

<論 文>

평면상 날카로운 돌출부 위를 흐르는 난류 재순환 유동해석을 통한 ASQUICK차분법의 수치적 성질 확인

김 성 준*
(1988년 3월 2일 접수)

Confirmation of Numerical Properties of ASQUICK Scheme through Numerical Simulation of Recirculating Turbulent Flow over a Sharp Rib Mounted on a Plane Surface

Sung Joon Kim

Key Words : Numerical Property(수치적 성질), Turbulent Flow(난류), ASQUICK Scheme
(ASQUICK차분법)

Abstract

ASQUICK scheme is applied to simulate numerically the recirculating turbulent flow over a sharp rib mounted on a plane surface. Two dimensional governing equations and two-equation turbulence model($k-\epsilon$ model) equations are used and discretized to get the system of finite difference equations. $k-\epsilon$ model is selected in the report because it has been used with confidence in various previous computation works. The system of finite difference equations are solved by the line-by-line method. The numerical properties of second order accuracy and good numerical stability of ASQUICK scheme are confirmed through numerical experiments. The adaptibility of ASQUICK scheme with PISO velocity pressure correction scheme is evaluated. PISO-ASQUICK combination shows substantial advantages on reducing computational time over SIMPLE-ASQUICK combination.

1. 배 경

과거 많은 CFD(Computational Fluid Dynamicist)들이 난류 재순환 유동해석을 위해 상류차분법(이후 차분법은 numerical scheme을 의미함), HYBRID차분법 또는 왜도상류(skew upwind)차분법⁽¹⁾과 같은 1차 정확도차분법과 함께 난류효과를 묘사하기 위해 $k-\epsilon$ 난류모델 방정식을 많이 사용해 왔으나 그 계산결과는 실험치와 큰 차이가 있어

왔는데 그 주요 이유는 차분법에 의한 오차와 난류 모델 오차로 크게 나눌 수 있으며 여기서는 차분법에 의한 오차 중 수치확산에 대해서만 언급하고자 한다.

수치확산은 지배방정식의 대류항을 이산화식으로 표시할 때 물리적으로 타당한 수치해와 수치계산의 안정성을 확보하기 위해 대류항을 Upwinding하게 되는데 이때 생기는 오차이다. HYBRID차분법을 사용하면서 이 수치확산을 만족할 수준으로 줄이기 위해서는 계산결점을 100×100 까지 늘려야 한다고 McGuirk⁽²⁾은 주장하였는데 이는 계산비용이 크게 증가되어 바람직하지 못할 뿐만 아니라 3차원 해석

*정회원, 강원대학교 공과대학 기계공학과

의 경우는 거의 그 사용이 불가능한 실정이다.

한편 1차정확도 이상인 왜도상류차분법⁽¹⁾과 2차정확도의 QUICK 차분법⁽³⁾을 날카로운 돌출부(Sharp rib) 위의 난류 유동해석에 사용한 결과는 급한 속도구배에서 수치계산치가 진동하는 등 안정된 계산을 진행시킬 수가 없었다⁽⁴⁾. 또한 QUICK 차분법의 안정성은 차분방정식의 구성형태에 따라 크게 변하여 좋은 안정성을 갖는 차분방정식을 구하기 위해서는 여러번의 불편한 수치실험을 거쳐야 했다⁽⁵⁾. 본 논문에서 수치실험(numerical experiment)은 그 유용성이 확인되지 않은 어떤 수치계산기법에 의한 수치계산 또는 수치예측을 의미한다.

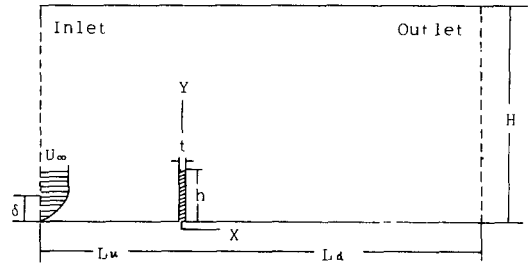
Absolutely Stable QUICK 차분법(이후 ASQUICK 차분법이라 함)⁽⁶⁾은 차분방정식 계수들의 Matrix를 Diagonal Dominant하게 함으로써 절대안정성을 얻은 2차정확도 차분법으로 그 응용시 위에 언급한 Han과 Humphrey⁽⁵⁾의 불편하고 값비싼 수치실험을 제거시킨 차분법이다.

본 연구는 수치계산의 불안정성 때문에 과거 고차정확도 유한차분법들로 수치계산하기 어려웠던 날카로운 돌출부위를 흐르는 난류유동현상을 ASQUICK 차분법으로 수치해석하고 그 수렴해결 얻음으로써 수치계산의 안정성을 확인하며 수치계산 결과를 HYBRID 차분법에 의한 수치해석치 및 재순환난류유동의 특성치라 할 수 있는 재순환영역 길이 실험치⁽⁷⁾와 상호비교함으로써 수치계산의 정확도 향상효과를 확인하고자 한다. 더불어 수치계산의 수렴과정에 큰 영향을 미치는 것으로 잘 알려져 있는 속도 압력교정법으로써의 PISO법^(4,9)을 ASQUICK 차분법과 함께 사용해 PISO-ASQUICK 조합의 유용성을 확인하고자 한다.

2. 지배방정식과 경계조건

Fig. 1은 본 논문에서 사용하고 있는 계산영역을 보이고 있으며 x 는 돌출부 중심선을 원점으로 하는 수평방향의 거리, y 는 수직방향의 거리, h 는 돌출부의 높이, H 는 계산영역에서 자유경계 높이, t 는 돌출부 두께, L_u 는 돌출부 중심에서 상류쪽 끝까지의 거리, L_d 는 돌출부 중심에서 하류쪽 끝까지의 거리, U_∞ 는 자유경계에서의 x 방향 유속을 의미한다.

날카로운 돌출부 위의 2차원 정상난류유동을 지



Parameter	Dimensions (meter)
h	0.1
H	1.0
t	0.001
L_u	0.6
L_d	2.0
δ	0.04
Top Boundary	Free Boundary
U_∞	26 m/sec

Fig. 1 The domain of calculation

배하는 방정식들을 색인기호로 표시하면 다음과 같고 난류모델로서는 2 방정식모델($k-\epsilon$)을 사용하였는데 다른 고 정확도의 난류모델이 있는데도 불구하고 이 모델을 사용한 이유는 지금까지 알려진 난류모델들 가운데 가장 많이 사용되고 있을 뿐만 아니라 사용상의 신뢰도가 좋아 수치실험에 적합하기 때문이다.

연속방정식

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

운동량방정식

$$\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{eff} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \tag{2}$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t$$

여기서 μ 는 층류점성이고 μ_t 는 난류점성이다.

두 방정식 난류모델인 $k-\epsilon$ 모델에서

$$\mu_t = \frac{\rho C_\mu k^2}{\epsilon}$$

위에서 ρ 는 밀도이고 상수 C_μ 는 0.09이며 k 와 ϵ 은 난류에너지와 난류에너지 소산률을 각각 의미한다.

k 및 ϵ 방정식의 일반형은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \tag{3}$$

여기서 ϕ 와 Γ_ϕ 그리고 S_ϕ 는 종속변수, 확산계수와 원천항을 각각 의미하고 있고 Table 1에 그 내

Table 1 Variable, diffusion coefficient and source term

ϕ	$\sqrt{\phi}$	S_ϕ
K	μ_{eff}/σ_k	$G - \rho \epsilon$
ϵ	$\mu_{eff}/\sigma_\epsilon$	$C_1 \frac{\epsilon}{K} G - C_2 \rho \epsilon^2$

$$G = \mu_t \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = K^2 / (C_2 - C_1) C_\mu^{1/2}$$

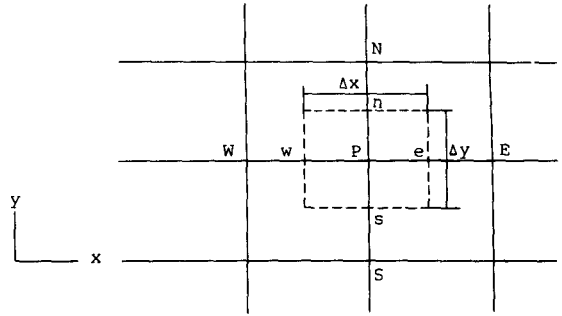
$$C_1 = 1.44 \quad C_2 = 1.92$$


Fig. 2 Two dimensional computational cell

용이 소개되어 있다.

운동량방정식을 위한 경계조건은 다음과 같이 주었다. 입구에서는 경계층내에 속도분포를 주기 위해 One-Seventh Power Law 속도구배를 사용했으며 출구에서는 속도구배가 없는 것으로 했다. 아래면과 돌출부의 표면의 경우에는 No-Slip 조건을 부여하고 Laminar Sublayer 안에서는 Shear Stress가 일정하다고 가정하고 밖에서는 Logarithm Law of Wall을 사용해 면에 평행한 속도를 계산했다. 위 경계는 u 와 v 값을 U_w 와 0으로 주었다. 출구의 경계조건은 x 방향의 속도구배가 없는 것으로 하였다. 난류에너지 및 난류에너지 소산율 방정식을 위한 경계조건으로는 경계층내에서의 난류국부평형을 사용해 난류에너지 및 난류에너지 소산률의 입구조건을 다음과 같이 주었다⁽⁴⁾. 여기서 δ 는 경계층 두께이다.

$$K = 0.0001 u^2$$

$$\epsilon = K^{3/2} C_\mu^{3/4} / (C_\mu \delta)$$

3. 유한 차분방정식의 구성

유한차분방정식을 편미분방정식으로부터 얻는 데는 몇 가지 방법이 있으나 본 연구에서는 아래 Fig. 2에 있는 바와 같은 계산결점 주위에 계산세포를 만들고 해당 편미분방정식을 각 계산세포에 대해 적분을 함으로써 얻었다.

언어진 2차원 유한차분방정식의 일반적인 형태를 소개하면 다음과 같다.

$$A_e \phi_e - A_w \phi_w + A_n \phi_n - A_s \phi_s$$

$$= D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

$$+ D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S) + S \quad (4)$$

여기서 A_e, A_w, A_n 및 A_s 는 계산세포의 각 면을 통해 흐르는 유량을 의미하고 D_e, D_w, D_n 및 D_s 는 확산계수와 계산세포의 x 와 y 방향 길이의 곱이다. S 는 기타 SOURCE항이며 ϕ 는 종속변수를 표시하고 있다.

위 식 (4)에서 ϕ_e, ϕ_w, ϕ_n 및 ϕ_s 는 대류항의 이산화식에 포함된 종속변수로써 이들의 값을 ASQUICK차분법 또는 중앙차분법을 사용해서 $\phi_P, \phi_E, \phi_W, \phi_N$ 및 ϕ_S 와 같은 결점에서의 값으로 표시하며 2차 정확도를 얻었다. 실제 수치계산에 있어서는 계산비용의 절감을 위해서 Cell Reynolds 수가 2보다 클 때는 ASQUICK차분법을 사용하고 Cell Reynolds 수가 2보다 작을 때와 경계면에서는 2차정확도를 얻기 위해 중앙차분법을 사용했다. 여기서 Cell Reynolds 수는 $(\rho V \Delta l) / \mu$ 이며 ρ 는 유체의 밀도, V 는 유체의 x 또는 y 방향 속도의 절대값, μ 는 유체의 점도, Δl 는 계산세포의 x 또는 y 방향 크기입니다.

4. 수치계산법

수치실험을 위한 계산세포망은 Fig. 3과 같으며 계산의 경제성을 고려해 상류 또는 하류쪽으로 계산세포의 크기가 확장되는 형식을 취했으며 32×27을 사용하였다. Good와 Joubert⁽⁷⁾가 실험에서 사용한 날카로운 돌출부를 묘사하기 위해 날카로운 돌출부를 계산세포망에서 그대로는 묘사할 수 없으므로 Benodekar⁽⁴⁾가 제시한 방법을 사용했다. 즉, 날카로운 돌출부를 1렬의 계산세포군으로 묘사하고 계산세포의 두께를 실제 날카로운 돌출부 두께의 4분의 1로 했다.

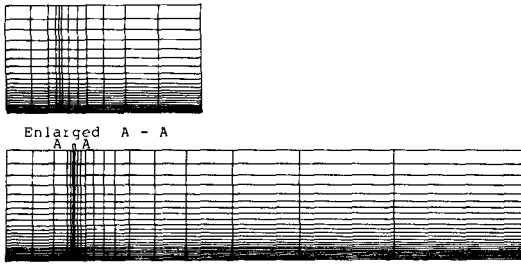


Fig. 3 Computational grid system for turbulent over a surface mounted sharp rib

종속변수는 Primitive Variable을 사용했으며 운동량방정식을 위해서는 Staggered계산세포망을 사용하였다. 유한차분법에서는 원래의 편미분방정식이 차분방정식으로 표시된 뒤 이 식들을 반복계산법을 사용해 계산함으로써 비선형의 편미분방정식이 선형의 차분방정식으로 되는데 반복계산법으로는 Line by Line법⁽⁶⁾을 사용했다. 수치계산은 질량잔류치의 총 합계가 미리 정해 놓은 기준치보다 적을 때 종료시켰으며 수치계산 시간을 줄이기 위해 속도-압력 교정법으로 PISO를 사용했다. 한편 PISO법의 유용성을 확인하기 위해 SIMPLE법⁽⁶⁾과 비교하였으며 PISO법이 SIMPLE법에 비해 계산속도가 경우에 따라서는 3배 이상 빠른 것으로 확인되었다. 기본 프로그램은 TEACH⁽¹⁰⁾을 사용했으며 계산순서는 운동량방정식을 풀고 압력분포를 계산한 뒤 속도-압력 교정법을 사용해 속도와 압력을 교정하고 난류모델 방정식인 k 및 ϵ 방정식을 풀이하는 순서로 반복계산을 하였다.

유한차분법을 사용한 수치계산은 차분법의 종류에 관계없이 Under-Relaxation Factor의 선정이 수치계산의 안정성 확보에 극히 중요함은 잘 알려져 있는 사실이다. 이의 최적치 선정은 보통 수치

실험을 통해 결정되는데 어떤 차분법이든 너무 큰 Under-Relaxation Factor는 계산오차가 계산과정 중에 증폭되거나 진동되어 원하는 값을 얻을 수 없으며 너무 그 값이 적으면 계산시간이 길어져 계산 비용이 많이 든다. 본 연구의 경우 x 방향 운동량 방정식을 위한 Under-Relaxation Factor의 값으로 0.3을 취했으며 기타 방정식의 경우는 0.5를 취했다. 이들 값의 선정은 수치실험을 통해 얻어졌다. 절대 안정한 것으로 믿어지는 HYBRID차분법의 경우도 Under-Relaxation Factor의 값이 0.7보다 크게 되면 계산오차가 계산중에 증폭되는 경우가 많은데 Under-Relaxation Factor가 수치계산 안정성에 미치는 영향은 좀더 연구되어야 할 과제로 믿어진다.

5. 수치실험 결과

수치실험결과로써 먼저 수치계산시간과 반복계산수를 먼저 언급하고자 한다. 속도-압력 교정법인 PISO와 SIMPLE을 ASQUICK 차분법 및 HYBRID차분법과 함께 Fig. 1과 같은 평면상 날카로운 돌출부 위를 흐르는 난류재순환 유동의 수치 해석에 사용하였다. 계산결점의 수는 864(32×27)개이었으며 계산은 반복계산 중 질량잔류치가 질량 흐름의 1/1000보다 적을 경우에 종료시켰다. Table 2에 계산시간과 반복계산수에 대한 수치실험 결과가 소개되어 있다. HYBRID차분법의 경우 PISO가 SIMPLE에 비해 단일 반복계산에서 10% 가량 긴 계산시간이 필요했다. 이는 PISO가 SIMPLE에서 수행되는 속도-압력 교정을 한 뒤 대류항의 영향을 다시 계산하므로 두번째 계산만큼의 계산시간이 더 걸릴 것이기 때문에 당연한 결과로 믿어진다.

Table 2 Computational time and No. of iteration

Scheme	No. of iteration	CPU time (sec)	CPU time(sec, per each iteration)
ASQUICK/SIMPLE	2848	13,357	4.69
ASQUICK/PISO	938	4,868	5.19
HYBRID/SIMPLE	464	1,856	4.00
HYBRID/PISO	426	1,895	4.45

Table 3 The length and height of recirculation zone

Scheme	Length of recirculation zone (L_R/h)	Height of recirculation zone (H_R/h)
HYBRID	8.05	1.40
ASQUICK	10.23	1.61
EXPERIMENT	13.2	2.16

반복계산수는 PISO가 약간 빠른 Convergence Rate를 보여 SIMPLE보다 10% 가량 적은 반복계산에서 계산이 종료되었는데 총 계산시간의 경우는 반대로 SIMPLE이 PISO보다 짧은 계산시간이 소요되었다. 이는 PISO가 갖는 유용성의 한계를 보여주는 것으로서 PISO의 장점이 유한차분법의 종류와 계산결점의 수 그리고 필요로 하는 반복계산의 수에 의존한다고 하겠다. ASQUICK차분법의 경우 단일반복계산의 경우 HYBRID와 같이 PISO가 SIMPLE보다 10% 가량 긴 계산시간이 필요했으나 반복계산수에 있어서는 3배 가량 SIMPLE이 PISO보다 많아 결과적으로 PISO가 필요로 하는 계산시간 총계는 SIMPLE의 36% 정도이었다.

다음은 재순환 영역의 길이와 속도분포에 대해 논의하고자 한다. 1차 정확도 유한차분법인 HYBRID차분법을 수치실험에 적용시킨 결과와 2차 정확도의 ASQUICK차분법에 의해 계산된 재순환 영역의 길이가 Table 3에 보여져 있으며 ASQUICK차분법의 길이는 HYBRID차분법의 경우보다 약 27% 길었으며 실험치보다는 23% 정도가 적게 계산되었다. Fig. 4에 아래면을 기준으로 계산한 Stream Function의 값이 0인 유선이 도시되어 있다. ASQUICK차분법에 의한 재순환영역의 길이가 HYBRID차분법에 의한 것보다 더 길고 실험치에 근접한 것은 수치계산의 정확도 향상에 따른 결과로 믿어진다. 한편 HYBRID차분법에 의해 계산된 재순환영역의 길이를 Benodekar가 36×33 계산세포에서 HYBRID차분법으로 계산한 결과와 비교해 보면 17% 정도 본 논문의 계산길이가 짧은데 이는 본 논문의 수치계산과정이 난류모델에서 유선의 곡선효과(stream line curvature effect)를 고려치 않았으며 계산결점수 및 입구조건의 차이에 기인한 것으로 믿어진다.

재순환 영역의 높이 역시 Table 3과 같이 ASQUICK차분법이 HYBRID차분법에 비해 보다

정확한 수치계산을 보였으며 이 결과 역시 수치계산의 정확도향상, 즉 수치확산의 감소로 인한 당연한 결과라 하겠다.

Fig. 5와 Fig. 6은 돌출부 직전과 직후의 x 방향

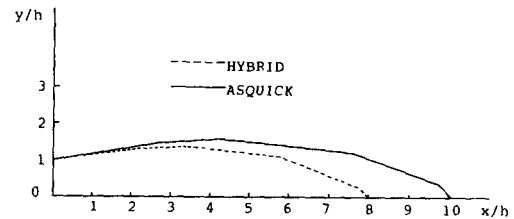


Fig. 4 $\phi=0$ line predicted by HYBRID scheme and ASQUICK scheme

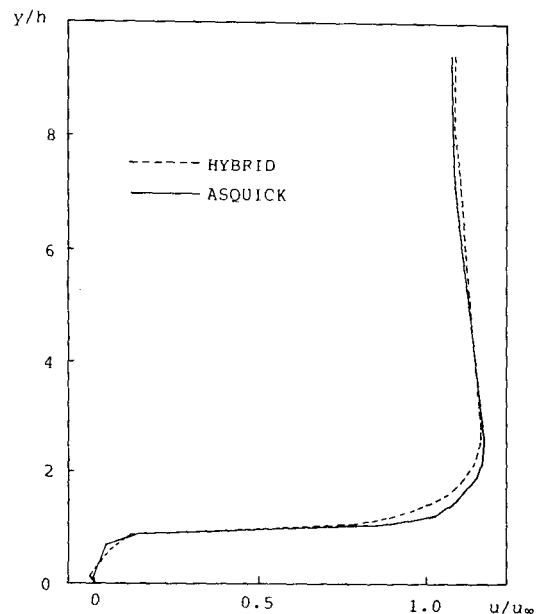


Fig. 5 u -velocity profile at $x/h = -0.045$

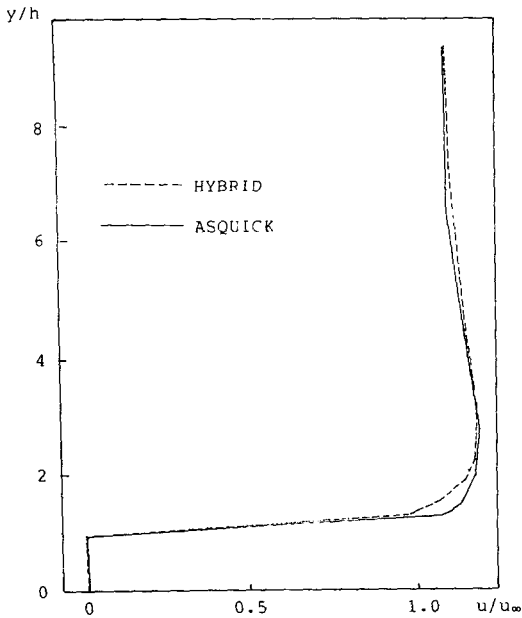


Fig. 6 u -velocity profile at $x/h=0.055$

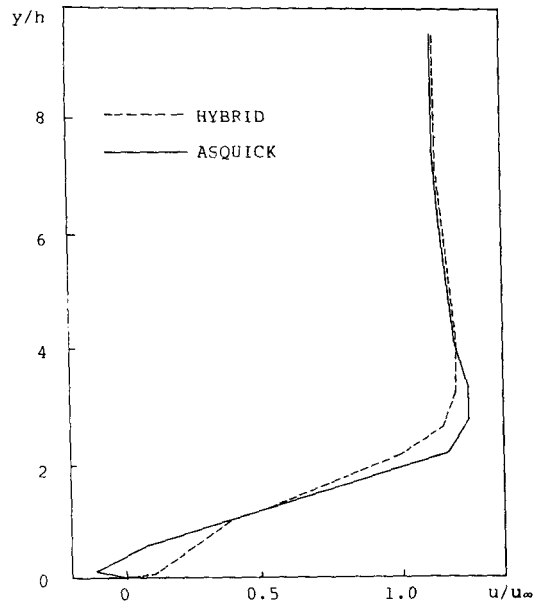


Fig. 8 u -velocity profile at $x/h=9.335$

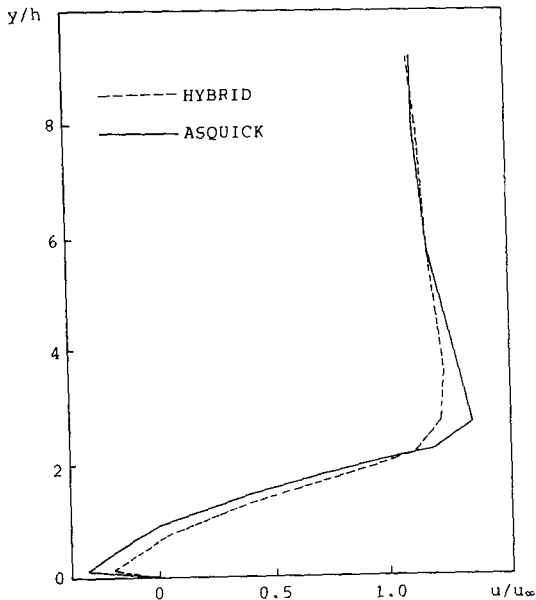


Fig. 7 u -velocity profile at $x/h=5.485$

속도분포를 나타내고 있는데 돌출부 직전의 유동이 직후에 비해 큰 운동량을 갖고 있음을 보이고 있다. 이는 상류의 영향이 직전에서는 크고 직후에서는 작음을 나타내는 것으로 Benodekar의 수치해

석 결과⁽⁴⁾ 및 Good & Joubert의 실험치⁽⁷⁾와 그 경향이 일치하고 있다. Fig. 5는 Rib직전의 재순환 현상을 분명히 보여주고 있으나 재순환영역이 극히 작아 차분법에 의한 영향을 보기에는 적합치 않았다.

Fig. 7과 Fig. 8은 돌출부를 지난 하류에서 x 가 재순환영역 끝점에 가까워짐에 따른 x 방향 유속의 변화를 보이고 있으며 HYBRID차분법에 의한 예측치의 경우 $x/h=9.335$ 가 이미 재순환영역 밖임을 볼 수 있으며 ASQUICK차분법의 경우는 일부 유속이 음수치이어서 아직도 재순환영역안임을 볼 수 있다. 이는 ASQUICK차분법이 HYBRID차분법보다 긴 재순환영역의 길이를 예측하고 있어 당연한 결과라 할 수 있다.

6. 결 론

과거 QUICK 등 고차정확도 차분법으로 수치에 측키 어려웠던 날카로운 돌출부 위의 난류유동을 ASQUICK차분법으로 수치해석해 그 수렴해를 얻음으로써 ASQUICK차분법의 수치계산 안정성을 볼 수 있었고, ASQUICK차분법에 의한 재순환영역 길이 계산치가 HYBRID차분법에 의한 계산치에 비해 실험치에 보다 접근함으로써 ASQUICK차

분법의 정확도 향상 효과를 확인할 수 있었다. 또한 ASQUICK차분법에 PISO 속도-압력 교정법을 사용하는 것이 SIMPLE법을 사용하는 것보다 훨씬 경제적이었다.

參 考 文 獻

- (1) Raithby, G.D., 1976, "Skew Upstream Differencing for Problems Involving Fluid", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 9, pp. 158~164.
- (2) McGuirk, J.J., et al., 1981, "The Assessment of Numerical Diffusion in Upstream Difference Calculation of Turbulent Recirculating Flows", *Turbulent shear Flows*, Vol. 3, pp. 206~223.
- (3) Leonard, B.P., 1979, "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation" *Comp. in Appl. Mech & Engng*, pp. 59~98.
- (4) Benodekar, R.W., et al., 1985, "Numerical Prediction of Turbulent Flow over Surface-Mounted Ribs", *AIAA J.*, Vol. 23, No. 3, pp. 359~366.
- (5) Han, T., et al, 1981, "A comparison of HYBRID and Quadratic-Upstream Differencing in High Reynolds Number Elliptic Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 29, pp. 81~95.
- (6) Kim, S.J., 1987, "A Lagrangian Model for Spray Dryer Desulfurization System", *KSME Journal*, Vol. 1, No. 2, pp. 147~157.
- (7) Good, M.C., and Joubert, P.N., 1968, "The Form Drag of Two-Dimensional Bluff Plates Immersed in the Turbulent Boundary Layers", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 31, pp. 547~582.
- (8) Patankar, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill.
- (9) Neely, G.M. and Claw, R.W., 1985, "Accelerated Convergence for Incompressible Flow Calculation", *NASA TM-86863*.
- (10) Gosman, D., and Pun, A.D., 1973, "Calculation of Recirculating Flows", *Lecture notes*, Imperial College of Science and Technology, London.