

<論 文>

박리-재부착 이후의 재발달 난류경계층(Ⅱ)

—난류 모델들에 관한 고찰—

백 세 진* · 유 정 열**

(1989년 4월 18일 접수)

Redeveloping Turbulent Boundary Layer after Separation-Reattachment(Ⅱ)

—A Consideration on Turbulence Models—

Se Jin Baik and Jung Yul Yoo

Key Words : Redeveloping Turbulent Boundary Layer(재발달 난류 경계층), Turbulent Energy Balance(난류 에너지 균형), Shear Stress Balance(전단 응력 균형) $k-\epsilon$ Model ($k-\epsilon$ 모델), Reynolds Stress Model(레이놀즈 응력 모델)

Abstract

A consideration on the turbulence models for describing the redeveloping turbulent boundary layer beyond separation-reattachment in the flow over a backward-facing step is given through experimental and numerical studies. By considering the balance among the measured values of respective terms in the transport equations for the turbulent kinetic energy and the turbulent shear stress, the recovering process of the redeveloping boundary layer from non-equilibrium to equilibrium has been investigated, which takes place slowly over a substantial distance in the downstream direction. In the numerical study, the standard $k-\epsilon$ model and the Reynolds stress model have been applied to two kinds of flow regions, one for the entire downstream region after the backward-facing step and another for the downstream region after reattachment. Then the results are compared to a meaningful extent, with the experimental values of the turbulent kinetic energy k , the turbulent energy production term P , the dissipation term ϵ and so forth. Particularly, re-examining the definition of the important constant C_μ of the $k-\epsilon$ model, a necessity for a new modelling has been brought forward, which can be also applied to the case of the non-equilibrium turbulent flow.

기 호 설 명

C_1, C'_1 : 레이놀즈 응력모델에서 사용되는 상수
 C_2, C'_2 : 레이놀즈 응력모델에서 사용되는 상수
 C_ϕ, C_s, C_ϵ : 레이놀즈 응력모델에서 사용되는 상수

C_{ϵ_1} : ϵ 의 생성항 계수
 C_{ϵ_2} : ϵ 의 소멸항 계수
 C_μ : Eddy 확산률에 관련된 $k-\epsilon$ 모델 상수
 f : 보정 함수
 h : 계단의 높이
 k : 난류 운동에너지
 l : 특성난류 길이 척도
 n : 벽에 수직인 단위 벡터

* 서울대학교 대학원, 현재 삼성종합기술원 전자기기 연구소

** 정회원, 서울대학교 공과 대학 기계공학과

P	: 난류 운동에너지의 생성
β	: 요동 압력
S	: 전달방정식에서의 원천항
U, u	: x 방향의 평균속도와 요동속도
U_0	: 기준속도
U_i, u_i	: 속도 벡터의 평균속도와 요동속도 성분
u_r	: 마찰속도
V, v	: y 방향의 평균속도와 요동속도
w	: z 방향의 요동속도
x, y	: 가로 좌표와 세로 좌표
δ_{ij}	: Kronecker delta
ϵ	: 난류 운동 에너지 소산율
k	: von-Karman 상수
μ, μ_{eff}, μ_t	: 점성 계수, 유효점성계수 $\mu + \mu_t$, 난류점성계수
ν_t	: Eddy 점성 계수
ϕ_{ij}	: 압력-변형률 상관 관계항
ρ	: 밀도
σ_ϵ	: $k-\epsilon$ 모델의 ϵ 방정식에서의 Prandtl수
σ_k	: $k-\epsilon$ 모델의 k 방정식에서의 Prandtl수
τ	: 전단응력

하첨자

i, j	: 텐서 성분
t	: 난류
w	: 벽면에서의 값

상첨자

$+$: 내부 영역 변수로 무차원화된 변수
-----	----------------------

1. 서 론

박리와 재부착 영역을 가지는 유동장은 디퓨저, 연소기, 유체기계, 익형 및 건물 주위의 유동 등에서 흔히 관찰될 수 있으며, 실제 공학응용에 있어서 매우 중요하므로 오래전부터 많은 연구의 대상이 되어 왔다. 그 중에서도 후향 계단 유동은 기하학적인 모양이 간단하고, 박리선이 거의 직선이며, 박리점이 모서리에 고정되어 유동이 비교적 정상상태를 유지하는 장점을 가지고 있다. 이와 같은 특성때문에 후향 계단을 지나는 박리-재부착 유동은 여러가지 난류모델을 이용한 수치계산방법의 시험모형 중의 하나로 자주 채택되고 있다.

후향 계단 또는 수직 벽 위를 지나는 유동과 같은 재순환 유동을 포함하는 난류유동의 수치해석적

연구에서는 표준 $k-\epsilon$ 모델 뿐 아니라 여러가지 형태로 수정된 $k-\epsilon$ 모델 및 레이놀즈 응력모델들이 흔히 채택된다. 수정된 $k-\epsilon$ 모델들 중에는 단순히 ϵ 방정식만을 수정하거나⁽¹⁾, 유선곡률을 고려하는⁽²⁾ 것들도 있다. 특히 2차원 수직벽을 지나는 재부착 박리 전단층의 난류구조에 관하여 수행되었던 일련의 연구결과^(3,4)에 근거하여, 3차확산 이동 상관관계의 시간 척도를 속도시간척도 및 곡률시간척도의 비의 함수로 표시하여 모델상수들을 수정함으로써, 2차원 재순환 난류유동을 보다 현실적으로 예측할 수 있는 모델^(5,6)로 제안되었다. 또한 레이놀즈 응력방정식들을 대수식의 형태로 나타낸 대수 응력 모델⁽⁷⁾ 및 비분방정식의 형태로 나타낸 레이놀즈 응력 모델^(8,9)들이 채택되기도 한다. 최근에는 박리 영역과 재부착영역에서 서로 다른 난류모델을 이용하는 zonal modeling⁽¹⁰⁾이 사용되고 있으며, 3차모델을 사용하는 방법⁽¹¹⁾도 소개되고 있다. 여하튼 후향계단 유동에서는 경계층 유동, 박리전단 유동, 재부착, 재순환 유동 및 재발달 경계층 유동 등 여러 형태의 난류 유동이 나타나므로 이를 수치해석적으로 취급하는 것이 그리 용이하지는 않다.

지금까지의 박리-재부착 유동의 계산은 대체로 다음의 몇가지 공통적인 경향을 가진다. 재부착길이는 $k-\epsilon$ 모델의 경우는 실험치에 비해 20%이상 짧게 계산되며, 레이놀즈응력 모델 혹은 대수응력 모델의 경우에서도 짧게 계산된다. 벽면의 정압 분포는 대체로 실험치와 잘 일치하며, 박리전단층에서의 전단응력은 실험치보다 크게 계산된다. 그리고 재부착길이의 계산치가 실험치와 다르므로 재부착영역이후의 재발달 영역은 정확한 수치계산을 기대하기 어려우며, 먼 하류까지의 재발달 경계층에 관한 자료는 제시되지 않고 있다.

본 연구의 목적은 첫째, 재발달 경계층에서의 난류에너지 및 난류전단응력에 대한 전달방정식들의 각 항의 추정자료들을 보다 정확히 제시하고 항들간의 균형을 비교 평가함으로써 비평형 유동으로부터 평형유동으로 회복되는 과정을 검토하고, 둘째, 대표적인 난류 모델들로서 표준 $k-\epsilon$ 모델 및 레이놀즈 응력 모델을 사용한 수치계산을 수행함으로써 이와같은 모델들이 비평형 유동을 서술함에 있어 발생할 수 있는 문제점들을 고찰하는데 있다*.

*. 본 연구에서 제시되는 모든 추정치들은 시험부 크기가 900mm×900mm×3600mm인 폐쇄순환식 풍동에서 수행된 높이 $h=20$ mm인 후향 계단을 지나는

+ $\overline{v^2}$)으로 취하였으며⁽¹⁵⁾, 공간 미분은 최소 제곱 법으로 근사식을 구한 후 미분을 취하였다. Fig. 1에는 재부착 이후의 하류영역내의 몇 위치에서 측정 및 연산된 식 (1)의 각 항의 크기를 나타내었다.

$x/h=7$ 에서는 대류항과 확산항이 매우 커 상류에서 발달된 혼합층의 성격을 나타냈으며, 또 생성항은 $y/h=0.3$ 에서 최고치를 보이며 벽근처에서는 매우 작은 값을 보였다. 그러나 벽근처에서 소산항은 상당히 크며 확산항과 균형을 이루어 비평형을 나타냈다. $x/h=10$ 에서도 비슷한 경향을 보였으며, 하류로 갈수록 벽에서의 생성항이 회복되어 $x/h=30$ 에서는 벽근처에서 최대치를 보였다. 특히 $x/h=15$ 까지는 보통 난류 경계층과는 달리 벽 근처에서 생성항 $(\overline{u^2} - \overline{v^2}) \frac{\partial U}{\partial x}$ 의 크기가 상당히 클 수 있다. $x/h=50$ 에서는 생성항과 소산항의 크기가 균형을 이루어 평형상태를 유지하였으며,

전형적인 평형 난류 경계층에서의 분포와 거의 유사하였다.

난류 전단응력 전달방정식은 다음과 같으며,

$$\left(U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right) + \left(\overline{u^2} \frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

convection generation

$$\left(\frac{\partial \overline{u^2 v}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv^2}}{\partial y} \right)$$

turbulent diffusion

$$-\frac{1}{\rho} \rho \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{pv}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{pu}}{\partial y} \right) = 0$$

pressure-strain pressure-diffusion

(2)

Fig. 2에서는 재부착 이후의 하류 영역 내의 몇 위치에서 측정 및 연산된 위 식의 각항의 크기를 나타내었다. 대류항, 생성항, 난류 확산항은 실험으로부터 구하였고, 압력 확산항은 무시하였으며, 압력 변형항은 식 (2)에서 다른 항들과의 균형으로

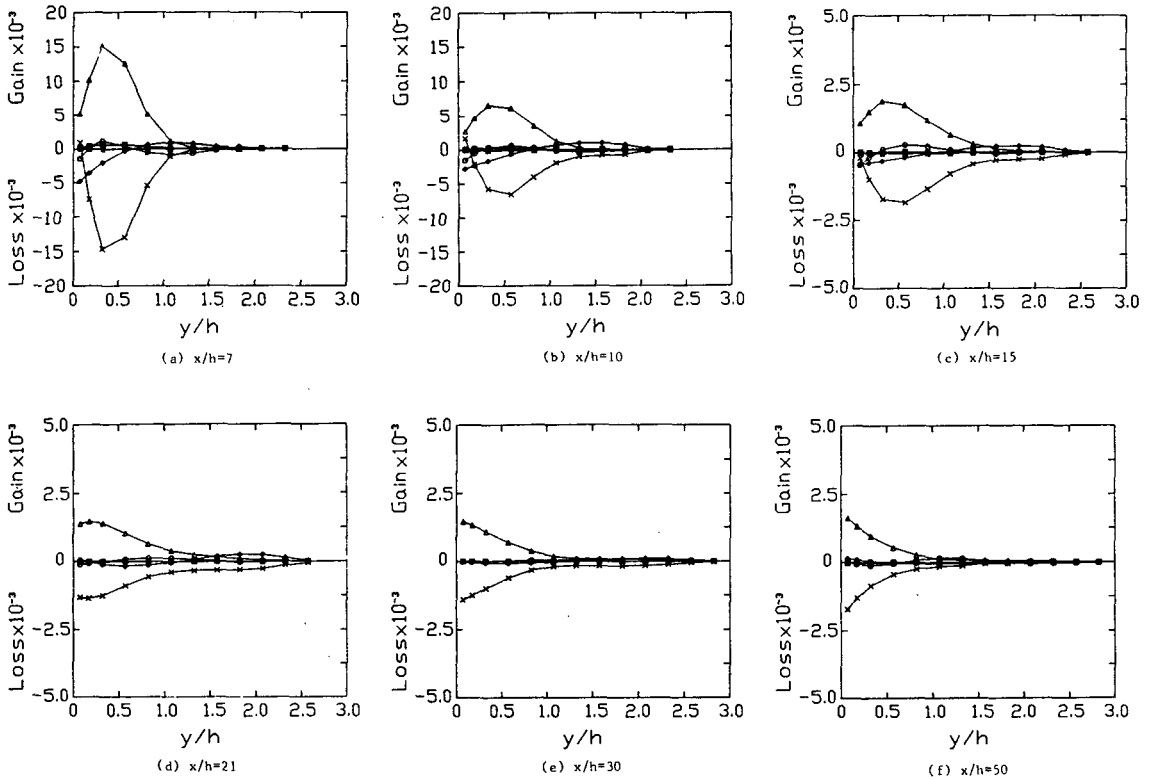


Fig. 2 Shear stress balances, where all terms are non-dimensionalized by U_0^3/h

○ : $U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y}$, □ : $\overline{u^2} \frac{\partial V}{\partial x}$, △ : $\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y}$, ⋈ : $\frac{\partial \overline{u^2 v}}{\partial x}$, ◇ : $\frac{\partial \overline{uv^2}}{\partial y}$, × : $\frac{1}{\rho} \rho \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right)$ (a) $x/h=7$, (b) $x/h=10$, (c) $x/h=15$, (d) $x/h=21$, (e) $x/h=30$, (f) $x/h=50$

부터 구하였다⁺. $x/h=7$ 에서는 생성항과 압력-변형률항(pressure-strain)은 $y/h=0.3$ 인 벽에서 떨어진 곳에서 최대치를 보였으며, 벽 근처에서는 생성항과 확산항이 균형을 이루었다. 하류로 갈수록 생성항과 압력-변형률항의 최대치의 위치가 점점 벽에 가까워졌으며, $x/h=30$ 에서는 대류항과 확산항의 크기는 줄어 들어 생성항과 압력 변형률의 두 항이 거의 균형을 이루었고, $x/h=50$ 에서는 전형적인 평형 난류 경계층 분포로 회복이 되었다.

3. 난류 모델

여기서는 몇가지 난류모델들을 채택한 수치해석을 수행하고 그 결과를 본 연구의 실험 결과들과 비교함으로써, 보다 개선된 모델링 또는 수치해석에 대한 기초를 마련한다.

3.1 $k-\epsilon$ 모델

난류에너지 k 에 대한 전달방정식에서 확산항은 k 의 구배에 비례한다는 구배가정을 채택하고, 난류에너지 k 와 그 소산률 ϵ 을 사용하여 등방성 확산계수 ν_t 를 표시하면 다음과 같이 쓸 수 있다⁽¹⁶⁾.

$$-u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \tag{3}$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \tag{4}$$

여기서 σ_k 는 실험적으로 구한 확산상수이다. 난류에너지 소산율 ϵ 의 전달방식은 매우 복잡한 항들을 포함하고 있고, 또 각 항들의 거동은 잘 알려져 있지 않으므로 수치 해석적으로 취급될 수 있는 방정식으로 바꾸기 위해서는 여러가지 모델가정을 거쳐야한다. 통상적으로는 확산항에 대하여 구배가정을 하며, 생성항과 소산항은 합쳐서 모델가정을 함으로써 모델화된 난류에너지 k 와 그 소산율 ϵ 의

⁺ 난류 확산항에 관련된 3차 모멘트의 측정은 실제 요동신호 u, v 를 $24\mu s$ 간격으로 1000번 받아들인 후 서로 곱하여 평균값을 구하였으며, 이를 5번 반복하여 평균하였다. 3차 모멘트는 그 크기가 작은 벽 근처와 경계층 바깥영역에서 분포의 편차가 50%정도로 컸으며, 오차도 그 정도된다. 그러나 3차 모멘트의 크기가 큰 곳에서는 분포의 편차로 보아 오차가 20% 이내 이다. 3차모멘트를 이용하여 구한 전단응력의 난류확산항은 다른 항에 비해 오차가 큼을 알 수 있다. 보다 상세한 실험방법은 참고문헌 (12)를 참고하기 바람이며, 여기서는 주요 결과들에 대한 논의에 국한 한다.

전달방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{D}{Dt}(\rho k) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P - \rho \epsilon \tag{5}$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + (C_{\epsilon 1} P - C_{\epsilon 2} \rho \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \tag{6}$$

여기서 P 는 생성항이며 다음과 같다.

$$P = \mu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] \right] \tag{7}$$

$k-\epsilon$ 모델에서 사용되는 상수는 Table 1에 표시하였다.

3.2 레이놀즈 응력 모델(Reynolds Stress Model)

레이놀즈 응력 방정식에서 모델링이 필요한 항은 확산항, 압력-변형률 상관관계항 및 소산항이며 확산항에서 분자확산항과 압력-속도 상관관계항을 무시하면⁽¹⁷⁾ 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (U_k \overline{u_i u_j}) = P_{ij} + R_{ij} + D_{ij} - \epsilon_{ij} \tag{8}$$

여기서 각 항은 다음과 같다.

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) : \text{생성항}$$

$$R_{ij} = \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) : \text{압력-변형률 상관관계항}$$

$$D_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j u_k}) : \text{확산항}$$

$$\epsilon_{ij} : 2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) : \text{소산항}$$

확산항 D_{ij} 는 난류요동에 의한 확산만을 고려하여 다음과 같이 모델링 하였다⁽¹⁷⁾.

$$D_{ij} = C_\epsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{k}{\epsilon} \left(\overline{u_i u_l} \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_l} \right) \right] \tag{9}$$

Table 1 Values of the coefficients in the $k-\epsilon$ model

Coefficient	Value	Basis for determination
C_μ	0.09	Equilibrium shear layer
$C_{\epsilon 1}$	1.44	Boundary layers
$C_{\epsilon 2}$	1.92	Homogeneous flows
σ_k	1.0	Computer optimization
σ_ϵ	1.3	Computer optimization

소산항 ϵ_{ij} 에 대해서는 소산은 등방성으로 일어난다고 가정하여 다음과 같은 모델을 사용한다⁽¹⁸⁾.

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \quad (10)$$

압력-변형률항은 벽으로부터 먼 곳과 가까운 곳을 나누어 취급한다. 먼저 벽으로부터 먼 곳에서는 다음과 같이 요동속도들만의 관계에 의한 $(\phi_{ij} + \phi_{ji})_1$ 및 평균 변형률과 요동속도와와의 관계에 의한 $(\phi_{ij} + \phi_{ji})_2$ 을 결합시킴으로써 모델링한다⁽¹⁷⁾.

$$(\phi_{ij} + \phi_{ji})_1 = -C_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\phi_{ij} + \phi_{ji})_2 = & -\frac{(C_2+8)}{11} (P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}) \\ & - \frac{(30C_2-2)}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{(8C_2-2)}{11} (Q_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $C_1=1.5$, $C_2=0.4$, P 는 난류에너지의 생성율과, Q_{ij} 는 다음과 같다.

$$Q_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

$(\phi_{ij} + \phi_{ji})_1$ 은 레이놀즈응력의 국소등방성의 정도를 나타내는 것으로서 등방성으로의 회귀에 기여하며, $(\phi_{ij} + \phi_{ji})_2$ 는 생성항의 비등방성을 의미하며 급격한 변형이 존재하는 경우에 그 영향이 커진다⁽¹⁷⁾.

벽근처에서는 벽에 수직한 방향의 법선 레이놀즈 응력 성분이 평행한 방향의 법선 성분에 비해 현저히 작아지며, 난류에너지에 대한 레이놀즈 전단응력의 비 $\left(-\frac{uv}{k} \right)$ 도 벽으로부터 먼 곳에 비해 작아진다. 이 현상은 압력-변형률항이 벽의 영향을 받기 때문이며, 이 벽의 영향은 다음 항을 압력-변형률항에 더하여 수정함으로써 고려한다⁽⁷⁾.

$$\begin{aligned} (\phi_{ij} + \phi_{ji})_{1w} = & C'_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} \right. \\ & - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_j} \\ & \left. - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_i} \right) f \left(\frac{l}{x_n} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\phi_{ij} + \phi_{ji})_{2w} = & C'_2 (\phi'_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} \\ & - \frac{3}{2} \phi'_{ik,2} n_k n_j \\ & - \frac{3}{2} \phi'_{jk,2} n_k n_i) f \left(\frac{l}{x_n} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\phi'_{ij,2} = -C_\phi \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (16)$$

여기서 n 은 벽에 수직한 단위벡터이며, l 은 특성

난류 길이 척도이다. 보정함수 f 는 벽 가까이에서는 1이며, 벽으로부터 멀어질수록 감소하는 함수로서 다음과같은 함수형태를 갖는다.

$$f = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa \epsilon y} \quad (17)$$

따라서 레이놀즈 응력 전달방정식의 최종 형태는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = & - \left(\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) \\ & - \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon - C_\epsilon \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \\ & + (\phi_{ij} + \phi_{ji})_2 + (\phi_{ij} + \phi_{ji})_{1w} \\ & + (\phi_{ij} + \phi_{ji})_{2w} \\ & + C_\phi \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_j u_l}}{\partial x_l} \right. \\ & \left. + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_k u_l}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_l}}{\partial x_l} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

소산율 ϵ 방정식에 대해서는 k - ϵ 모델에서 와는 달리 등방성 확산계수인 ν_t 를 사용하지 않고 다음과 같은 ϵ 방정식을 사용한다⁽¹³⁾.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (U \epsilon) + \frac{\partial}{\partial y} (V \epsilon) = & C_\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{u^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) \\ & + C_\epsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + S_\epsilon \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 S_ϵ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_\epsilon = & C_\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{uv} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + C_\epsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{uv} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} P - C_{\epsilon 2} \epsilon) \end{aligned} \quad (20)$$

이상의 레이놀즈 응력 모형에서 채택된 상수들의 값은 Table 2에 주어진다.

Table 2 Values of the coefficients in Reynolds stress model

Coefficient	Value	Basis for determination
C_1	1.5	Homogeneous shear flows
C_2	0.4	Homogeneous shear flows
C'_1	0.5	Near wall turbulence
C'_2	0.06	Near wall turbulence
C_ϕ	0.11	Computer optimization
C_ϵ	0.15	Consistency with a value of k (=0.41)

4. 경계조건

4.1 k - ϵ 모델의 경우

입구에서의 조건으로는 실험 자료들을 사용하였다. 입구조건으로 필요한 양은 u , v , k 및 ϵ 이며 박리가 일어나기 전의 입구 경계층 유동은 층류 경계층이다. 벽으로부터 멀리 떨어진 윗 면과 출구에서는 Neumann 조건을 사용하였다. 벽근처에서는 1차원 Couette 유동을 가정하여 일정한 전단응력층으로 고려하였다. 이 경우 유동방향 압력구배는 무시하였으며, 벽영역에서는 다음의 벽법칙을 사용하였다.

$$u^+ = y^+ \quad (y^+ \leq 11.63) \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (y^+ > 11.63)$$

$$y^+ = \frac{(\tau_w/\rho)^{1/2} y}{\nu}, \quad u^+ = \frac{u}{(\tau_w/\rho)^{1/2}}$$

여기서 $\kappa = 0.4187$, $E = 9.793$ 이다.

벽근처에서 난류에너지의 생성항과 소산항이 균형을 이루는 국소 평형(local equilibrium)을 고려하면 다음의 식을 유도할 수 있다⁽¹⁹⁾.

$$\tau_w = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k^{1/2} \kappa u}{\ln(Ey^+)} \quad (22)$$

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (23)$$

평균속도 U 와 난류에너지 k 에 대한 벽에서의 경계조건들은, 위 식을 이용하여 벽에 가장 가까운 격자점에서 각각의 지배 방정식을 보정함으로써 설정하였다. ϵ 에 대한 벽에서의 경계조건은 ϵ 방정식과는 상관없이 평형관계로부터 구한 식을 이용함으로써 설정하였다.

스칼라양 및 U , V 에 대한 경계조건은 벽에 가장 가까운 격자점에서 적용하였다. 이 격자점의 위치는 log 영역 내에 있도록 하였으며, 계산이 끝난 후 벽에 가장 인접한 격자점의 위치를 재확인하였다. 이 때의 y^+ 는 재순환 영역의 구석에서 9.4이고, 유동 방향으로 점점 증가하여 재부착 위치에서 51.3이 되었으며, 그 이후 다시 감소하여 50-40의 값을 유지하였다. 재순환 영역 내의 계단벽에서의 x^+ 는 박리모서리 근처에서 32였으며, 구석으로 감에 따라 감소하여 14가 되었다.

4.2 레이놀즈 응력모델의 경우

레이놀즈 응력방정식에서는 각각의 레이놀즈응력

$\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$ 및 \overline{uv} 에 대한 경계조건이 필요하다. 그 외 U , V 및 ϵ 에 대한 경계조건은 앞절의 k - ϵ 모델에서와 같다. 경계조건을 부여하는 위치는 벽에 가장 인접한 격자점이며, 앞 절에서 언급하였듯이 이 격자점의 위치는 log영역 내에 있도록 하였다. 이 때의 y^+ 는 재순환 영역의 구석 근처에서 9-30이며, 그 외 위치에서는 30-50이었다. 벽에서 각 레이놀즈응력들에 대한 경계조건은 많은 실험결과로부터 결정하며, 일반적으로 벽유동에서의 u_x 에 대한 법선응력은 다음과 같다⁽¹⁷⁾.

$$\overline{u^2} = 5.1u_\tau^2, \quad \overline{v^2} = 1.0u_\tau^2, \quad \overline{w^2} = 2.3u_\tau^2 \quad (24)$$

\overline{uv} 에 대한 경계조건은 평형 조건을 사용하여 벽에 가장 가까운 \overline{uv} 격자점에서 κ 를 구함으로써 다음과 같이 부여하였다.

$$\overline{uv} = -C_\mu^{1/2} k \quad (25)$$

5. 수치 해석 방법

본 연구에서는 k - ϵ 모델을 사용한 수치해석은 TEACH-2E code⁽¹⁹⁾를 사용하였으며, 레이놀즈응력 모델을 사용하는 경우에는 TEACH-2E 코드를 수정하여 사용하였다. k - ϵ 모델에서는 등방성 확산 계수를 사용하지만 레이놀즈응력 모델에서는 $u_i u_j$ 를 직접 구하므로 레이놀즈응력 방정식에서 나타나는 각 방향의 확산계수는 서로 달라 비등방성이다. 수치해석방법으로는 연속방정식, 운동량 방정식으로 부터 압력을 수정하는 SIMPLE 알고리즘을 사용하였으며, 각 방정식의 해법에는 TDMA를 사용하는 line-by-line법을 사용하였다. 수치해석에 채택된 격자계는 42×42 의 비균일 격자계이며, 벽 및 모서리 근처에 격자를 집중시켰다. 수렴시 유동변수들의 상대 오차한계는 5×10^{-5} 이내였다.

6. 수치해석 결과 및 검토

수치계산은 후향 계단 이후의 전체 하류영역과 재부착 이후의 하류영역을 각각 대상으로 하여 수행하였다.

6.1 후향계단유동의 수치해석

재부착 지점은 모두 $4.8h$ 정도로 거의 비슷하였으며 실험치 $6h$ - $7h$ 보다는 상당히 짧았다. Fig. 3에서는 k - ϵ 모델 및 레이놀즈 응력 모델에 의한 난류 운동에너지 k 의 분포를 도시하였다. 난류운

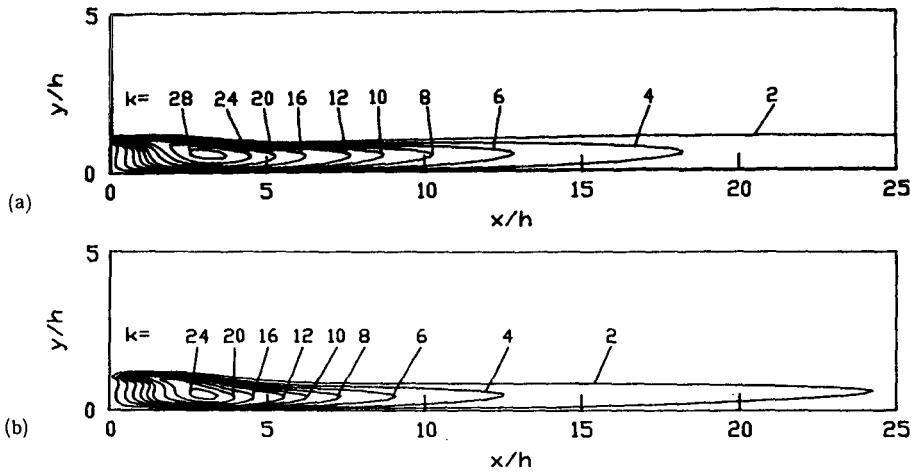


Fig. 3 Turbulent kinetic energy contours : (a) $k-\epsilon$ model, (b) Reynolds stress model

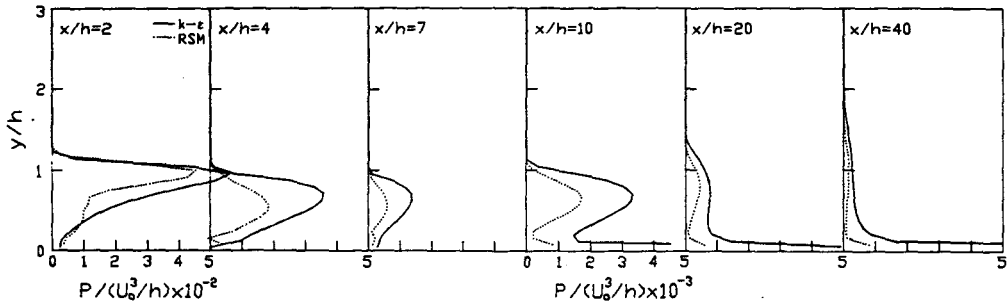


Fig. 4 Numerical results for the production of the turbulent kinetic energy obtained by considering the entire downstream region after the step

동에너지 k 는 박리 전단층의 영향으로 박리 직후부터 급격히 증가하며, 재부착 이전의 박리전단층에서 최대치를 보인다. 이와 같은 대체적인 경향은 두 모델이 비슷하게 나타내고 있으나, 전반적으로 $k-\epsilon$ 모델의 경우가 레이놀즈 응력 모델보다 큰 값들을 제시한다.

각 단면에서의 난류에너지의 생성항의 분포를 각각 Fig. 4에 나타내었다. 난류에너지의 생성항($k-\epsilon$ 모델의 경우는 식 (7), 레이놀즈 응력 모델의 경우는 $-\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$)의 분포를 보면 최대치에 대응하는 y 좌표값은 하류로 감에 따라 박리이후 벽으로 접근하다 재부착이후 점점 벽으로부터 멀어짐을 알 수 있으며, $k-\epsilon$ 모델의 경우가 RS모델(레이놀즈 응력 모델) 경우보다 벽으로부터 좀 더 멀리 떨어져 나타났다. 특히 재부착 직후인 $x/h=7$ 에서는 벽근처에서 생성항의 크기가 작으나, $x/h=10$ 에서

는 평균 속도 구배 $\frac{\partial U}{\partial y}$ 가 매우 증가하여 벽에서의 생성항의 크기가 매우 커졌음을 알 수 있다. 생성항의 크기는 $k-\epsilon$ 모델이 RS모델 보다 크게 계산되었으며, $x/h=40$ 에서는 $k-\epsilon$ 모델 경우는 거의 평형 난류 경계층 분포에 도달하였다. 그러나 RS모델은 $x/h=40$ 에서 벽에서의 생성항 크기는 크게 증가하였으나, 벽에서 떨어진 곳에서 국소 최대치를 보이고 있어 충분히 평형 난류 경계층 분포에 도달하지는 못하였다.

Fig. 5에는 난류에너지 소산율 ϵ 의 분포를 나타내었다. 박리 이후부터 재부착 지역까지는 두 모델 모두 소산항을 생성항보다 조금 작게 계산하였다. 재부착 하류에서는 벽으로부터 떨어진 곳에서는 거의 크기가 비슷하였으나, 벽 가까이에서는 생성항이 소산항 보다 컸다. 생성항에서와 마찬가지로 $k-\epsilon$ 모델을 사용하여 구한 소산율이 RS모델을

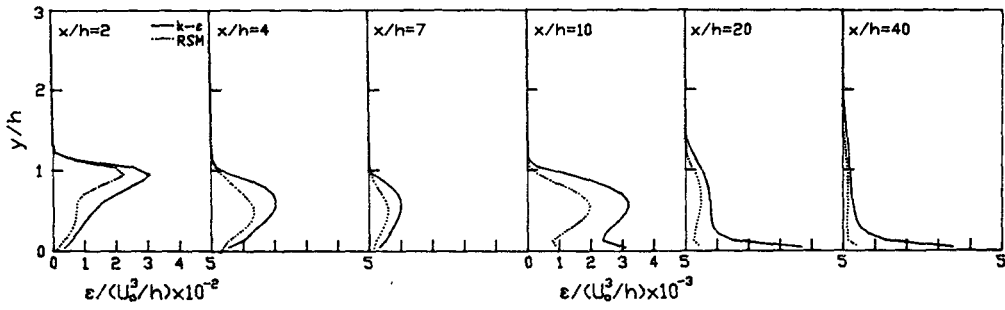


Fig. 5 Numerical results for the dissipation of the turbulent kinetic energy obtained by considering the entire downstream region after the step

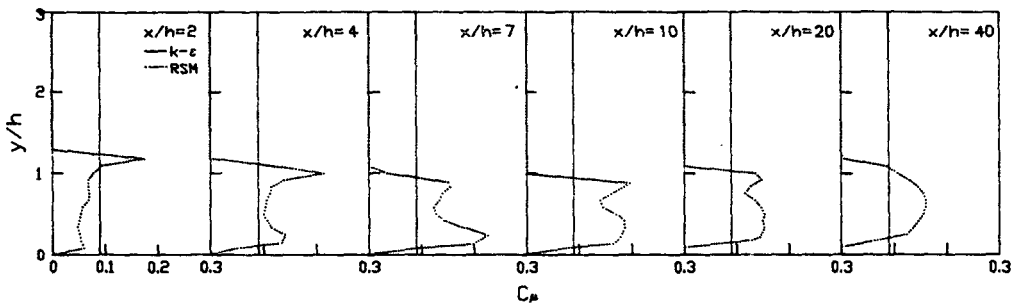


Fig. 6 Numerical results for the distributions of the quantity $C_\mu = -\overline{uw} / \left(\frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ obtained by considering the entire downstream region after the step

사용하여 구한 값보다 크게 계산되었다. $k-\epsilon$ 모델과 RS 모델 모두 $x/h=40$ 에서 거의 생성항과 소산항의 크기가 비슷하였으며, 특히 $k-\epsilon$ 모델은 평형 난류 경계층의 소산율 분포에 거의 접근함을 알 수 있다. Fig. 3의 난류운동에너지 k 의 분포에서 알 수 있었던듯이 $k-\epsilon$ 모델로 예측된 k 가 RS 모델 보다 컸으며, 이는 $k-\epsilon$ 모델에서의 난류운동에너지의 생성항과 소산항이 RS 모델보다 큰 사실과 일치한다.

Fig. 6에서는 RS 모델을 사용하여 계산한 $C_\mu = -\overline{uw} / \left(\frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ 의 분포를 도시하였다. 물론 표준 $k-\epsilon$ 모델에서 사용되는 C_μ 는 0.09로서 상수이다. 그러나 일반적으로 이와 같이 정의된 C_μ 는 유동 상태에 따라 변하며, 특히 유선곡률과 난류의 비등방성에 의존한다. 평형 난류 경계층유동에서의 C_μ 값은 0.09보다 작으며 대체로 0.04-0.05의 크기를 갖는다. C_μ 를 다시 쓰면 $C_\mu = \left(\frac{-\overline{uw}}{k} \right)^2 \frac{\epsilon}{P}$ 이므로, 비평형 유동인 경우 C_μ 는 난류에너지의 소산항과 전단응력에 의한 생성항과의 비만큼 평형유동과 차이가 난다. Fig. 6을 살펴보면 RS 모델의 경우 박

리 전단 층에서의 C_μ 값은 매우 크게 나타났으며 재순환 영역에서는 C_μ 값이 상당히 작았다. 벽으로부터 멀리 떨어진 곳에서 C_μ 가 큰 이유는 $-\overline{uw}$ 와 k 모두 그 크기가 매우 작아 상대오차가 크게 발생한 것으로 생각되며, 따라서 여기서의 C_μ 값은 큰 의미가 없다.

재부착이후에는 난류에너지의 생성항이 작으므로 벽 가까운 곳에서의 C_μ 는 커졌다. 이는 재부착지점으로부터 갈라져 다시 상류로 재순환 되는 유체가 큰 난류운동에너지를 가지고 있기 때문으로 생각된다. 재부착이후 C_μ 가 0.09보다 작은 영역은 하류로 갈수록 점점 넓어졌으며, 이는 재발달 난류경계층이 발달되어 벽의 영향을 받는 영역의 두께가 두꺼워짐을 의미한다.

6.2 재발달 경계층의 수치해석

후향 계단 하류의 전 영역을 대상으로 하는 수치 해석으로부터 구한 재부착 길이는 약 $4.8h$ 이었으며 이는 실험 결과인 $6.5h$ 와 많은 차이가 있다. 따라서 재부착 이후의 수치해석 결과와 실험치와의 비교가 어려우므로 $x/h=7$ 에서의 실험결과를 수치

해석의 입구조조건으로 부여하여 재발달 경계층의 해석을 하였으며, $k-\epsilon$ 모델과 RS 모델의 결과를 실험치와 비교하였다.

Fig. 7에서는 난류운동에너지 k 의 분포를 도시하였다. 상류의 박리전단층의 영향으로 $x/h=7$ 에서 난류에너지가 상당히 크며, 최대치는 벽으로부터 떨어진 곳에서 나타났다. $x/h=10$ 에서는 계산치가 실험치보다 조금 작았고, 그 이후는 RS 모델은 잘 일치하였으며, $k-\epsilon$ 모델의 경우는 약간 작았다. 최대치는 하류로 갈수록 점점 그 크기가 줄어들었으며, $x/h=50$ 에서는 벽에서 최대치를 보였다.

난류에너지의 생성항과 소산항은 각각 Fig. 8과 Fig. 9에 도시하였다. 두 모델에 의한 생성항의 분포는 $x/h=10$ 에서 많은 차이가 났다. $k-\epsilon$ 모델은 벽에서의 생성항 크기가 급격히 커져 곧 소산항과 균형을 이루었으나, RS 모델에서의 생성항은 회복이 느려 천천히 평형상태에 도달하였다. 생성항은 실험치와 계산치가 비교적 잘 일치하였으나, 소산

항은 실험치가 계산치보다 조금 작았다. 두 모델 모두 $x/h=25$ 까지는 소산항이 생성항보다 컸으며, $x/h=50$ 에서는 소산항과 생성항의 크기가 거의 같아져 평형 상태에 도달함을 알 수 있다. 그러나 $x/h=50$ 에서 벽근처에서의 소산항과 생성항의 크기가 실험치 보다 큰 것은 수치계산에 사용한 경계조건의 영향으로 생각된다.

재발달 경계층에서의 C_μ 의 분포는 Fig. 10과 같다. RS 모델의 경우 벽영향으로 인해 0.09보다 작은 지역이 점점 넓어졌다. C_μ 가 큰 경계층 가장자리 지역은 k 와 $-\overline{uv}$ 가 매우 작은 곳이어서 이들의 비는 큰 의미가 없다. 또 실험에서는 난류 운동에너지 k 를 $k = \frac{3}{4}(\overline{u^2} + \overline{v^2})$ 으로부터 구하였으며, 따라서 k 및 \overline{uv} 의 측정시 발생한 오차의 영향으로 인하여 실험에서 구한 C_μ 는 작게 계산된 것으로 생각된다. RS 모델에서 계산된 C_μ 가 0.09인 위치는 경계층이 발달됨에 따라 점점 벽으로부터 멀

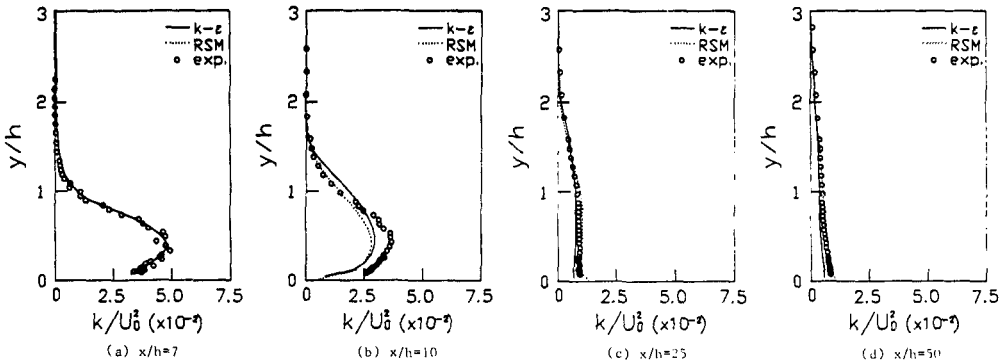


Fig. 7 Comparison of the experimental values of the turbulent kinetic energy to the numerical values: (a) $x/h=7$, (b) $x/h=10$, (c) $x/h=25$, (d) $x/h=50$.

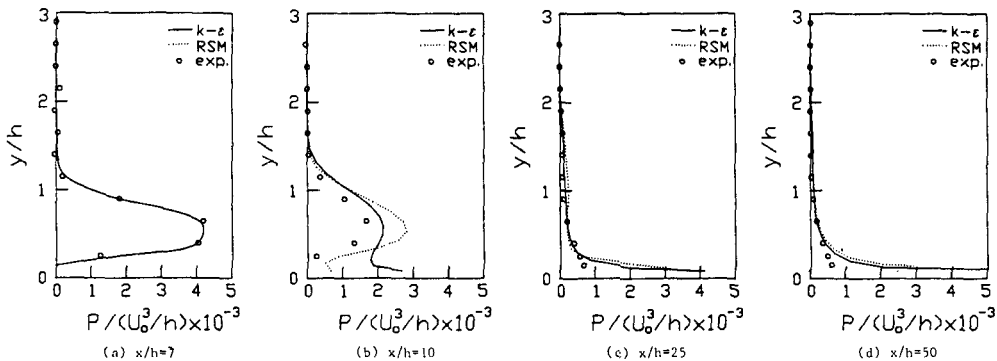


Fig. 8 Comparison of the experimental values of the turbulent kinetic energy production to the numerical values: (a) $x/h=7$, (b) $x/h=10$, (c) $x/h=25$, (d) $x/h=50$.

어짐을 알 수 있다. 재부착이후 $x/h=10$ 에서의 벽 근처에서는 생성항이 작으므로 C_μ 가 커졌으며, 벽으로부터 멀어질수록 감소하여 최소치를 보인 후 다시 증가하였다. 하류로 감에 따라 벽근처에서의 생성항이 회복되어 벽 가까운 곳에서는 C_μ 가 0.09보다 작아졌다. 그리고 벽근처의 C_μ 가 0.09보다 작은 지역은 점점 넓어졌다. 아마도 재발달 난류 유동의 수치해석 결과가 실험치와 많은 차이를 보이는 이유 중의 하나로서 이와 같이 $k-\epsilon$ 모델 혹은 레이놀즈 응력 모델에서 채택되는 상수들의 부적합성을 들 수 있을 것이다. 그렇다면, 재발달 난류 경계층과 같은 비평형유동을 제대로 예측하기 위하여는 난류에너지 및 난류전단응력의 균형에 관한 실험자료들을 기초로 한 새로운 모델링이 필요한 것으로 생각되며, 이는 매우 의미있는 추후의 계속된 연구 과제를 형성한다.

6. 결 론

박리-재부착 이후의 재발달 난류 경계층이 비평형 상태에서 평형상태로 발달하는 과정을 고찰하고 이를 적절히 서술할 수 있는 난류모델을 추구하기 위한 연구가 수행되었다. 난류에너지 전달방정식 및 레이놀즈 전단응력 전달방정식의 각 항을 실험적으로 측정 또는 연산하여 비교하였고, 표준 $k-\epsilon$ 모델 및 레이놀즈 응력 모델을 채택한 수치해석적 연구가 이루어졌으며, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

재부착 이후 벽면 근처에서는 난류 에너지의 소산항과 확산항이 균형을 이루는 비평형 상태를 이루고 있으나 하류로 감에 따라 생성항이 회복되어 $x/h=50$ 에서는 평형 상태에 도달함을 알 수 있다.

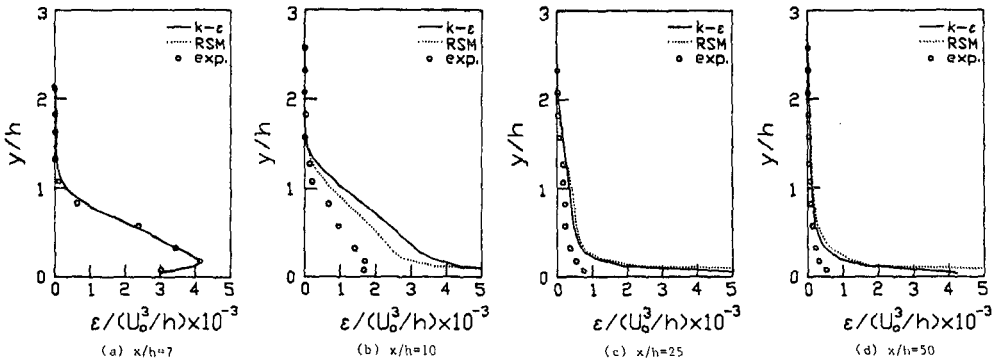


Fig. 9 Comparison of the experimental values of the turbulent kinetic energy dissipation to the numerical values: (a) $x/h=7$, (b) $x/h=10$, (c) $x/h=25$, (d) $x/h=50$.

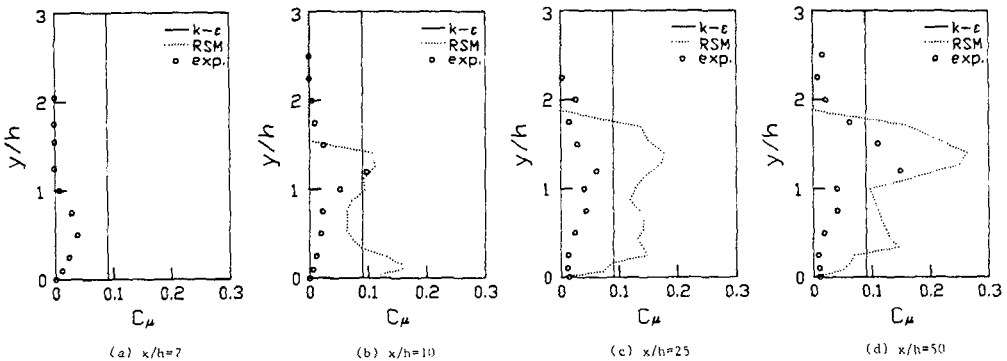


Fig. 10 Comparison of the experimental values of the quantity $C_\mu = -\overline{uv} / \left(\frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ to the numerical values: (a) $x/h=7$, (b) $x/h=10$, (c) $x/h=25$, (d) $x/h=50$.

특히, 재부착 이후부터 $x/h=20$ 까지는 난류에너지 생성항 중의 $(\overline{u^2 - v^2}) \frac{\partial U}{\partial x}$ 이 벽 근처에서 상당히 큼을 알 수 있었다.

재부착 이후의 벽 근처에서는 전단응력의 확산항과 생성항이 균형을 이루었으며, 하류로 감에 따라 생성항과 압력-변형률항이 균형을 이루어 $x/h=50$ 에서는 거의 평형 난류경계층의 분포에 도달하였다.

$k-\epsilon$ 모델과 레이놀즈 응력 모델을 이용한 수치해석에서는 재부착 길이가 모두 $4.8h$ 정도로 실험치보다는 짧게 계산되었다. $k-\epsilon$ 모델의 경우에는 재순환 영역에서 역방향의 평균 속도가 조금 크게 계산되었으며, 난류 에너지 k 도 레이놀즈 응력 모델에 비하여 컸다.

$k-\epsilon$ 모델에서 사용한 상수 C_μ 는 평형 전단층에서 구한 실험값이므로, 전단층에 비해 난류강도가비교적 큰 재순환 영역이나 벽의 영향을 크게 받는 난류 경계층에서 레이놀즈 응력과 난류 운동 에너지와의 비가 달라지는 경우와 비평형유동의 경우에는 C_μ 의 보정을 포함한 새로운 모델링이 필요함을 알 수 있었다. 레이놀즈 응력 모델의 결과에서 구한 $C_\mu = -\overline{uv} / \left(\frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ 는 $k-\epsilon$ 모델에서 사용한 C_μ 값과 벽 가까이에서 큰 차이를 보였다.

$k-\epsilon$ 모델에서는 벽에서 사용한 평형조건의 영향으로 벽 근처에서의 생성항이 레이놀즈 응력 모델보다 빨리 발달되었다. 따라서 재부착으로 발생한 벽 근처의 비평형 상태는 $k-\epsilon$ 모델의 경우 벽으로부터 빨리 평형을 이루어 레이놀즈 응력 모델보다 먼저 평형 난류 경계층에 도달하였다.

후 기

이 연구는 1987년도 한국과학재단 목적기초 연구의 일부로 연구비 지원을 받았으므로 이에 심심한 감사의 뜻을 포함합니다.

참 고 문 헌

- (1) Demirdzic, I., Gosman, A.D. and Issa, R.I., 1981, "Comparison of Computation with Experiment—Summary Report", 1980-1981 AFOSR-HTTM—Stanford Conference on Complex Turbulent Flows, Vol. II, p. 1383.
- (2) Sindir, M.M., 1983, "Calculation of Deflected-Walled Backward-Facing Step Flows. Effects of Angle of Deflection on the Performance of Four Models of Turbulence", Appl. Mech., Bio-Eng. and Fluids Eng. Conference, Houston, Texas.
- (3) 김경천, 정명균, 1985, "2차원 수직벽을 지나는 재부착 박리 전단층의 난류 구조에 관한 연구(I)", 대한기계학회 논문집, 제9권, 제4호, p. 403.
- (4) 김경천, 정명균, 1987, "2차원 수직벽을 지나는 재부착 박리 전단층의 난류 구조에 관한 연구(II)", 대한기계학회논문집, 제11권, 제4호, p. 681.
- (5) 박상우, 정명균, 1987, "곡률수정 2-방정식 모델을 이용한 2차원 재순환 난류 유동구조의 연구", 대한기계학회논문집, 제11권, 제3호, p. 444.
- (6) Park, S.W. and Chung, M.K., 1988, "Curvature-Dependent Two-Equation Model for Prediction of Turbulent Recirculating Flows", AIAA J., Vol. 27, No. 3, p. 340.
- (7) Gibson, M.M. and Launder, B.E., 1978, "Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer", J. Fluid Mech., Vol. 86, p. 491.
- (8) Yoo, J.Y., Choi, H.C. and Han, S.M., 1989, "Numerical Analysis of Turbulent Flow Over a Backward-Facing Step," KSME J, Vol.3, No.1 p. 31.
- (9) Amano, R.S. and Goel, P., 1985, "Computation of Turbulent Flow Beyond Backward-Facing Steps Using Reynolds-Stress Closure", AIAA J., Vol. 23, No. 9, p. 1356.
- (10) Avva, R.K., Kline, S.J. and Ferziger, J.H., 1988, "Computation of the Turbulent Flow over a Backward-Facing Step Using the Zonal Modeling Approach", Thermoscience-Div. Dept. of Mech. Eng., Rep. No. TF-33, Stanford University.
- (11) Amano, R.S. and Goel, P., 1987, "Investigation of Third-Order Closure Model of Turbulence for the Computation of Incompressible Flows in Channel with a Backward-Facing Step", ASME Journal of Fluid Eng., Vol. 109, p. 424.
- (12) 백세진, 1989, "박리-재부착 후의 재발달 난류 경계층에 관한 연구", 서울대학교 공학박사 학위논문.
- (13) Hanjalic, K. and Launder, B.E., 1972, "A Reynolds Stress Model of Turbulence and Its Application to Thin Shear Flows", J. Fluid Mech., Vol. 52, p. 6609.
- (14) Frost, W. and Moulden, T.H., 1977, "Handbook of Turbulence", Vol. 1, Fundamentals and Applications, Plenum Press, New York, p. 197.
- (15) Chandrsuda, C. and Bradshaw, P., 1981, "Turbulent Structure of a Reattaching Mixing Layer", J. Fluid Mech, Vol. 110, p. 171.
- (16) Launder, B.E. and Spalding, D.B., 1974, "The

- Numerical Computation of Turbulent Flows", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 3, p. 269.
- (17) Launder, B.E., Reece, G.J. and Rodi, W., 1975, "Progress in the Development of a Reynolds-stress Turbulence Closure", *J. Fluid Mech.*, Vol. 68, p. 537.
- (18) Rotta, J.C., 1951, "Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz", *Zeitschrift für Physik*, Vol. 129, pp. 547~572.
- (19) Gosman, A.D., Ideriah, F.J.K. and Arnal, M.P., 1983, "TEACH-2E: A General Computer Program for Two-Dimensional, Turbulent, Recirculating Flows", Rep. FM-83-2, University of California, Berkeley.