

선형분수변환을 이용한 제어계설계

金 相 奉* 古田 勝久**

Design of Control Systems by a Linear Fractional Transformation

S.B. Kim, K. Furuta

Abstract

The fundamental objective of this paper has been to develop a means for incorporating the concept of the linear fractional transformation more generally and easily into multivariable feedback design procedure.

When we design a continuous system, generally, we are constrained by design methods which arise specifically for the system. Also, in the design of discrete systems, it is the same concept. But the approach developed in this paper is very flexible in the view that in spite of being the continuous or discrete, the design can be done using a well known design method in both cases. That is, when we design a continuous system or discrete system, the design can be done by a standard design method of continuous systems or discrete ones, depending on the choice of the linear fractional transformation. Therefore, it is noted that this concept has broken the inflexibility of the conventional design rules for multivariable control system.

In essence, the concept shows that if a given system is controllable, some desirable design, for examples, pole assignment within prespecified region, optimal controllers with poles within prespecified region etc., could be done easily by transforming a desirable region into a standard region, such as the complex left-half plane or the unit disk, by the chosen linear fractional transformation, and then by designing the transformed system using the well known standard results.

1. 서론

지난 20년에 걸쳐 현대선형제어이론에 있어 많은 발전이 있었다. 그러나 불행하게도, 이론

가와 설계자의 사이에는 더욱더 심한 격차를 보여왔다고 할 수 있다. 현대선형제어이론의 주된 특징은 시스템의 상태공간표현, 제어기 구성에 대한 수학적인 최적화의 개념과

* 正會員, 釜山水産大學

** 日本, 東京工業大學

Kalman-Busy 최적상태재구성이론 (Kalman-Busy optimal state reconstruction theory)에 있으며, 고전이론에 비해 현대제어이론의 장점이라고 할 수 있는 것은 이와같은 개념들에 의해 뜻보이게 되었다고 할 수 있다. 즉 그 해를 보다더 간단히 얻을 수 있다는 것과, 불안정한 시스템의 안정화, 시스템 응답에 대한 외란의 영향 최소화, 지정된 과도응답의 실현 및 파라메타 변동에 대한 시스템의 로바스트성 부여등과 같은 구속조건을 가지는 설계문제를 효율성 있게 CAD를 이용하여 쉽게 해결할 수 있다는 것이다.

비록 고전제어 이론은 실제적인 설계문제에서 잘 입증되긴 했지만, 단지 단일 입력 및 출력을 가진 시간불변 시스템에 한정되어 있으며, 더구나, 위와같은 구속조건을 가진 다변수 제어계의 설계는 고전제어 설계법에 의해서는 불가능하게 된다.

연속적인 시스템을 설계할 경우, 고려되어야 할 설계평면은 복소수 좌반부에 한정되게 되고, 그리고 이산적인 시스템의 경우는 복소수 평면상의 단위원 내부라고 하는 기억을 되살리게 된다. 즉, 각 시스템의 설계라고 하면, 그 시스템의 페루우프극이 배치되어야 할 그 자체의 평면에 국한시켜, 주어진 설계사양에 대한 문제를 해결하려고 하는 것이 일반적인 설계개념이라 할 수 있다. 이와같이 유연성 없는 설계 개념으로 인하여 현대제어이론이 가지고 있는 긍정적인 면을 유용하게 이용할 수 있는 기회를 상실할 뿐만 아니라, 연속시간 시스템과 이산시간시스템에 대한 설계개념 자체의 격차를 더욱더 크게 하고 있다고 할 수 있다. 물론 이와같은 개념을 깨트리기위한 노력이 많은 연구자들에 의해 이루어지긴 했지만, 그러나 아직 만족할 만한 연구 결과는 없다.

위에 언급한 현대제어이론의 긍정적인 면을 살리고 더욱더 유연성 있는 제어계 설계법을 개발하기위해 본 논문에서는 선형분수변환 이론을 이용하도록 한다.

선형분수변환은 흥미있는 몇가지 성질을 가지고 있는데, 그 중 한가지 선형성에 관한 성질을 들 수 있다. 즉 주어진 시스템이 선형이

라고 하면 변환된 후에도 같은 차수(order)를 가지면서, 선형성을 보존한다는 것이다. 이와같은 성질을 살려 주로 연속적인 시스템을 이산적인 시스템으로 변환하거나 또는 그 역으로 변환하는 데 이용되어 왔다.¹⁾²⁾ 이외에도 과거 20년간 선형분수변환을 이용해서 여러가지 설계문제, 즉 연속, 이산시스템 근사화 문제,³⁾⁴⁾ Riccati방정식의 쌍선형변환 문제,⁵⁾⁶⁾⁷⁾ 최적노름(optimal norm)에 의한 모델 축소문제,⁸⁾ 正實시스템(Positive real system)구성문제,⁹⁾ 등에 응용되어 왔다. 위와같은 설계문제들 모두 직접 제어계 설계문제에 있어서의 피이드백 이득을 구하는 문제와는 거리가 멀다고 할 수 있다. 즉 주어진 시스템과 변환된 시스템 사이의 피이드백 이득의 관계에 대해서는 명백히 하지 못하고 있다.

본 논문에서는 이와같은 피이드백 이득에 대해 그 관계를 명백히 하여 주어진 시스템이 연속 또는 이산일 경우라 하더라도, 그 개개의 시스템에 대한 설계는 그 시스템 자체에 구애됨 없이 설계가 가능하도록 하는 다변수 제어계의 설계법을 제안했다. 본질적으로, 본설계법은 주어진 시스템이 가제어(controllable)이면, 어떤 바람직한 설계영역에 대한 설계사양을 만족하도록 하는 페루우프 시스템 설계는, 주어진 설계영역을 선형분수변환에 의해 하나의 표준적인 설계평면(복소수 좌반평면 또는 단위원 내부)으로 사상(mapping)하므로써, 잘 알려져 있는 설계법을 이용하여 그 설계목적을 달성하게 된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 제어이론과 관련된 선형분수변환의 성질에 대해 논하고, 3절에서는 그 예제문제로서 지정된 영역내에 극을 가진 레귤레이터의 구성문제에 대해 설명하였으며, 4절에서 2절의 결과를 다른 설계문제로의 확장 가능성에 대해 언급했다.

2. 제어계 이론과 관련된 선형분수변환

본 절에서는 선형분수변환을 제어계설계에 적용하기위한 기본적인 개념과 이론들에 대해

논한다. 그 결과는 다음 절에서 다루어지는 제어계설계 문제들에 중요한 역할을 하게 된다.

2.1 선형분수변환에 의한 사상

어떤 유리함수가 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$\rho = f(\lambda) = (a\lambda + b) / (c\lambda + d), \quad (2-1)$$

$$ad - bc \neq 0$$

여기서, a, b, c, d 등은 임의의 정수들이다. 이때 식(2-1)은 λ-평면을 ρ-평면으로 사상하며, 선형분수변환 또는 메비우스(Möbius)변환¹⁰⁾이라 불리워지고 있다. 식(2-1)은 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$c\lambda\rho + d\rho - a\lambda - b = 0 \quad (2-2)$$

즉, 식(2-2)는 λ와 ρ에 대해 서로 선형임을 알 수 있다. 따라서, 선형분수변환은 또 다른 이름으로서 쌍선형변환(bilinear transformation)이라고 불리워지기도 한다. 여기서, 조건 ad-bc≠0는 변환(2-1)이 등각성의 성질(conformal property)을 가지고 있음을 의미한다. 만일 ad-bc=0이면, 그때 dρ/dλ=0, ρ=const.이다. 만일, c≠0이면, 식(2-1)은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\rho = f(\lambda) = (bc - ad) / [c^2(\lambda + d/c)] + a/c \quad (2-3)$$

지금, ad-bc≠0이면,

$$\rho = f(\lambda) = \beta / (\lambda + \alpha) + \gamma \quad (2-4)$$

여기서,

$$\alpha = d/c, \beta = (bc - ad) / c^2, \gamma = a/c \quad (2-5)$$

역으로, 식(2-1)을 λ에 대해 풀면, 다음과 같이 된다.

$$\lambda = (-d\rho + b) / (c\rho - a) \quad (2-6)$$

제어계 설계이론에서 근사문제를 생각하면, 식(2-1)에서 a=1, b=-1, c=0 일 경우는 오일러(Euler) 근사함수, a=1, b=-1, d=0의 경우는 역차분함수(backward difference function), 그리고, a=2/T, b=-2/T, c=1, d=1일 경우는 터스틴(Tustin) 근사함수라 불리워지고 있다.¹¹⁾

[성질 1]

선형분수변환(2-1)은 λ-평면내의 원판 D

(중심: α+j0, 반경: r)를 다음과 같은 중심과 반경을 가진 원판으로 사상한다. (그림 1참고)

$$\text{중심} : \alpha_c = [ab - \alpha(ad + bc) - (r^2 - \alpha^2)cd] / [\alpha^2 - 2\alpha ac - (r^2 - \alpha^2)c^2] \quad (2-7)$$

$$\text{반경} : r_c = | [r(ad - bc)] / [a^2 - 2\alpha ac - (r^2 - \alpha^2)c^2] | \quad (2-8)$$

[성질 2]

성형분수변환(2-1)은 ρ-평면내의 좌반평면을 다음과 같은 λ 평면내의 원판 D로 사상한다. (그림 2참고)

$$\text{중심} : \alpha = [-(bc + ad)] / 2ac \quad (2-9)$$

$$\text{반경} : r = | (bc - ad) / 2ac | \quad (2-10)$$

[주의]

성질 2는 성질 1에서 r=-α→∞일 경우의 결과라 할 수 있다.

2.2 제어이론과 관련된 선형분수변환의 몇가지 성질

다음과 같은 시스템을 생각하자. 연속시스템에 대해

$$\Sigma(A, B) : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2-11a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2-11b)$$

이산시스템에 대해

$$\Sigma_D(A, B) : x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2-12a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2-12b)$$

여기서 x∈Rⁿ은 상태벡터, u∈R^m은 제어벡터, y∈R^p는 출력벡터이다.

시스템 Σ(A, B)와 Σ_D(A, B)에 대한 제어칙(Control law)은 각각 다음과 같이 주어진다 고 한다.

$$u(t) = Fx(t) \quad (2-13)$$

$$u(k) = Fx(k) \quad (2-14)$$

여기서 F는 미지의 m x n피이드백 행렬이다. 시스템 Σ(A, B)와 Σ_D(A, B)에 대한 페루우프 시스템은 각각 다음과 같이 된다.

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (2-15)$$

$$x(k+1) = (A + BF)x(k) \quad (2-16)$$

[보조정리 1]

페루우프계의 극이 λ_i=λ_i(A+BF), i=1,

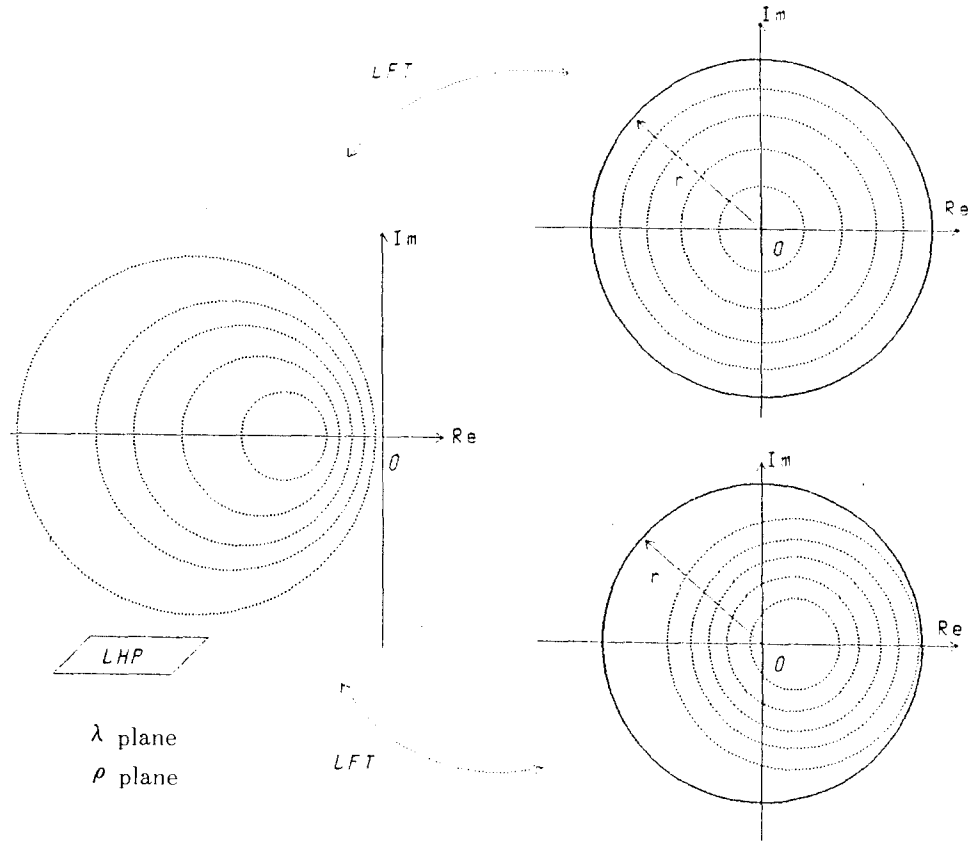


Fig. 1 Disk-to-disk linear fractional mapping.

2, ..., n으로 주어지고, $\phi(\mu)$ 가 유리함수 :

$$\phi(\mu) = \gamma_0 \prod_{j=1}^m (\mu - \mu_j)^{\sigma_j} \quad (2-17)$$

라고 하자. 여기서, γ_0 와 σ_j ($j=1, 2, \dots, m$)는 상수들이다. 이때 $\phi(\lambda_j)$ 는 행렬 $\phi(A+BF)$ 의 고유치들이다.

【증명】

A_c 와 $\Delta(\lambda)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$A_c = (A+BF) \quad (2-18)$$

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A_c| \quad (2-19)$$

식(2-17)에서 μ 값 대신에 A_c 를 대입하여,

$$\phi(A_c) = \gamma_0 \prod_{j=1}^m (A_c - \mu_j I)^{\sigma_j} \quad (2-20)$$

을 얻는다. 윗식의 양변에 행렬식을 취하고, 식(2-19)를 이용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} |\phi(A_c)| &= \gamma_0 \prod_{j=1}^m |(A_c - \mu_j I)^{\sigma_j}| \\ &= (-1)^{nm} \gamma_0^n \prod_{j=1}^m \Delta(\mu_j)^{\sigma_j} \\ &= (-1)^{mn} \gamma_0^n \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n (\mu_j - \lambda_i)^{\sigma_j} \\ &= \prod_{i=1}^n \phi(\lambda_i) \end{aligned} \quad (2-21)$$

윗식은 스칼라 유리함수 $\phi(\mu)$ 와 행렬 A_c 의 고유치 λ_i 사이의 관계를 나타내고 있다. $\phi(\lambda_i)$ 대신에 $\lambda - \phi(\lambda_i)$ 를 대입하므로써 윗식은 다음과 같이 된다.

$$|\lambda I - \phi(A_c)| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \phi(\lambda_i)) \quad (2-22)$$

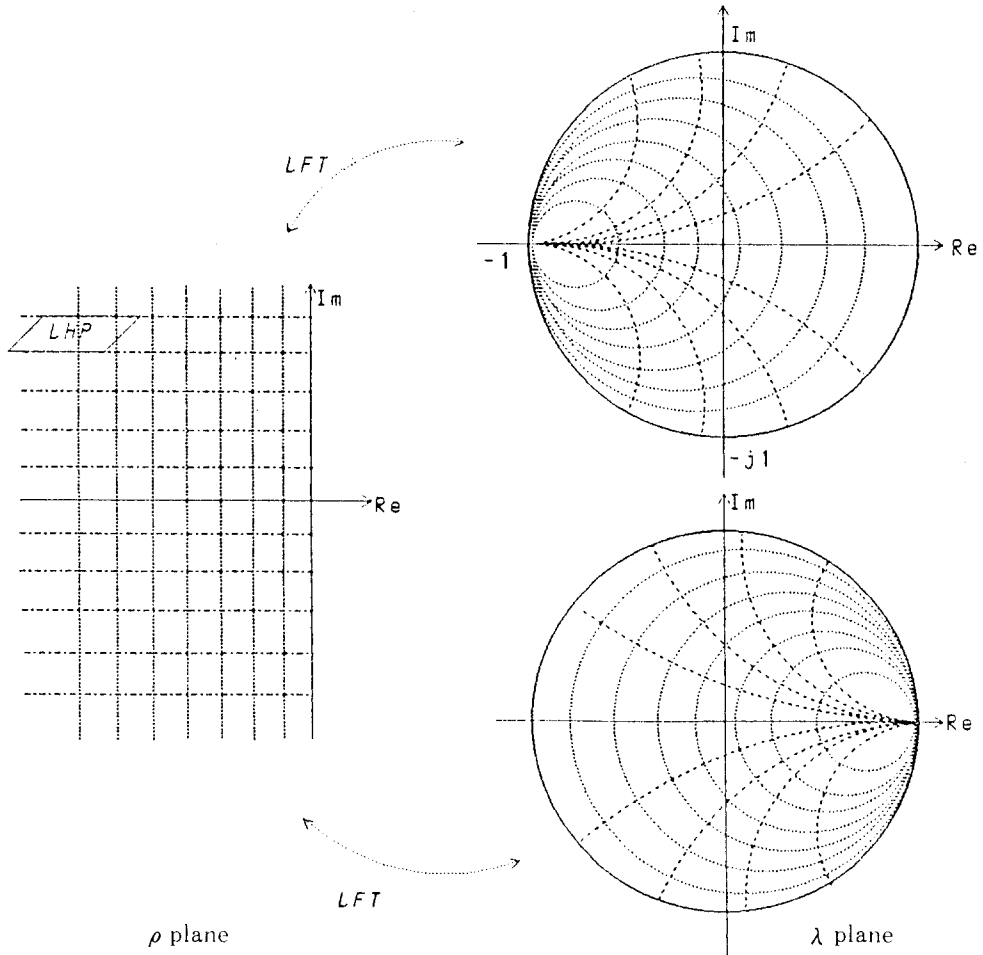


Fig. 2 Line-to-circle linear fractional mapping.

즉, $\phi(\lambda_i), i=1, 2, \dots, n$ 이 행렬 $\phi(A+BF)$ 의 고유치임을 알 수 있다.

시스템 $\Sigma(A, B)$ 와 $\Sigma_D(A, B)$ 의 페루우프 시스템 행렬이 선형분수변환(2-4)에 의해 변환되었을 때, 그 변환된 시스템이 각각 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$\Sigma(\Phi, \Gamma) : \dot{x}_T(t) = \Phi x_T(t) + \Gamma u_T(t) \quad (2-23)$$

$$\Sigma_D(\Phi, \Gamma) :$$

$$x_T(k+1) = \Phi x_T(k) + \Gamma u_T(k) \quad (2-24)$$

여기서, 이들 시스템의 피이드백칙은 각각 다음과 같이 주어진다 고 한다.

$$u_T(t) = F_T x_T(t) \quad (2-25)$$

$$u_T(k) = F_T x(k) \quad (2-26)$$

[보조정리 2]

시스템 $\Sigma(\Phi, \Gamma)$ 가 가제어이기 위한 필요충분조건은 시스템 $\Sigma(A, B)$ 가 가제어이다. 단, α 는 행렬 $(A + \alpha I)$ 가 正則이 되도록 주어진다.

[증명]

만일 시스템 $\Sigma(\Phi, \Gamma)$ 가 가제어라고 하면, 이때, 모든 ρ 에 대해 $\text{rank}(\rho I - \Phi, \Gamma) = n$ 임을 의미한다. 또, 모든 λ 에 대해, 가정에 의해 다음이 성립한다.

$$\text{rank}[\lambda I - A, B] = n \quad (2-27)$$

즉, 모든 ρ 에 대해 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다

$$\begin{aligned} & \text{rank}[\rho I - \Phi, \Gamma] \\ &= \text{rank}[\rho I - \gamma I - \beta(A + \alpha I)^{-1}, \\ & (A + \alpha I)^{-1}B] \\ &= \text{rank}(A + \alpha I)^{-1}(\gamma - \rho)[\lambda I - \\ & A, (\gamma - \rho)^{-1}B] \\ &= \text{rank}[\lambda I - A, B] = n \quad (2-28) \end{aligned}$$

여기서,

$$\lambda = -\alpha + \beta / (\rho - \gamma)$$

윗식으로 부터, 시스템 $\Sigma(A, B)$ 는 가제어임을 알 수 있고 또 그 역의 관계도 만족됨을 알 수 있다.

【정리 1】

λ -평면을 ρ -평면으로 사상하는 선형분수변환이 (2-4)식과 같이 주어진다고 하자. 단, α 는 행렬 $(A + \alpha I)$ 가 정칙이 되도록 주어진다. 그리고, 시스템 $\Sigma(A, B)$ 또는 $\Sigma_D(A, B)$ 의 페루우프 행렬이 (2-4)식에 의해 식(2-23) 또는 (2-24)와 같이 정의된 시스템으로 변환된다고 하자. 이때, 변환된 시스템 행렬 Φ, Γ, F_T 는 다음과 같이 주어진다.

$$\Phi = \gamma I + \beta (A + \alpha I)^{-1} \quad (2-29a)$$

$$\Gamma = (A + \alpha I)^{-1}B \quad (2-29b)$$

$$F_T = -\beta F (A + BF + \alpha I)^{-1} \quad (2-29c)$$

또는, 역으로,

$$A = -\alpha I + \beta (\Phi - \gamma I)^{-1} \quad (2-30a)$$

$$B = \beta (\Phi - \gamma I)^{-1}\Gamma \quad (2-30b)$$

$$F = -F_T(\Phi + \Gamma F_T - \gamma I)^{-1} \quad (2-30c)$$

【증명】

$$\begin{aligned} (A + BF + \alpha I)^{-1} &= (A + \alpha I)^{-1} \\ &- (A + \alpha I)^{-1}BF(A + BF + \alpha I)^{-1} \quad (2-31) \end{aligned}$$

를 이용해서,

$$\begin{aligned} \Phi + \Gamma F_T &= f(A + BF) = \gamma I \\ &+ \beta(A + BF + \alpha I)^{-1} \quad (2-32) \end{aligned}$$

를 변형시키면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi + \Gamma F_T &= f(A + BF) = \gamma I \\ &+ \beta(A + BF + \alpha I)^{-1} = \gamma I + \beta[(A + \alpha \\ &I)^{-1} \\ &- (A + \alpha I)^{-1}BF(A + BF + \alpha I)^{-1}] \\ &= \gamma I + \beta(A + \alpha I)^{-1} - \beta(A + \alpha I)^{-1}BF \\ &(A + BF + \alpha I)^{-1} \quad (2-33) \end{aligned}$$

이와같이 원래의 시스템 행렬 A, B, F는 변환

된 시스템 행렬 Φ, Γ, F_T 와 관련된 형태의 식 (2-30)과 같이 주어진다.

【제 1】

선형분수변환 (2-4)가 좌반평면을 원판 D로 사상하도록 주어져 있다고 하고, 피드백 행렬 F_D 는 $\text{Re } \lambda_j(\Phi + \Gamma F_T) < 0$ 를 만족하도록 구해져 있다고 하자. 이때, 식(2-4)를 이용하므로서, 조건 :

$$\Lambda = \{\lambda_i : \lambda_i(A + BF) \in \text{disk } D, i=1, 2, \dots, n\} \quad (2-37)$$

을 만족하는 피드백 행렬은 식(2-30c)와 같이 주어진다.

【제 2】

선형분수변환 (2-4)가 단위원 D를 중심 : $\alpha + j0$, 반경 : r인 원판 D_r 로 사상하도록 주어져 있다고 하고, 피드백 행렬 F_T 는 조건 :

$$|\lambda_i(\Phi + \Gamma F_T)| < 1$$

을 만족하도록 선택되었다고 하자. 이때, 식(2-4)를 이용하므로서, 조건

$$|\lambda_i(A + BF + \alpha I)| < r$$

을 만족하는 피드백 행렬 F는 식(2-30c)에 의하여 주어진다.

【제 3】

α 는 행렬 $A + \alpha I$ 가 정칙이 되도록 주어진다고 하자. 주어진 시스템 $\Sigma(A, B)$ 에 대해 선형분수변환 (2-4)에 의해 얻어지는 시스템 $\Sigma(\Phi, \Gamma)$ 의 가제어지수 (controllability index)는 불변이다.

【증명】

시스템 $\Sigma(A, B)$ 에 대한 가제어행렬의 랭크를 다음과 같이 나타내도록 하자.

$$\text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{r-1}B] \quad (2-34)$$

이때, 만일 다음과 같은 식에서 그 랭크가 윗식의 랭크와 같다고 하면, 증명은 분명하게 된다.

$$\text{rank}[\Gamma, \Phi\Gamma, \Phi^2\Gamma, \dots, \Phi^{r-1}\Gamma] \quad (2-35)$$

식 (2-34)를 이용하고, 윗식을 다시 쓰면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{rank}[(A + \alpha I)^{-1}B, (\gamma I + \beta(A + \alpha I)^{-1}) \\ & (A + \alpha I)^{-1}B, \dots \\ & \dots, (\gamma I + \beta(A + \alpha I)^{-1})^{r-1}(A + \alpha I)^{-1}B] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{rank}[(A + \alpha I)^{-1}B, \beta (A + \alpha I)^{-2}B, \\
 &\dots, \beta^{r-2}(A + \alpha I)^{-r+1}B, \beta^{r-1}(A + \alpha I)^{-r}B] \\
 &= \text{rank}(A + \alpha I)^{-r}[(A + \alpha I)^{r-1}B, \\
 &\quad \beta (A + \alpha I)^{r-2}B, \dots, \beta^{r-2}(A + \alpha I) \\
 &B, \beta^{r-1}B] \\
 &= \text{rank}[A^{r-1}B, \beta A^{r-2}B, \dots, \beta^{r-2}AB, \\
 &\beta^{r-1}B] \\
 &= \text{rank}[\beta^{r-1}B, \beta^{r-2}AB, \dots, \beta A^{r-2}B, \\
 &A^{r-1}B] \\
 &= \text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{r-1}B]T
 \end{aligned}$$

여기서,

$$T = \text{diag}\{\beta^{r-1}I, \beta^{r-2}I, \dots, \beta I, I\} \quad (2-36)$$

행렬 T는 정칙(nonsingular)이므로, 식(2-35)의 랭크는 정칙변환 T에 대해 불변이다. 따라서, 식(2-34)의 랭크는 식(2-35)의 랭크와 같게 된다. 그래서 가제어성 지수는 선형분수변환에 대해 불변임을 알 수 있다.

3. 지정한 영역내에 극을 가진 레규레이터 설계

본 절에서는 2절에서 얻어진 결과를 이용하여 지정한 영역내에 극을 가진 레규레이터의 설계에 대해 생각하기로 한다.

3.1 문제 설정

2절에서 보여진 것과 같은 시스템 $\Sigma(A, B)$ 와 $\Sigma_D(A, B)$ 를 생각하기로 한다. 단, 이들 시스템은 가제어(controllable) 또는 可到達(reachable)이라고 한다. 시스템 $\Sigma(A, B)$ 와 $\Sigma_D(A, B)$ 에 대한 상태 피이드백칙은 각각 다음과 같이 주어진다 하자.

$$u(t) = Fx(t) \quad (3-1)$$

$$u(k) = Fx(k) \quad (3-2)$$

이때, 이들 시스템들에 대한 페루우프 시스템은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (3-3)$$

$$x(k+1) = (A + BF)x(k) \quad (3-4)$$

이들 페루우르계의 극을

$$\lambda_i(A + BF), i=1, 2, \dots, n \quad (3-5)$$

와 같이 나타낸다고 하면 고려되어야만 할

문제는 다음과 같다.

시스템 $\Sigma(A, B)$ 와 $\Sigma_D(A, B)$ 의 페루우프 극들이 그림 3에 보인 것과 같은 지정한 영역내에 배치되도록 하는 피이드백칙을 구하라.

3.2 극배치 알고리즘

선형분수변환 (2-1)에서 $c \neq 0$ 일 경우에 대해 제안하는 극배치법의 기본적인 개념을 생각하도록 한다. 즉, $c=0$ 일 경우는 단순한 선형분수변환으로 됨으로, 그 일반적인 경우를 생각하기로 한다.

ρ -평면을 λ -평면으로 사상하는 선형분수변환은 식 (2-4)와 같이 주어진다고 한다. 식(3-3) 또는 (3-4)의 페루우프 행렬이 식(2-4)에 의하여 변환된다고 하고, 변환된 시스템의 상대방정식은 연속 시스템과 이산 시스템에 대해 각각 (2-23), (2-24)와 같이 주어진다 하겠다. 단, 그들의 상태 피이드백칙은 각각 (3-1), (3-2)와 같이 주어진다 하겠다.

시스템 $\Sigma(A, B)$ 의 극배치에 대한 하나의 결과를 얻기위해, 잘 알려져 있는 리카치(Riccati)방정식을 이용하면, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

【정리 2】

선형분수변환 (2-4)는 지정한 영역 D를 복소수 좌반평면으로 사상하도록 주어져 있다고 하고, 변환된 시스템 $\Sigma(\Phi, \Gamma)$ 에 대한 상태 피이드백칙이 다음과 같이 주어진다 하자.

$$\begin{aligned}
 u_r(t) &= F_r x_r(t) \\
 &= -R^{-1}\Gamma^T P x_r(t)
 \end{aligned} \quad (3-6)$$

여기서, P는 리카치 방정식:

$$P\Phi + \Phi^T P - P\Gamma R^{-1}\Gamma^T P = -Q \quad (3-7)$$

의 正定(positive definite)해이고, R은 正定행렬, Q는 행렬의 쌍 $(\Phi, Q^{1/2})$ 이 가관측(observable)으로 되도록 주어지는 행렬이다. 이때, 시스템 $\Sigma(A, B)$ 의 페루우프 극은 지정한 영역내 D에 배치된다. 단, 상태 피이드백칙 F는 식(2-30c)에 의해 주어진다.

【증명】

만일 상태 피이드백칙 (3-6)이 시스템 $\Sigma(\Phi, \Gamma)$ 에 주어진다고 하면, 이때, 그 페루우프계의 극은 복소수 좌반평면내에 배치되게 된

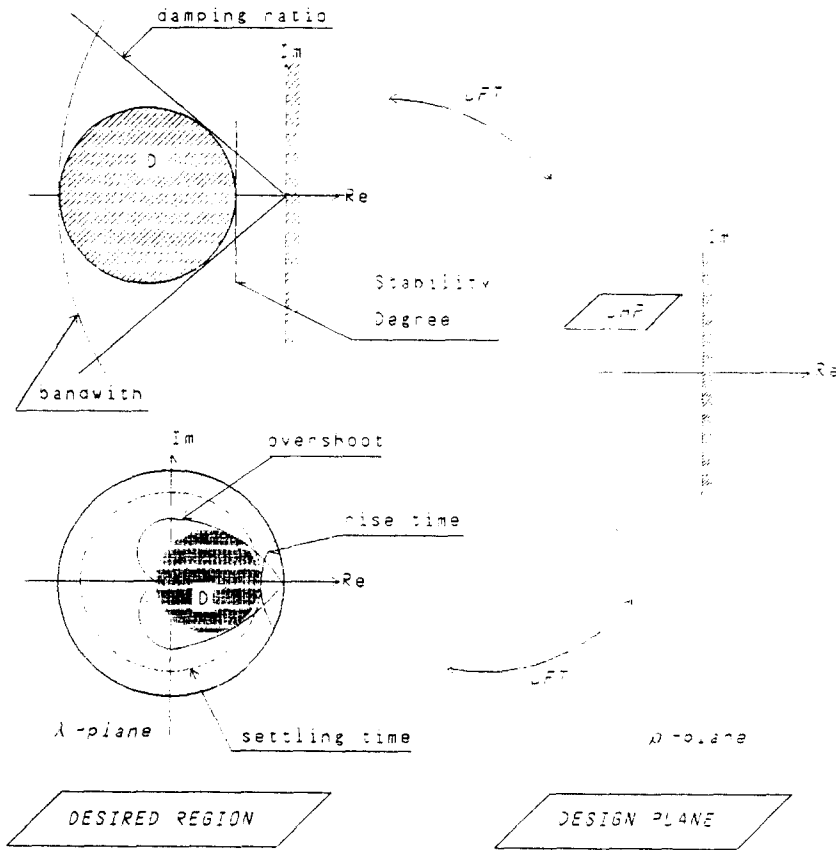


Fig. 3 Specified Regions and Design Plane for Pole Assignment.

다. F_T 를 식(2-23c)에 대입하므로써, 시스템 $\Sigma(A, B)$ 에 대한 폐루우프 시스템의 모든 극은 보조정리 1과 앞절의 결과에 의해 지정한 영역내에 배치됨을 알 수 있다.

【계 3】

선형분수변환(2-4)는 지정한 영역 D 를 단위 원판으로 사상하도록 주어져 있다고 하고, 변환된 시스템 $\Sigma_D(\Phi, \Gamma)$ 에 대한 상태 피드백칙이 다음과 같이 주어진다 하자.

$$u_T(k) = F_T x_T(k) \\ = (R + \Gamma^T P \Gamma)^{-1} \Gamma^T P \Phi x_T(k) \quad (3-8)$$

여기서, P 는 리카치 방정식:

$$P = \Phi^T P \Phi + Q - \Phi^T P \Gamma (R + \Gamma^T P \Gamma)^{-1} \Gamma^T P \Phi \quad (3-9)$$

의 正定해이고, R 은 正定행렬, Q 는 행렬의 쌍

$(\Phi, Q^{1/2})$ 이 가관측으로 되도록 주어지는 행렬이다. 이때, 시스템 $\Sigma(A, B)$ 의 폐루우프 극은 지정한 영역내 D 에 배치된다. 단, 상태 피드백칙 F 는 식(2-30c)에 의해 주어진다.

위에서 보인 극배치 알고리즘은 그림 4와 같이 실현되어 질 수 있고 그림 5와 같은 개념도로 표현되어 짐을 알 수 있다.

【주의】

1) 다음과 같은 선형분수변환을 생각하자.

$$p = f(\lambda) = (\lambda + r + \alpha)^{-1} (\lambda - r + \alpha) \quad (3-10)$$

식(3-10)은 식(2-1)에서, $a=1, b=\alpha-r, c=1, d=\alpha+r$ 의 경우임을 알 수 있고, 이 식은 그림 3에 보인것과 같은 영역 D (중심: $-\alpha$, 반경: r)를 복소수 좌반평면으로 사상한다. 정리 1로부터 시스템 행렬 Φ, Γ, F_T 는 다음과

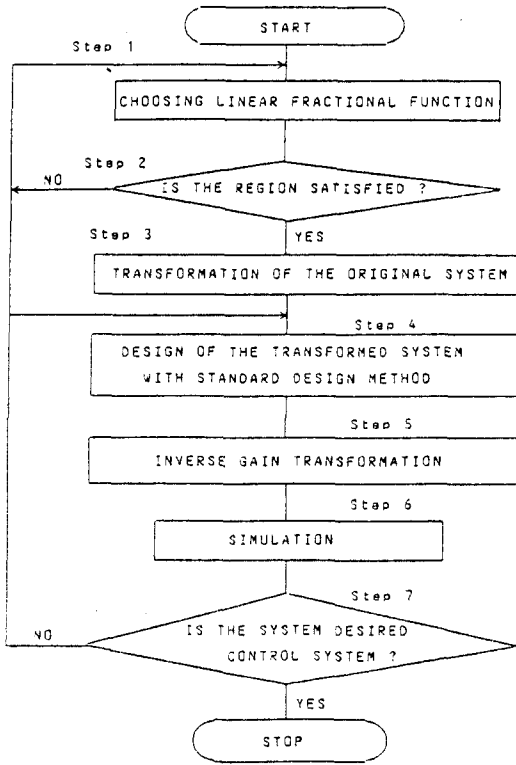


Fig. 4 Design sequence for CAD.

같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\Phi = (A + (\alpha + r)I)^{-1}(A - (r - \alpha)I) \quad (3-11a)$$

$$\Gamma = (A + (\alpha + r)I)^{-1}B \quad (3-11b)$$

$$F_T = 2rF(A + (\alpha + r)I + BF)^{-1} \quad (3-11c)$$

역으로,

$$A = r(I - \Phi)^{-1}(I + \Phi) - \alpha I \quad (3-12a)$$

$$B = 2r(I - \Phi)^{-1}\Gamma \quad (3-12b)$$

$$F = F_T(I - \Phi + \Gamma F_T)^{-1} \quad (3-12c)$$

2) 다음과 같은 선형분수변환을 생각하자.

$$\rho = f(\lambda) = 1 + 2r(\lambda + \alpha)^{-1} \quad (3-13)$$

윗식은 식(2-1)에서, $a=1, b=2r+\alpha, c=1, d=\alpha$ 일 경우이며, 이것은 영역 D(중심: $-\alpha$, 반경: r)를 복소수 좌반평면으로 사상함을 알 수 있다. 정리 1로부터 시스템 행렬 Φ, Γ, F_T 는 다음과 같이 주어진다.

$$\Phi = (A + \alpha I)^{-1}(A + (2r + \alpha)I) \quad (3-14a)$$

$$\Gamma = (A + \alpha I)^{-1}B \quad (3-14b)$$

$$F_T = -2rF(A + \alpha I + BF)^{-1} \quad (3-14c)$$

역으로,

$$A = -\alpha I + 2r(\Phi - I)^{-1} \quad (3-15a)$$

$$B = 2r(\Phi - I)^{-1}\Gamma \quad (3-15b)$$

$$F = -F_T(\Phi - \Gamma F_T - I)^{-1} \quad (3-15c)$$

【예제】

다음과 같은 선형시불변 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3-16)$$

여기서,

$$A = \begin{pmatrix} -0.0158 & 0.02633 & -9.81 & 0 \\ -0.1571 & -1.03 & 0 & 120.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 5.274E-4 & -0.0165 & 0 & -1.466 \end{pmatrix}$$

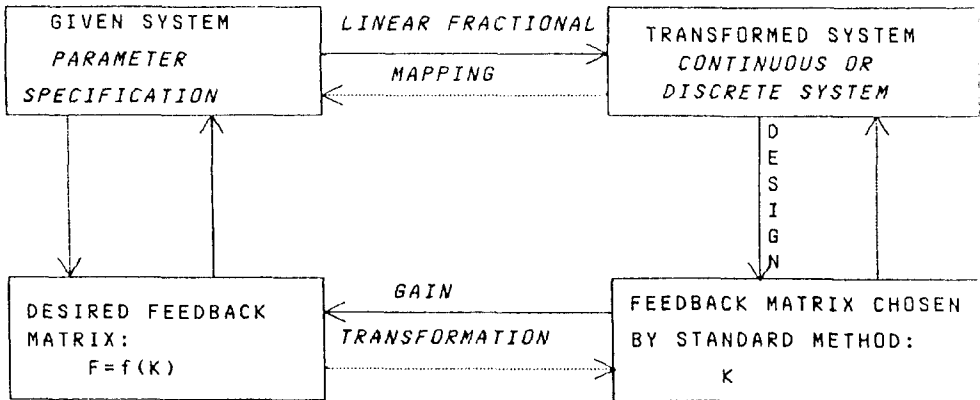


Fig. 5 Control system design by linear fractional transformation.

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.496 \\ 0 \\ -5.565 \end{pmatrix}$$

식(3-10)에서 α, r 은 각각 6, 2로 주어진다. 이 때 선형분수변환(3-10)에 의해 변환된 시스템의 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.00203 & -0.614 \\ -0.0115 & 0.4502 & 0.01409 \\ -1.423E-6 & 0.000174 & 0.5 \\ 1.139E-5 & -0.00139 & 1.39E-5 \\ 0.05664 \\ 10.142 \\ 0.07332 \\ 0.4135 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0.0836 \\ 12.8044 \\ -0.81933 \end{pmatrix}$$

$Q=I, R=I$ 의 값으로 리카치 방정식을 풀어, 다음과 같은 상태 피이드백 행렬을 얻는다.

$$F_T = -[9.224E3 \quad -1.664E2 \quad 1.1347E4 \quad -2.6123E2]$$

식(3-15c)로 부터 시스템(3-16)에 대한 피이드백 행렬:

$$F = -[-24.252 \quad 0.30042 \quad -0.09343 \quad 3.4272]$$

을 얻는다. 이 때 시스템(3-16)의 페루우프 극은 중심: $-6+j0$, 半徑: 2인 영역 D 내에 배치되어 있음을 알 수 있다. 즉,

$$\lambda_1(A+BF) : \{-6.0613, -7.71016, -5.3327 \pm j 0.01214\} \in D$$

4. 앞 결과들의 확장

현대제어 이론으로 부터 나타나는 제어계 설계문제들은 일반적으로 레귤레이터 구성 문제로 귀착되고 있다는 점에서, 그 대표적인 예로서 앞절에서 레귤레이터 설계문제에 대해 설명했다. 그러나, 선형분수변환법이 이용될 수 있는 분야는 넓다고 할 수 있다. 예를 들면, 로바스트(robust)한 제어계 설계,¹²⁾ 연속·이산 gain 변환,³⁾ 리카치 방정식의 연속·이산 변환,⁷⁾ 미끄럼 모-드(sliding mode)를 가진 가변 구조제에 대한 스위칭면(switching mode)구

성¹³⁾등의 응용이 가능하다고 할 수 있다.¹⁴⁾

5. 결론

본 논문에서는 선형분수변환을 다변수 제어계 설계과정에 보다 일반적이고 쉽게 적용할 수 있는 하나의 방법을 제안하고, 그 설계에 대한 하나의 예제 문제로서 지정한 영역내에 극을 가진 레귤레이터의 설계에 대해 논한 후, 본 설계이론의 다른 설계문제에 대한 응용에 대해 간단히 언급했다.

본 설계법은 주어지는 시스템이 연속 또는 이산일 경우라 하더라도, 그 개개의 시스템에 대한 설계는 그 시스템 자체에 구애됨이 없이 각 시스템에서 잘 알려져 있는 표준적인 설계법에 의해 주어진 설계사양을 만족하도록 하는 설계가 가능하게 된다. 즉, 주어진 시스템이 연속시스템일 경우, 그 설계는 연속시스템의 설계법 그 자체뿐만 아니라, 이산시스템의 설계법 까지도 유연성 있게 이용할 수 있다.

특히, 극을 구체적으로 지정하는 지침에 결핍되어 있을 경우나, 페루우프계의 특성인 속응성, 진동특성, 안정도등을 고려할 경우 그 유효성은 더욱 더 높다고 할 수 있다.

參考文獻

- 1) B.C.Kuo: Digital Control Systems, Holt, Rinehart and Winston, Inc.(1980)
- 2) B.C.Kuo and D.W.Peterson: Optimal Discretization of Continuous Data Control System, Automatica, Vol.9, pp.125-129(1973).
- 3) D.L.Kleinman and P.K.Rao: Continuous - Discrete Gain Transformation Methods for Linear Feedback Control, Automatica, Vol.13, pp.425-428(1977).
- 4) S.M.Melzer and B.C.Kuo: Sampling Sensitivity of the Optimal Sampled Data Linear Regulator, Automatica, Vol.7, pp.367-370(1971).
- 5) K.L.Hitz and B.D.O.Anderson: Iterative Method of Computing the Limiting Solution of

- the Matrix Riccati Differential Equation, Proc.IEE, Vol.119, No.9, pp.1402-1406(1972)
- 6) Y.Bar-Ness and A.Halbersberg: Solution of the Singular Discrete Regulator Problem Using Eigenvector Methods, INT.J.Control Vol.31, No.4, pp.615-625(1980).
 - 7) R.Kondo and K.Furuta: On the Bilinear Transformation of Riccati Equations, IEEE Trans. Auto. Control, Ac-31, No.1, pp.50-54(1986).
 - 8) E.Jonckheere and R.Li: Generalization of Optimal Hankel-Norm and Balanced Model Reduction by Bilinear Mapping, INT. J Control, Vol.45, No.5, pp.1751-1769(1987).
 - 9) M.G.Safonov, E.A.Jonckheere, M.Verma and D.J.N.Limebeer: Synthesis of Positive Real Multivariable Feedback Systems, INT.J Control, Vol.45, No.3, pp.817-842(1987)
 - 10) R.V.Churchill, J.W.Brown and R.F.Verhey: Complex Variables and Applications, McGraw - Hill International Book Company(1974).
 - 11) K.J. Åstrom and B. Wittenmark: Computer Controlled Systems, Theory and Design Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, (1984)
 - 12) K. Furuta: Alternative Robust Servo-Contrd System and Its Digital Control, INT. J Control, Vol. 45, No. 1, pp. 183-194(1987).
 - 13) V.I.Utkin: Variable Structure Systems with Sliding Modes, IEEE Trans. Auto. Control, Ac-22, No, 2, pp.212-222(1977).
 - 14) S.B.Kim: Design of Multivariable Control Systems by a Linear Fractional Transformation Approach, Doctoral Thesis T.I.T.(1988).
 - 15) F.R. Gantmacher: The Theory of Matrices Chelsea Publishing Company(1960).
 - 16) H. Kwakernaak and R. Sivan: Linear Optimal Control Systems, Wiley - Interscience(1972).
 - 17) F.F. Groutage, L.B. Volfson and A.M Schneider: s-Plane to z-Plane Mapping Using a Simultaneous Equation Algorithm Based on the Bilinear Transformation, IEEE Trans. Auto. Control, Ac-32, No.7, pp.635-637(1987).
 - 18) K.Furuta and S.B.Kim: Pole Assignment in a Specified Disk, IEEE Trans. Auto. Control, Ac-32, No.5, pp.423-427(1987).
 - 19) S.B.Kim and K. Furuta: Regulator Design with Poles in a Specified Region, INT. J. Control, Vol. 47, No.1, pp.143-160(1988).