for Domestic Use", Proc. 21st IECEC, Vol. 1, pp. 555~561.

(4) Finkelstein, T., 1962, "Cyclic Processes in Closed Regenerative Gas Machines Analyzed by a Digital Computer Simulating a Differential Analyzer", J. Eng. Industry, Trans. ASME, Vol. 84, pp. 165~179.

(5) Qvale, E.B. and Smith, Jr., J.L., 1968, "A Mathematical Model for Steady Operation of Stirling-Type Engines". J. Eng. Power, Trans. ASME, Vol. 90, pp. 45~50.

(6) 유호선, 1988, "단열실린더내에서 톱날파형 피스톤 운동을 하는 스티링기관에 대한 해석적인 해", 대한 기계학회논문집, 제 12 권, 제 5 호, pp. 1197~1205.

(7) Arfken, G., 1970, "Mathematical Methods for Physicists", 2nd ed., Academic Press, pp. 351~353.