

<論 文>

타이어 접지문제의 유한요소 응력해석

한영훈* · 김용희* · 허 훈** · 곽윤근**

(1989년 4월 4일 접수)

Finite Element Analysis of the Tire Contact Problem

Y.H. Han, Y.H. Kim, H. Huh and Y.K. Kwak

Key Words: Tire(타이어), Finite Element Analysis(유한요소해석), Equations for the Effective Elastic Constants(유효탄성 계수식), Updated Lagrangian and Contact Formulation(개량 Lagrangian 및 접지공식), Stress Concentration(응력집중)

Abstract

The tire inflation and contact problem has been solved by a finite element method. The finite element formulation is derived from the equilibrium equations by the principle of virtual work in the form of an updated Lagrangian formulation for incremental analysis. Then, a contact formulation is added to the finite element formulation to calculate stress state of tire in contact with flat rigid road under the load due to the self-weight of a vehicle. In the finite element analysis, equations of effective material properties are introduced to analyze a plane strain model of the shell-like tire by considering the bending effect of reinforced steel cords. The proposed equations of effective material properties produced stress concentration around the edge of belt layers, which does not appear when other well-known equations of material properties are adopted. The result from the above algorithm demonstrates the validity of the formulation and the proposed equations for the effective elastic constants. The result fully interprets the cause of separation between belt layers by showing the stress concentration.

1. 서 론

타이어는 내부의 공기압으로 형태가 유지되고 내압 및 외부하중에 견디기 위하여 여러장의 층으로 구성되어 있으며, 각 층은 강철 코드나 폴리에스터 코드등으로 한쪽 방향이 강화되어진 얇은 코드-고무 복합체이다. 이러한 타이어의 구조는 타이어가 격렬한 주행 조건에도 잘 견딜수 있게 하지만, 층 사이의 응력집중으로 박리를 발생시켜 타이어의 수명을 짧게 할 뿐만 아니라 치명적인 사고를 일으키

므로 타이어의 응력해석은 타이어의 설계에 있어서 매우 중요하다.

타이어의 응력해석은 구조적 복잡함과 복합재료의 재질특성으로 인하여 매우 어렵게 취급되어 왔으나 최근에는 유한요소법이 많이 활용되고 있다. 유한요소법이 타이어에 처음 적용된 것은 1970년대 Firestone과 Goodyear사에 의해 시도 되었다. 특히 타이어의 동적 접지문제는 비행기의 이착륙에 중요하므로 NASA⁽¹⁵⁾등에서 활발히 연구되어 왔다. 접지된 타이어에 대한 연구로는 Kennedy, Patel 및 McMinn⁽¹⁸⁾등이 트럭 타이어의 변형 상태를 2차원적인 방법으로 연구 하였으며, 또한 축대칭 하중이 작용하고 있는 복합재료 구조물에 대해

* 한국타이어 기술연구소

** 정희원, 한국과학기술대학 기계·재료공학부

서도 비선형 유한요소법을 이용하여 해석하였다. 그리고 Oden과 Kikuchi⁽⁹⁾는 접지문제에서 비 압축성 탄성물질의 비선형적인 경계조건에 대한 연구를 하였으며, Idelberger, Jacobi 및 Laging⁽⁴⁾은 정적 접지의 경우에 대한 변형상태와 접지면에서의 압력 분포등을 실험적인 방법과 유한요소법에 의한 이론적인 방법으로 해석하였다. Tielking과 Schapery⁽⁷⁾는 DFT(Discrete Fourier Transform)를 이용하여 해석적 방법으로 셀 모델의 접지부분에서의 압력 분포를 보였다. Endo, Oden, Becker 및 Miller⁽¹⁰⁾는 비선형 탄성재질에서 대변형시의 좌굴과 접지문제를 유한요소법을 이용하여 해석하였다. 이와같이 코드로 강화된 타이어의 응력해석은 보통 유한요소법에 의하여 연구되어 왔으며 타이어 구성요소의 물성치는 각 요소의 물리적 특성을 잘 나타낼수 있도록 신중하게 결정되어야 한다. 코드 강화층과 같은 복합체의 물성치는 복합체의 물성해석에 널리 알려져 있는 Halpin-Tsai 식, Gough-Tangorra 식, Akasaka-Hirano 식⁽²³⁾ 등과 같은 식에 의하여 결정되어져 왔다. 그러나 이러한 식들은 변형중의 강화코드에 의한 굽힘효과를 고려하지 못하고 있다. 타이어는 셀과 같은 구조로 인하여 굽힘효과가 때로는 상당히 커지므로 이러한 식들에 의한 응력해석 결과는 실제 타이어의 응력상태를 나타내지 못하는 경우가 종종 있다.

본 논문에서는 타이어의 각 부분의 물성치 계산을 위한 식을 유한요소법에 적용할 수 있도록 제안하였다. 이 식은 강철 코드의 굽힘효과를 고려하였으며, 특히 각 요소에서 전단변형이 일어나는 동안의 굽힘효과를 고려하였다. 유한요소 공식화는 가상일의 원리에 의하여 평형 방정식으로부터 유도하였고, Updated reference coordinate에 대해 증분해석을 적용하여 Updated Lagrangian공식화를 하였다. 그리고 차량하중에 의하여 타이어가 노면에 접지될때의 응력상태를 계산할 수 있도록 접촉 문제 공식화를 유한요소 공식화에 첨가 하였다.

본 연구에서 개발한 유한요소 프로그램을 타이어의 단면에 내압이 작용하는 경우와 차량의 하중에 의해 타이어가 노면에 접지되는 경우에 대해 적용하였다. Halpin-Tsai등에 의한 식에서는 벨트 선단부에서 응력집중이 나타나지 않았으나, 본 연구에서 제안한 물성 방정식에 의한 결과는 강철 코드 강화층 주위에서 응력집중이 나타나는 결과를 얻었다. 수치해석 결과로는 차량하중과 벨트각도의 변

화에 따른 타이어의 응력상태를 구하였고, 노면과 타이어의 접지압력을 그래프로 나타냈다.

2. 지배 방정식

평형상태를 만족하는 변형체에 대한 응력장은 직교좌표계에서 다음의 평형방정식으로 부터 구할 수 있다.

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \quad \text{in } D \quad (1)$$

경계조건은

$$u_i = g_i \quad \text{on } \partial D_d \quad (2)$$

$$\sigma_{ji} n_j = t_i \quad \text{on } \partial D_f \quad (3)$$

이며, 여기서 σ_{ij} : 영역 D 에서의 코오시 응력텐서 (Cauchy stress tensor)

ρ : 질량 밀도 함수

b_i : 물체력 벡터

u_i : 변위 벡터

t_i : 외력 경계 ∂D_f 에서의 외력 벡터 함수

식 (1)에 가상일의 원리를 적용하여 영역 D 에 대하여 적분하면 다음과 같은 지배방정식의 적분형 (weak form)을 얻을 수 있다.

$$\int_D \sigma_{ji} \bar{u}_i, j d\Omega = \int_D \rho b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\partial D_f} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{u}_i \quad (4)$$

여기서 \bar{u}_i 는 변위 경계 ∂D_d 에서 $\bar{u}_i=0$ 인 임의의 가상변위 벡터이다.

식 (4)는 변형이 작은 선형문제에만 직접 적용할 수 있기 때문에 대변형의 문제는 다음과 같은 Lagrangian 공식화가 필요하다.

$$\int_{D^0} T_{ji} \bar{u}_i, j d\Omega = \int_{D^0} \rho^0 b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\partial D^0_f} t_i^0 \bar{u}_i d\Gamma \quad (5)$$

여기서 T_{ji} 는 First Piola-Kirchhoff (Lagrange) 응력텐서이며, 코오시 응력텐서 σ_{ij} 와는 다음과 같은 관계가 있다.

$$T_{ji} = J X_{j,J} \sigma_{ji} \quad (6)$$

여기서 $J (= \rho^0 / \rho)$ 는 Jacobian 행렬 $[\partial x_i / \partial x_{j^0}]$ 의 행렬식이다. 상첨자(°)는 변형되지 않은 상태에서의 값을 나타내며, $u_{i,j}$ 는 기준좌표계 D^0 에서 정의 되어진 X_j 에 대한 u_i 의 i 번째 성분의 편미분을 의미한다.

Updated Lagrangian 공식화에서는 Fig. 1에 도시한 것과 같이 D^t 를 기준좌표계로 지정하여, Δt

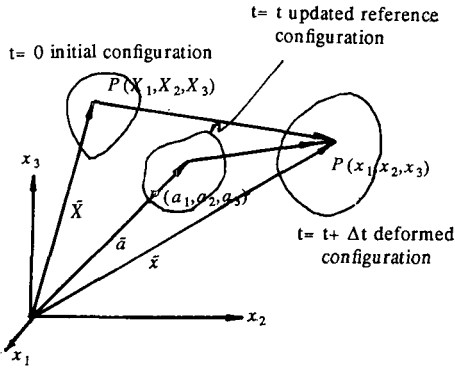


Fig. 1 Reference configuration

동안에 미소 변형을 하는 것으로 가정하였다. 이때에 변형이 미소하므로 모든 정적, 동적변수를 $T_{ji} \approx \sigma_{ij}$ 로 가정되어지는 D' 에서의 값으로 근사할 수 있다. 그러므로 식 (5)는 $J \approx 1$ 이 되도록 충분히 작은 시간증분 Δt 에 의한 증분형태로 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\int_{D_t} \Delta T_{ji} \bar{u}_{i,j} d\Omega = \int_{D_t} \rho \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\partial D_t} \Delta t_i \bar{u}_i d\Gamma \quad (7)$$

식 (7)은 미분형으로 표시된 것이 다르기는 하나, McMeeking과 Rice에 의하여 Eulerian 공식화로 이름지어 졌으며 그들의 연구에서도 이용되었다. ΔT_{ji} 와 $\Delta \sigma_{ji}$ 의 관계는 식 (6)에 증분을 취함으로써 다음과 같이 된다.

$$\Delta T_{ji} = \Delta \sigma_{ji} \delta_{jj} + \sigma_{ji} \Delta u_{k,k} - \sigma_{ji} \Delta u_{j,j} \quad (8)$$

식 (8)에는 다음의 기본적인 가정이 포함되어 있다.

$$J \approx 1, \Delta J \approx \Delta u_{k,k}, a_{j,j} \approx \delta_{jj}, \Delta a_{j,j} \approx \Delta u_{j,j}$$

여기서 a_i 는 D' 에서의 좌표이다.

식 (8)을 이용하면 내압과 같은 외력 벡터의 증분은 다음과 같이 표현 되어진다.

$$\Delta t_i = -\Delta p \bar{n}_i - p \Delta u_{k,k} \bar{n}_i + p \Delta u_{i,i} \bar{n}_i \quad (9)$$

여기서, \bar{n} 는 증분되는 동안 일정하다고 가정하며 p 는 기준상태 D' 에서의 내압이다. 이론적으로는 Total Lagrangian 공식화와 Updated Lagrangian 공식화와는 서로 차이가 없지만 Updated Lagrangian 공식화가 Total Lagrangian 공식화보다 유한요소 프로그램에 적용시키기 간단하기 때문에 Updated Lagrangian 공식화를 선택하였다.

3. 구성 방정식

Zaremba-Jauman 증분(∇)를 코오시 응력에도

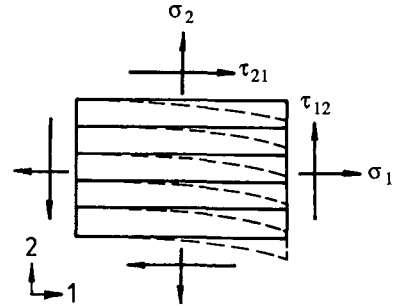


Fig. 2 Free body diagram for a rubber composite element

입 함으로써 σ_{ij} 는 다음과 같이 나타내진다.

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = \Delta \sigma_{ij} - \sigma_{ik} \mathcal{Q}_{kj} - \mathcal{Q}_{jk} \mathcal{Q}_{ki} \quad (10)$$

여기서 $\mathcal{Q}_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{j,i} - \Delta u_{i,j})$ 는 회전 텐서이다.

이때, 탄성체의 구성방정식을 증분 응력텐서와 증분 변형률텐서로 표시하면 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = E_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \quad (11)$$

여기서 $\Delta \epsilon_{kl}$ 은 변형률 증분 텐서로서 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \quad (12)$$

식 (8)에서 $\sigma_{ji} \Delta u_{k,k}$ 항에 의하여 유한요소 근사에서 강성행렬이 비대칭이 되므로 강성행렬의 대칭성을 위해 구성방정식 (11)을 다음식으로 변환한다.

$$\sigma_{ij}^{\nabla} + \sigma_{ij} \Delta u_{k,k} = \bar{E}_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \quad (13)$$

E_{ijkl} 과 \bar{E}_{ijkl} 의 차이는 $(1-2\nu)/(2G(1+\nu))$ 이지만, 타이어 해석을 위한 유한요소에서는 고무의 체적비가 코드의 체적비보다 훨씬 크며, 또한 타이어 전체 구성에서도 고무가 차지하는 영역이 크므로 타이어 구성물질의 프와송의 비가 0.5에 가까워진다. 따라서 소변형의 문제라고 해도 그 차이는 무시할 만 하다.

타이어와 같은 고무복합체에서 식 (11)에서의 E_{ijkl} 은 보통 Halpin-Tsai, Gough-Tangorra, Akasaka-Hirano⁽²³⁾등에 의하여 결정할 수 있으나, 이들식들은 변형중의 강화 코드의 굽힘효과를 고려하지 못한다. 복합판의 전단변형은 고무의 전단변형에 따라 강화코드의 굽힘을 일으키므로 이러한 변형을 고려하면 탄성 계수 E_{ijkl} 에서 특히 전단탄성계수 G 를 수정하여야 한다. 이를 위해 Fig. 2에서 보는 바와 같이 복합층 단면에 작용하는 전단력은 코드와 고무가 동일하게 분담하고 있으며

또 코드의 고무의 전단변형률이 동일하다고 가정하면 코드의 굽힘효과를 고려한 탄성계수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_m + V_c(E_c - E_m) \\ E_2 &= E_c E_m / (V_m E_c + V_c E_m) \\ G_{12} &= (2V_m G_m + 6V_c E_c R_c^2 / L_c^2) / 2 \end{aligned}$$

여기서

- V_m = 복합판에서의 고무의 체적비
- V_c = 복합판에서의 코드의 체적비
- E_m = 고무의 Young의 탄성계수
- E_c = 코드의 Young의 탄성계수
- G_m = 고무의 전단 탄성계수
- G_c = 코드의 전단 탄성계수
- L_c = 복합판에서의 코드의 길이
- R_c = 코드의 단면 반경

이때 복합평판내에서의 1방향은 코드의 방향이며, 2방향은 코드의 수직방향이다. 그리고 G_{12} 는 코드가 유한요소내에, Fig. 2와 같이 양쪽이 고정되어 있을때의 굽힘저항 항을 부가하는 전단 탄성계수이다. 코드의 방향각에 대하여 위의 탄성계수를 변환시켜 타이어 단면에서 탄성계수를 계산하면 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{E_1}{1-\nu_L\nu_T} \cos^4\theta + \frac{E_2}{1-\nu_L\nu_T} \sin^4\theta \\ &\quad + 2\left(\frac{\nu_L E_2}{1-\nu_L\nu_T} + 2G_{12}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta \\ E_T &= E_2 \\ G_{LT} &= \frac{1}{4} \left(\frac{E_1 + E_2 - \nu_L E_2}{1-\nu_L\nu_T} \sin^2 2\theta \right. \\ &\quad \left. + 4G_{12} \cos^2 2\theta \right) \\ \nu_L &= V_c \nu_c + V_m \nu_m \\ \nu_T &= \nu_L E_T / E_L \end{aligned} \tag{15}$$

여기서, E_L : 타이어 단면상에서 복합층판방향의 Young 탄성계수

E_T : 타이어 단면상에서 복합층판에 수직 방향의 Young 탄성 계수

θ : 타이어 단면에 수직인 축에 대한 강화 코드의 방향각이다.

4. 접촉 조건

서로 다른 물질의 두 물체가 접촉되는 문제는 Signorini 이후 수 십년동안 연구되어 왔으며, 변형이 작은 선형 탄성문제에서는 유일해가 존재한다는 것이 증명되었다. Fig. 3에 나타낸 바와 같이 강성

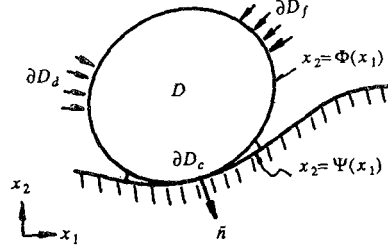


Fig. 3 Typical domain in contact with a rigid body

물체(노면)에 변형될 수 있는 물체(타이어)가 접촉하는 경우를 생각해 보자. 변형될 수 있는 물체의 표면은 다음과 같은 매개함수로 표현할 수 있다.

$$x_2 = \phi(x_1) \tag{16}$$

반면에 단단한 물체의 표면은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x_2 = \psi(x_1) \tag{17}$$

그리고 동적 접촉조건은 다음과 같은 불관통조건으로 부터 선형화 되어진다.

$$n_1 u_1(x_1) + n_2 u_2(x_1) \leq \phi(x_1) - \psi(x_1) \tag{18}$$

또는

$$u_n(x_1) - g(x_1) \leq 0$$

여기서 $g(x_1) = \phi(x_1) - \psi(x_1)$ 은 gap function이며 n_1 과 n_2 는 접촉면에 수직인 단위 벡터(\tilde{n})의 성분이다. 즉,

$$\tilde{n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} / \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + 1} \tilde{e}_1 - 1 / \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 1} \tilde{e}_2 \tag{19}$$

그러므로 두 물체가 접촉되는 표면에서 식 (18)은 다음과 같이 된다.

$$\Delta u_n - \Delta g_n = 0 \text{ on } \partial D_c \tag{20}$$

여기서 Δu_n 은 gap function의 증분 Δg_n 에 의하여 구속되는 수직변위의 증분이다.

정적 접촉조건은 다음과 같다.

$$\sigma_n \leq 0 \tag{21}$$

여기서 σ_n 은 접촉면에서의 외력의 수직성분이며 물체가 접촉이 되지 않을 경우에는 zero, 접촉이 될 경우에는 음(-)의 값이 된다. 식 (20), (21)의 정적 및 동적 접촉조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_n (u_n - g) = 0 \tag{22}$$

위의 접촉조건을 이용한 실험수 해석과 Penalty method로부터 접촉문제 공식화는 다음과 같이 유도되어진다.

$$\int_D \sigma_{ij}(u_a) \epsilon_{ij}(\bar{u}_a) d\Omega + \int_{\partial D_c} k_n (u_n - g)^+ \bar{u}_n d\Gamma$$

$$= \int_D \rho b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\partial D_f} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{u}_i \quad (23)$$

여기서 k_n 은 큰 값을 갖는 penalty 계수이다.

5. 유한요소 근사

식 (7)의 Updated Lagrangian 공식화로 부터 유도되는 공식에 응력과 변형률의 구성방정식을 대입하고 4절의 접촉 공식화를 이용하여 접촉문제를 위한 공식으로 변환하면 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{D'} (A_{ijkl} \Delta u_{k,l} + \sigma_{jk}^j \Delta u_{i,j}) \bar{u}_{i,j} d\Omega \\ & + \int_{\partial D_c} k_n (\Delta u_n - \Delta g_n)^+ \bar{u}_n d\Gamma \\ & = \int_{D'} \rho \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\partial D'} \Delta t_i \bar{u}_i d\Gamma, \\ & \quad \forall \bar{u}_i (= \delta u_i) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 \bar{u}_i 는 변위 경계 ∂D_d 에서 $\bar{u}_i = 0$ 인 임의의 가상변위 벡터이며, A_{ijkl} 은 $A_{ijkl} = \hat{E}_{ijkl} - \sigma_{ik}^i \delta_{jl} - \sigma_{jk}^j \delta_{il}$ 로 표현되는 탄성계수이다. 식 (24)의 적분식에 대한 유한요소 근사는 영역 D' 와 경계 $\partial D'$ 를 유한요소 D'_e 와 $\partial D'_e$ 로 분할하여 각 유한요소내에서 형상함수로 근사한 후, 매 단계에서 각 요소에서의 변위의 증분을 더하여 그 결과로서 생기는 행렬식의 해를 구한다.

Fig. 4는 타이어의 좌우대칭을 고려하여 오른쪽의 단면만을 713개의 유한요소와 815개의 절점으로 구성된 유한요소 모델과 타이어 설계도면을 나타낸다. 그림에서와 같이 유한요소는 5종류의 서로 다른 물질(carcass, belt, bead, groove, rubber)로 구성되어 있으며 각 물질의 탄성계수는 제3장에서 계

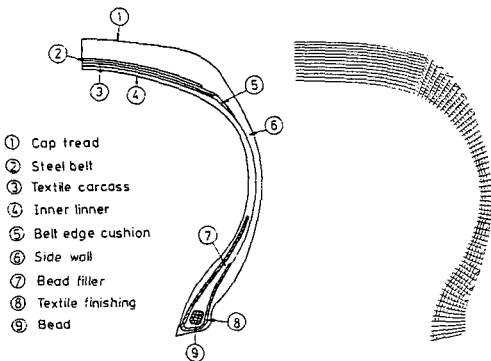


Fig. 4 Cross section and finite element model of radial tire

Table 1 Material properties of component

Component Properties	Carcass	Belt	Bead	Tread
E_c (kgf/mm ²)	405.10	7388.0	7388.0	
E_r (kgf/mm ²)	0.56	0.56	0.56	0.56
ν_c	0.3	0.3	0.3	
ν_r	0.49	0.49	0.49	0.49
Volume fraction (V_r)	0.74	0.86	0.0	1.0

산하였다. 타이어의 groove 부분은 유한요소에서 매우 작은 탄성계수를 갖는 것으로 가정하였으며 타이어 각 구성 물질의 기본적 물성치를 Table 1에 수록 하였다.

변형된 형상 및 이에 따르는 응력분포의 계산을 위해 타이어의 기하학적 비선형성을 고려하여 프로그램의 계산과정을 여러 중분단계로 나누어 계산한 결과 중분단계가 많을 수록 실험치에 가까운 결과를 얻을 수 있었으며, 본 연구에서는 5단계의 증분 해석으로 실험치에 근사한 해를 구했으며 계산시간도 단축할 수 있었다.

6. 수치해석 결과 및 고찰

유한요소법을 이용한 타이어의 응력해석을 위해 가상일의 원리로부터 적분형태의 함수(weak form)를 만든후 경계조건을 대입하고, 접촉문제인 경우 접촉공식화를 이용하여 유한요소 근사를 하였다. 유한요소 해석은 타이어 단면에 대해 평면변형 문제(plane strain problem)로 가정하여 계산하였으며, 이때 타이어가 원형 셀 구조물임을 고려하여 반경방향으로의 변형에 따른 복합층판의 변형저항을 해석에 부가하였다. 이때 코드-고무 복합체와 같은 이방성물질의 탄성계수 계산을 위해 본 연구에서 제안한 식과 Halpin-Tsai식등과 같은 널리 알려진 몇가지 종류의 식을 이용하였다.

내압문제에 대한 해석결과는 본 연구에서 제안한 식을 이용한 결과와 앞서 언급한 몇 종류의 식을 이용한 수치결과 및 실험치를 비교하였으며, 또한 제안식을 적용하여 타이어 벨트각도의 변화에 따른

Table 2 Deformed results at section height & section width W.R.T. various material property equations

Deformation Equations	Deformation of S.H (mm)	Deformation of S.W (mm)
Halpin-Tsai	3.95	4.55
Qough-Tangorra	3.5	7.0
Akasaka-Horano	4.55	6.3
Proposed	5.6	4.56
Experiment data	3.0	5.5

응력분포를 도시하였다. 각 경우의 응력분포에 대한 contour line은 6개로 지정하여 한개의 line에 대한 값의 차이는 1/5씩 증감되며 그림에서는 최대 응력치를 나타냈다. 수치해석 결과, 변위변형은 Table 2에 나타낸바와 같이 본 연구에서 제안한 식에 의한 결과가 실험치와 가장 근접함을 알수 있

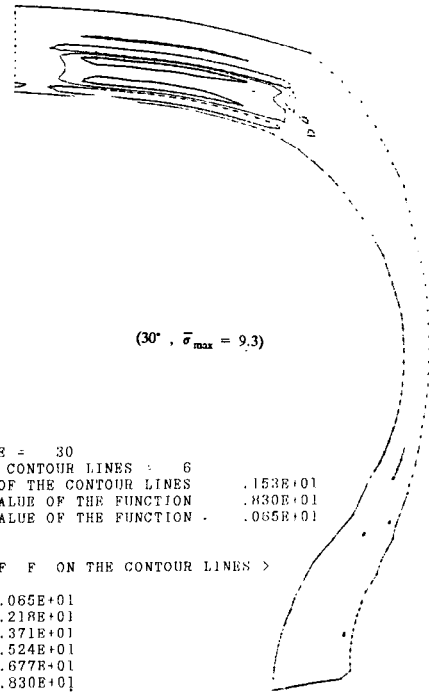


Fig. 5(b) Equivalent stress distribution in tire inflation problem (Belt angle : 30°, Stress : kgf/mm²)

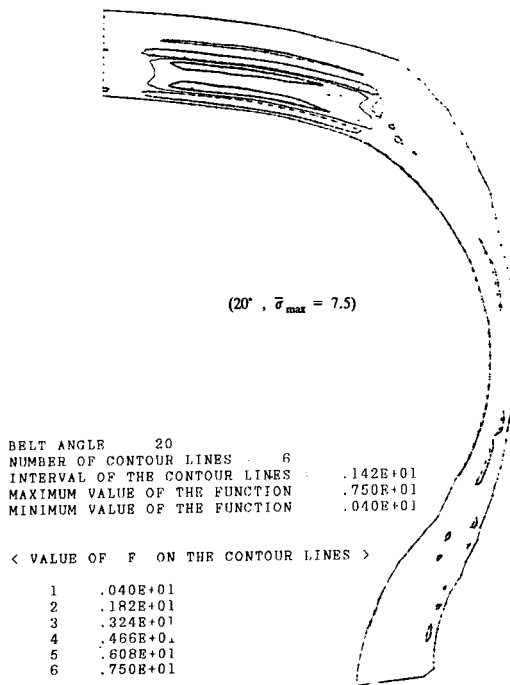


Fig. 5(a) Equivalent stress distribution in tire inflation problem (Belt angle : 20°, Stress : kgf/mm²)

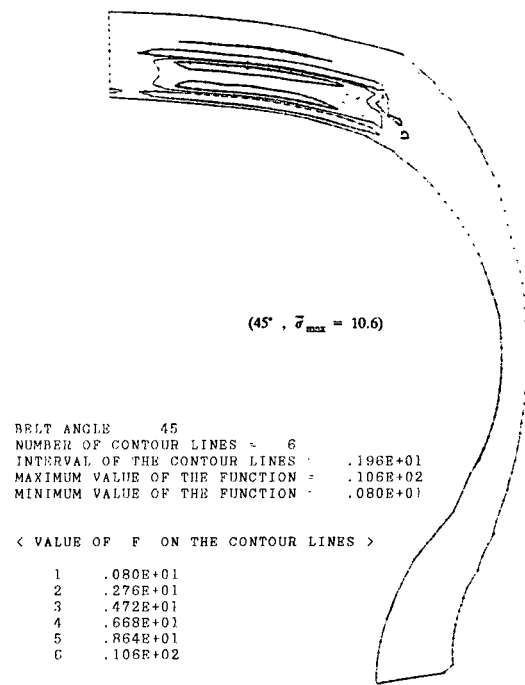


Fig. 5(c) Equivalent stress distribution in tire inflation problem (Belt angle : 45°, Stress : kgf/mm²)

다. 단면높이의 범위에서 계산치와 실험치 사이의 편차는 타이어 단면모델을 평면변형률 문제로 고려하였기 때문으로 생각된다. 그리고 타이어 벨트각도의 변화에 따른 해석결과, Fig. 5에 나타낸 바와 같이 벨트각도 20°, 30°, 45°중에서 20°일때가 최대 상당응력이 최소가 되어 내압만을 고려할때에는 벨트각도 20°일때가 세가지중 가장 좋은 설계임을 알 수 있었다.

접지문제에 대한 계산결과는 본 연구에서 제안한 식을 이용한 경우와 내압문제에서와 마찬가지로 물성계산을 위해 다른 몇 종류의 식을 이용한 결과 및 실험치를 비교하였으며, 또한 제안식을 이용하여 벨트각도의 변화에 따른 응력계산과 일정한 벨트각도하에서 외부하중의 변화에 따른 응력을 계산하여 contour line으로 비교, 도시 하였다. 타이어 접지문제는 자동차의 하중이 타이어의 림을 통하여 비드부에 전달 되어지므로 유한요소 해석시 비드부의 각 절점에 수직방향으로 하중을 작용하여 계산하였으며, 실험방법으로는 정하중 시험기에 타이어를 장착한후 수직하중을 가함으로써 수직 및 수평 변위를 측정하여 그 결과를 Table 3에 나타냈다. 내압문제의 경우와 마찬가지로 Table 3에서 보는 바와 같이 단면폭 범위에서 계산치와 실험치의 차이는 단면모델을 평면변형률 문제로 고려 하였다는점과 대변형에 따른 기하학적 비선형성에 기인하는 것으로 생각된다. 해석결과 벨트층 선단부의 응력 집중 형상은 Fig. 6의 (a), (b), (c), (d)에서 보는 바와 같이 본 연구에서 제안한 식을 이용하였을 때에

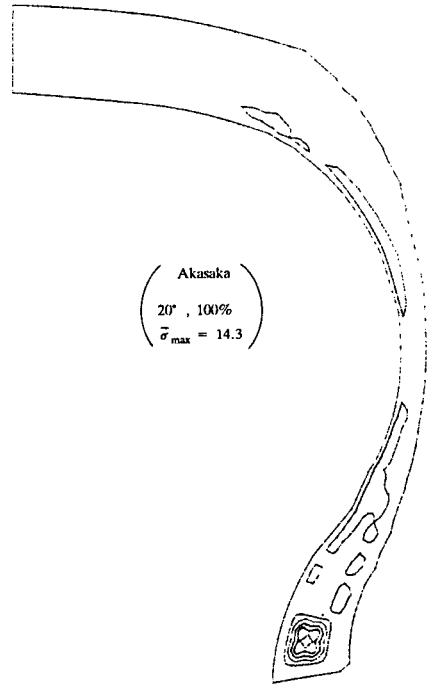


Fig. 6(a) Equivalent stress distribution in tire contact problem (Belt angle, Load, Stress : kgf/mm²)

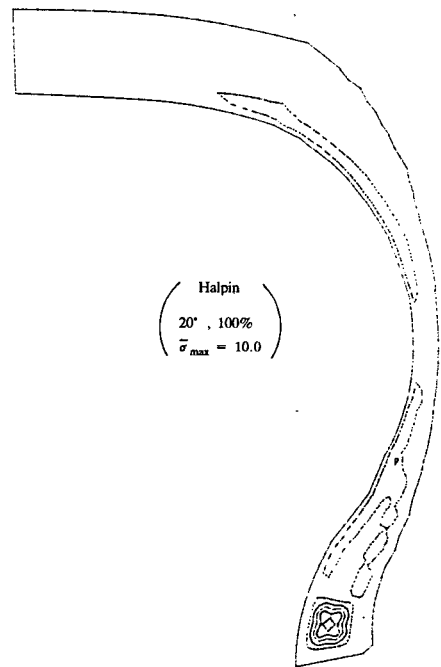


Fig. 6(b) Equivalent stress distribution in tire contact problem (Belt angle, Load, Stress : kgf/mm²)

Table 3 Deformed results at section height & section width W.R.T. various material property equations

Deformation Equations	Deformation of S.H (mm)	Deformation of S.W (mm)
Halpin-Tsai	19.1	7.2
Gough-Tangorra	22.3	9.93
Akasaka-Hirano	21.2	8.85
Proposed	18.7	7.7
Experimental Data	19.0	5.25

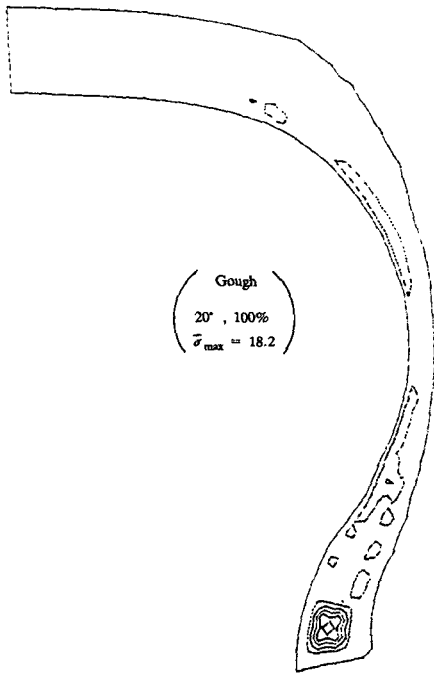


Fig. 6(c) Equivalent stress distribution in tire contact problem (Belt angle, Load, Stress : kgf/mm²)

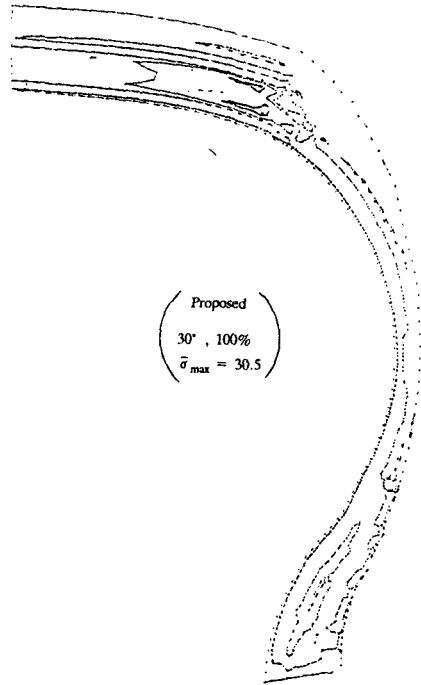


Fig. 6(e) Equivalent stress distribution in tire contact problem (Belt angle, Load, Stress : kgf/mm²)

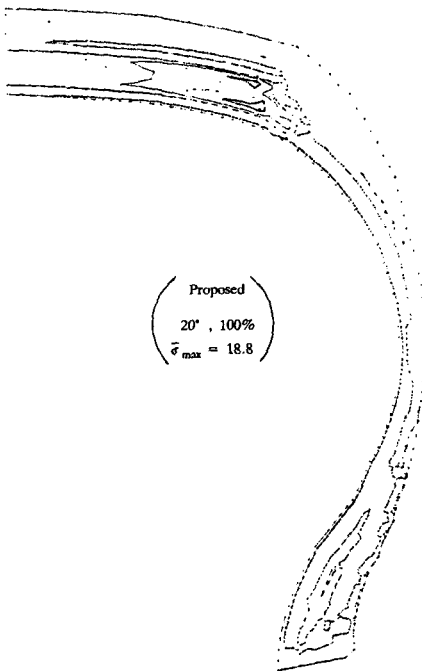


Fig. 6(d) Equivalent stress distribution in tire contact problem (Belt angle, Load, Stress : kgf/mm²)

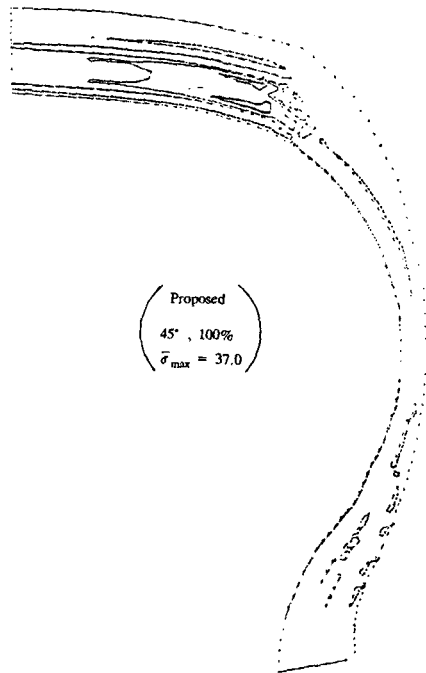


Fig. 6(f) Equivalent stress distribution in tire contact problem (Belt angle, Load, Stress : kgf/mm²)

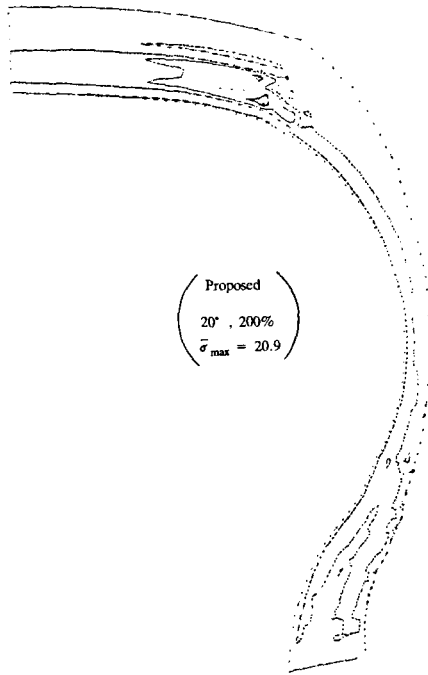


Fig. 6(g) Equivalent stress distribution in tire contact problem (Belt angle, Load, Stress : kgf/mm²)

만 나타났는데 이는 본 연구에 적용된 물성계산 방법 및 프로그램의 타당성을 입증해 준다. 이 응력 분포로부터 벨트층 선단부에서는 벨트와 같은 코드 강화층이 없어서 모델단면의 중립축이 갑자기

불연속이 되어 응력집중을 일으킨다. 이 사실은 타이어가 노면에 접지되면서 변형되는 동안에 전단변형이 크게 일어나고, 벨트층과 고무층간에 응력이 집중되어 실제 타이어에서의 박리현상의 주요 원인이 됨을 알수 있었다.

또한 벨트각도의 변화에 따른 응력해석 결과는 타이어 내압작용 문제에서와 마찬가지로 Fig. 6의 (d), (e), (f)에 나타낸 바와 같이 벨트각도 20°, 30°, 45°중에서 20°일때 최대상당응력이 최소가 된다는 것을 알수 있다. 이 결과는 Fig. 6의 (g)와 비교하여 보면 벨트각도가 20°인 경우에는 외부하중이 200%일 때에는 최대상당응력치가 크게 증가하지 않아 좋은 설계임을 알 수 있다.

위의 접지문제 해석결과를 종합하여 일정한 외부하중하에서 벨트각도의 변화에 따른 접지압과, 일정한 벨트각도하에서 외부하중의 변화에 따른 접지압 분포를 Fig. 7에 나타냈다. 그림에서 보는 바와 같이 유한요소 모델에서 groove가 있는 부분의 접지압이 거의 zero가 되었다. 외부하중의 변화에 따른 해석결과는 Fig. 7 (a)에서 알수 있는 바와 같이 하중이 200%가 되었을 때 접지 선단부의 접지압이 크게 증가하여 응력이 집중되고 접지면적이 100% 하중에 비하여 증가하는 바, 이것은 타이어 쇼울더 부분에서의 편마멸 현상의 원인이 됨을 알수 있었다. 그리고 벨트각도의 변화에 따라 벨트각도가 20°, 30°일 경우 접지 선단부에서 접지압은 완만하게 작

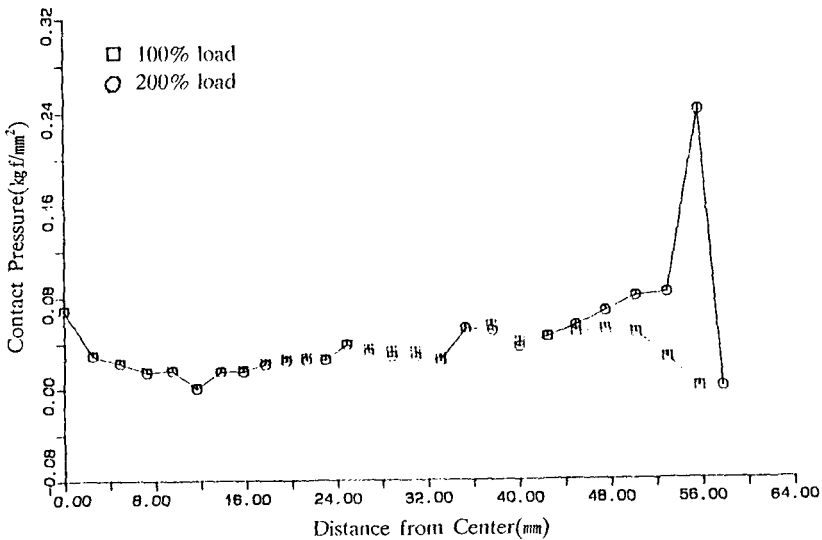


Fig. 7(a) Contact pressure along contact surface (Belt angle : 20°)

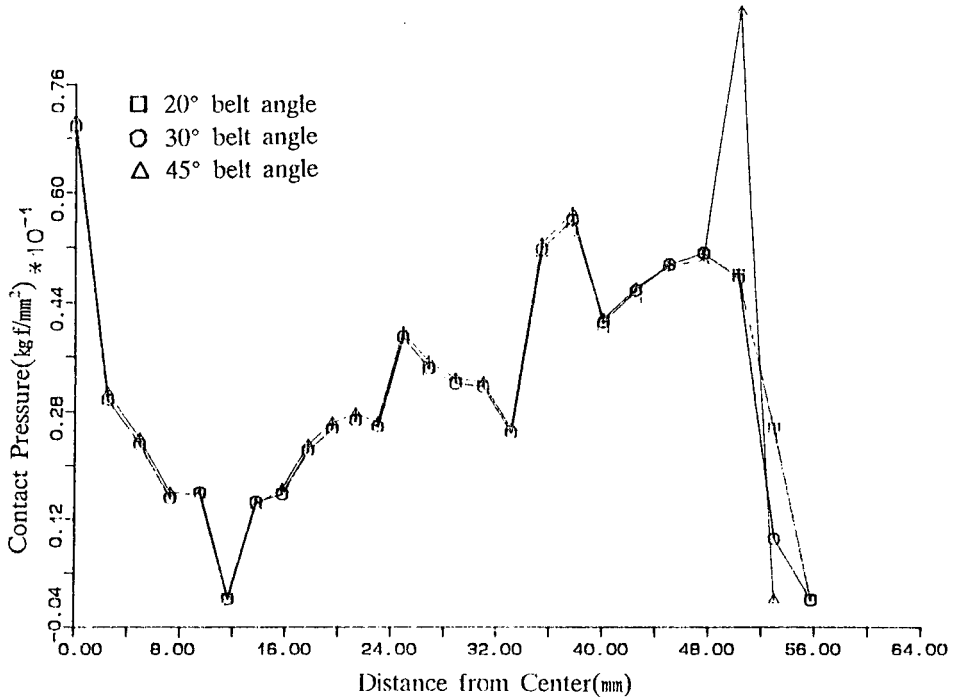


Fig. 7(b) Contact pressure along contact surface (Load : 100%)

아졌지만 벨트각도가 45°일 경우는 크게 증가하다가 작아졌다. 이 결과로부터 45°의 벨트각도 설계는 좋지않음을 알수 있으며, 벨트각도 20°일때가 세가지중 가장 좋은 설계임을 알 수 있다.

7. 결 론

전술한 바와 같이 탄성계수의 계산식과 유한요소 접촉문제 공식화를 개발하여 타이어 내압작용 문제와 접지문제에 적용한 결과 제안한 식과 접촉문제 공식화의 타당성과 유용성을 검증할수 있었다. 즉, 탄성계수를 결정할때 보강제의 굽힘효과를 고려하여 제안한 유효 탄성계수 계산식이 타이어의 변형 및 응력을 정확히 묘사할수 있다는 것을 알았다. 또한 본 연구에서 채택, 유도한 Updated Lagrangian 유한요소법이 접촉문제와 함께 타이어의 응력 해석에 유효하게 적용될수 있음을 입증하였다.

계산결과로부터 벨트 선단부의 응력집중이 벨트 층과 고무층 사이의 박리의 발생원인임을 알 수 있었으며, 또한 보통의 하중보다 큰 하중을 받을때 접지 선단부에서 접지압이 크게 증가하는 사실로써

쇼올더 편마모의 원인을 설명할 수 있다. 그리고 벨트각도의 변화가 응력분포 및 접지압에 미치는 영향을 상세히 파악할수 있었으며 적정 벨트각도를 구할수 있었다. 요컨대, 본 연구에서 개발한 유한요소 프로그램을 이용하여 접지문제를 고려하였을 때의 최적각도를 포함한 최적설계를 수행할 수 있게 되었다.

참 고 문 헌

- (1) James, R., 1983, "Desk-Top Personl Computer for Finite Element Post-Processing", Computers & Structures, Vol. 17.
- (2) Tavazza, G., Cervi, E., 1980, "Finite Element Techniques to Design Tyres", ISATA, 80.
- (3) Tielking, J.T., 1984, "A Finite Element Tire Model", Tire Science and Technology, Vol. 11.
- (4) Rothert, H., Idelberger, H., Jacobi, W., Laging, G., 1984, "On the Finite Element Solution of Problem", Nuclear Engineering and Design 78.
- (5) Gough, V.E., 1967, "Stiffness of Cord and Rubber Constructions", Tyre Technical Division.
- (6) Youshimure, N., "The Application of Finite Ele-

- ment Method to Tire Design", Bridgestone Corporation
- (7) Tielking, J.T., and Schapery, R.A., 1981, "A Method for Shell Contact Analysis", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 26.
- (8) Samuel K. Clark and Richard N. Dodge, 1985, "Tyre Modelling and Contact Problems", Computers & Structures, Vol. 20.
- (9) Oden, J.T. and Kikuchi, N. "Use of Variational Methods for the Analysis of Contact Problems in Solid Mechanics", The University of Texas.
- (10) Endo, T., Oden, J.T., Becker E.B., and Miller, T., 1984, "A Numerical Analysis of Contact and Limit-Point Behavior in a Class of Problems of Finite Elastic Deformation", Computer and Structures, Vol. 18.
- (11) Noor Ahmed K. and Tanner, John A. 1985, "Tire Modelling and Contact Problems", Computer & Structures, Vol. 20.
- (12) Ridha, R.A. Clark, S.K., "Tire Stress and Deformation", Mechanics of Pneumatic Tires.
- (13) Chang, J.P. Satyamurthy, K. & Tseng, N.T., 1987, "An Efficient Approach for the Three Dimensional Loaded Tire Analysis Using Finite Element Method", Tire Science and Technology.
- (14) Rothert, H. Idelberger, H. Jacobi, W. Laging, G. 1984, "On the Finite Element Solution of the Three Dimensional Tire Contact Problem", Nuclear Engineering and Design 78.
- (15) Carl M. Andersen, 1981, "Deep Anisotropic Shell Program for Tire Analysis", NASA Contractor Report 3483.
- (16) Ahmed K. Noor, C.M. Andersen, "Finite Element Modelling and Analysis of Tires"
- (17) Eskinazi, J. De and Ridha, R.A. 1982, "Finite Element Analysis of Giant Earthmover Tires", The General Tire & Rubber Company,
- (18) Kennedy, R.H., Patel, H.P., and McMinn, M.S., 1981, "Radial Truck Tire Inflation Analysis", Rubber Chemistry and Technology, Vol. 54.
- (19) Posfalvi, O., 1974. "The Poisson Ratio for Rubber-Cord Composites", Rubber Chemistry and Technology, Vol. 50.
- (20) Yong, K.N., Fattah E.A., and Boonsinsuk, P., 1978, "Analysis and Prediction of Tyre-Soil Interaction and Performance Using Finite Elements", Journal of Terramechanics, Vol. 15.
- (21) Bo Haggblad and Jan Anders Sundberg, 1983, "Large Strain Solutions of Rubber Components", Computers & Structures, Vol. 17.
- (22) Paul S. Shoemaker, 1984, "The Engineering by Finite Element Modelling", The General Tire & Rubber Company.
- (23) Samuel, K. Clark, "Theory of the Elastic Net Applied to Cord-rubber Composite", Cord-Rubber Composite, Vol. 56.

부 록

1. Halpin-Tsai Equations

$$E_1 = E_c V_c + E_r(1 - V_c)$$

$$E_2 = E_r(1 + 2 V_c) / (1 - V_c)$$

$$G_{12} = \{G_r[G_c + G_r + (G_c - G_r)V_c]\} / [G_c + G_r - (G_c - G_r)V_c]$$

$$\nu_{12} = \nu_c V_c + \nu_r(1 - V_c)$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} E_2 / E_1$$

2. Gough-Tangorra Equations

$$E_1 = E_c V_c + E_r(1 - V_c)$$

$$E_2 = \{4E_r(1 - V_c)[E_c V_c + E_r(1 - V_c)]\} / [3E_c V_c + 4E_r(1 - V_c)]$$

$$G_{12} = G_r(1 - V_c)$$

$$\nu_{12} = 0.5$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} E_2 / E_1$$

3. Akasaka-Hirano Equations

$$E_1 = E_c V_c$$

$$E_2 = 4E_r/3$$

$$G_{12} = G_r$$

$$\nu_{12} = 0.5$$

$$\nu_{21} = 0$$