

마이크로 컴퓨터를 이용한 線形制御系の  
最適設計에 관한 研究  
-PI제어계 설계-

양 주 호

부산 수산 대학  
(1989년 1월 15일 접수)

Study on the Optimal Design of Linear Control System Using Microcomputer  
-Design of PI Control System-

Joo-Ho YANG

National Fisheries University of Pusan

(Received January 15, 1989)

Recently microcomputers have come into wide use in the field of the control. They are used not only as monitors and as controllers in the various plant control systems but also as the Computer Aided Design of control systems.

As an example of the design and the realtime control of the control system using Microcomputer, the optimal design of the control system of which the numerator of the transfer function is constant have been reported by authors.

In this paper, author proposes a method to design the optimal controller about the control system of which the numerator of the transfer function is not constant, and develops the program of the response simulation.

序 論

最近 마이크로 컴퓨터는 급진적으로 널리 보급되고 있으며, 여러분야에서 활용되고 있다. 計測 및 制御分野에서도 CAD(computer aided design)<sup>1-3)</sup> 및 實時間制御(real time control)에 많이 이용되고 있다<sup>3-5)</sup>.

制御分野에서의 한 應用 예로써 最適制御理論을 適用하여 플란트의 傳達函數의 분자가 상수로 주어지는 系에 대해 마이크로 컴퓨터를 이용한 最適制御系の 설계 및 實時間制御에 대해서는 著者 등이 이미 發表한 바 있다<sup>6-7)</sup>.

상수로 주어지지 않는 系에 대해서 새로운 상태를 도입하는 한 방법을 제시하고 이 새로운 상태 방정식으로 주어지는 오그멘트 시스템에 대해 最適制御理論에 입각하여 制御系를 구성하고, 구성된 制御系에 대해 응답 시뮬레이션을 통해 그 응답성을 검토하고자 한다. 그리고 이러한 일련의 설계, 응답 시뮬레이션 및 그래픽 등을 현재 날

本 研究에서는 制御對象의 傳達函數의 분자가 리보급되어 있는 IBM-PC계의 마이크로 컴퓨터를 利用하여 行할수 있는 프로그램을 아울러 개발한다.

최적制御 理論에 의한 PI제어계의 구성

식(2-1)으로 주어지는 n차 시스템에 대해 생각하자.

$$G(S) = \frac{\rho(S)}{U(S)} = \frac{b_1 S^{n-1} + b_2 S^{n-2} + \dots + b_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \dots + a_n} \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

이 식을 phase variable companion form으로 표시하면

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_n & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (2.2)$$

$$\rho = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1] [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n]^T \quad \dots \dots (2.3)$$

으로 되고 이를 Block diagram으로 나타내며 Fig.1과 같다.

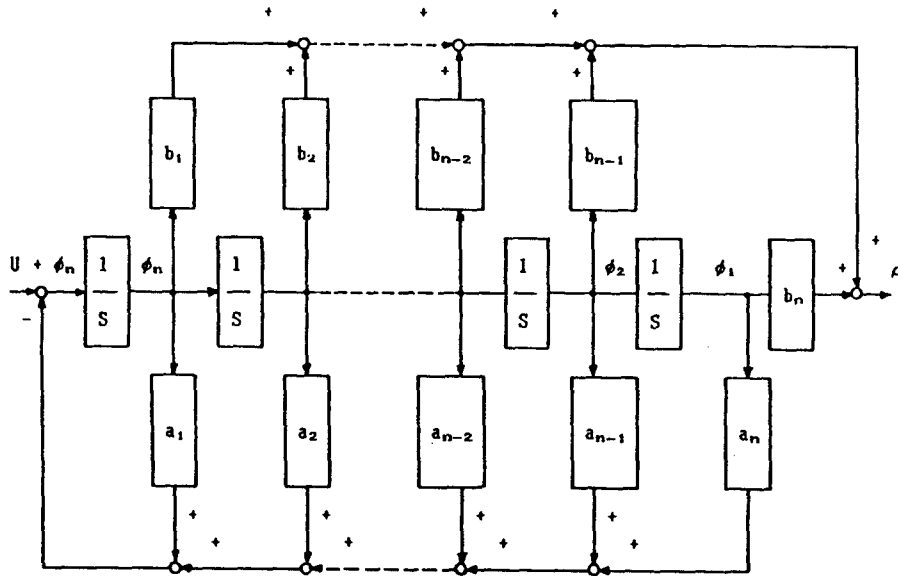


Fig. 1 Block diagram.

여기서 출력 rho 를 狀態 xi\_0라 두면

$$\begin{aligned} \text{즉, } \rho &= \xi_0 = b_n \xi_1 + b_{n-1} \xi_2 + \dots \\ &\quad + b_2 \xi_{n-1} + b_1 \xi_n \\ \dot{\rho} &= \dot{\xi}_0 = b_n \dot{\xi}_1 + b_{n-1} \dot{\xi}_2 + \dots \\ &\quad + b_2 \dot{\xi}_{n-1} + b_1 \dot{\xi}_n \\ &= -b_1 a_n \xi_1 + (b_n - b_1 a_{n-1}) \xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (b_{n-1} - b_1 a_{n-2}) \xi_3 \\ &+ (b_{n-1+2} - b_1 a_{n-1+1}) \xi_4 \\ &+ \dots + (b_2 - b_1 a_1) \xi_n + b_1 u \end{aligned}$$

으로 되어 식(2.2) 및 식(2.3)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_0 \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 a_n & b_n - b_1 a_{n-1} & \dots & b_{n-i+2} - b_1 a_{n-i+1} - b_2 - b_1 a_1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \dots 0 \\ \vdots & & & \dots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots a_{n-1+1} \dots a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

rho = [1 0 ... 0] [xi\_0 xi\_1 ... xi\_n]^T ... (2.5)  
식(2.4) 및 식(2.5)로 표시되는 시스템에 대해

最適制御 理論을 적용하기 위하여 다음과 같은 새로운 狀態를 정의하면

$$\int (\rho^0 - \rho) dt - x_{1s} = x_1(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \rho^0 - \rho = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\rho = -\xi_0$$

$$= b_1 a_n x_3 + (-b_n + b_1 a_{n-1}) x_4 + \dots + (-b_2 + b_1 a_1) x_{n+2} - b_1 (u - a_n \xi_{1s})$$

$$x_3 = \xi_1 - \xi_{1s}$$

$$\dot{x}_3 = \xi_1 = \xi_2 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \xi_2 = \xi_3 = x_5$$

⋮

$$\dot{x}_{n+1} = \xi_{n-1} = \xi_n = x_{n+2}$$

$$\dot{x}_{n+2} = \dot{\xi}_n = -a_n \xi_1 - a_{n-1} \xi_2 - \dots - a_1 \xi_n + u$$

$$= -a_n x_3 - a_{n-1} x_4 - \dots - a_1 x_{n+2} + (u - a_n \xi_{1s})$$

으로 되어 다음과 같은 오그먼트 시스템 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & +b_1 a_n & -b_n + b_1 a_{n-1} & \dots & -b_2 + b_1 a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \bar{u} \dots \dots \dots (2.6)$$

$$\rho = [0 \ -1 \ 0 \ \dots \ 0] [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n+2}]^T + \rho^0 \quad (2.7)$$

단,  $x_{1s}$  :  $\rho^0$ 에 대응하는  $x_1$ 의 값

$\xi_{1s}$  :  $\xi_1$ 의 정상치

$\bar{u} = u - a_n \xi_{1s}$ 로써 정상 상태에서 0으로 되는 값이다.

$\rho^0$  : plant의 목표치

또한,  $\rho$ 의 초기치가 0이라고 하는 것은  $x_2$ 의 초기치가  $x_2(0) = -\rho(0) + \rho^0$ 로 부터  $x_2(0) = +$

$\rho^0 = b_1 \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} U(S)$ 를 의미한다.

식(2.6) 및 식(2.7)에 대해 식(2.8)로 주어지는 2차형식의 평가함수를 최소화하는 조작량  $\bar{u}$ 를 구하면 식(2.9)와 같다.

$$J = \int (x^T Q x + \bar{u}^T r) dt \dots \dots \dots (2.8)$$

$$\bar{u} = -1/r B^T K x \\ = -\sum f_i x_i \dots \dots \dots (2.9)$$

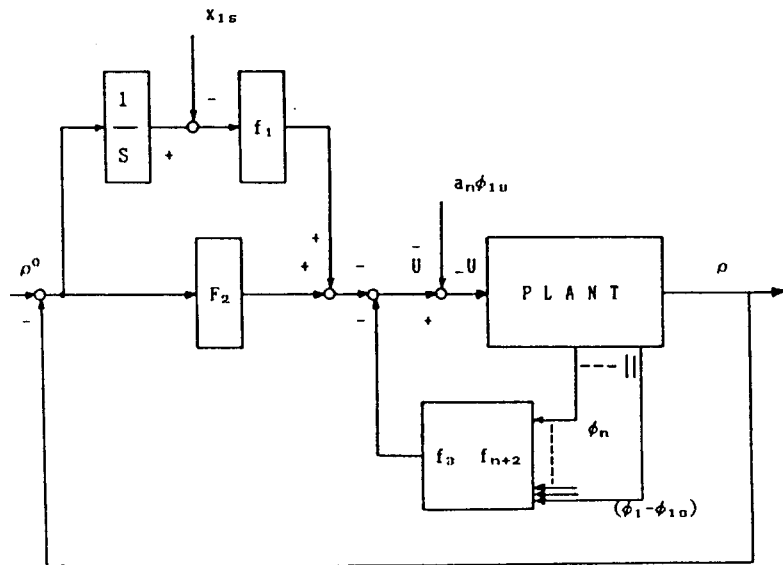


Fig. 2 Block diagram of control system designed by control law.

응답 시뮬레이션 및 고찰

여기서  $K$ 는 다음식으로 주어지는 Riccati방정식의 해이다.

$$A^T K + KA - KBr^{-1}B^T K + Q = 0 \dots\dots\dots (2.10)$$

$Q$ ; symmetric positive semidefinite,  $r \neq 0$

$K$ ; symmetric positive definite.

그리고 식(2.6), (2.7), (2.9)를 利用하여 制御系를 구성하면 Fig. 2와 같이된다.

이상의 最適制御系の 設計理論을 바탕으로 응답 시뮬레이션과 실시간제어를 위해 프로그램한 플로우차트를 표시하면 Fig. 3과 같다.

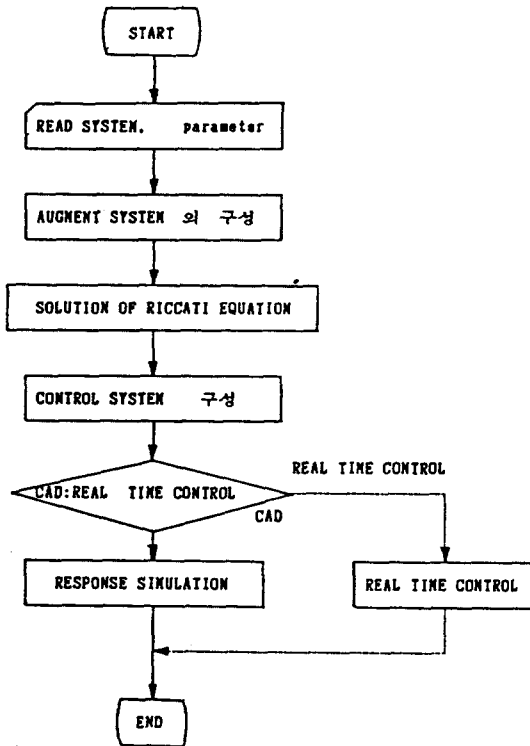


Fig. 3 Flow chart.

예제로써 플란트의 전달함수가 다음과 같이 주어지는 시스템을 생각하자.

$$G(S) = \frac{\rho(S)}{U(S)} = \frac{S+2}{S^2+4S+3} \dots\dots\dots (3.1)$$

$$; (a_1=4, a_2=3, b_1=1, b_2=2)$$

$$\text{또는, } \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\rho = [2 \ 1] [\xi_1 \ \xi_2]^T \dots\dots\dots (3.3)$$

오그먼트 시스템은

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{u} \dots\dots\dots (3.4)$$

$$\rho = [0 \ 1 \ 0 \ 0] [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T + \rho^0 \dots\dots\dots (3.5)$$

으로 되고 식(2.8)의 2차형식의 평가함수 중의 행렬  $Q$  및  $r$ 의 값에 대한 최적계인은 Table 1과 같고 응답곡선은 Fig. 4~Fig. 9와 같다.

Fig. 2의 制御系の 구성에서  $\rho^0$ 에 대응하는  $x$ 의  $x_1$ 에  $f$ 배한 값과  $a_{11}\xi_1$ 는 결국 같은 값으로 실제제어계의 구성에서는 고려하지 않아도 되는

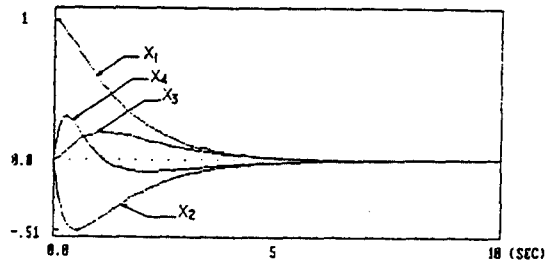


Fig. 4 Simulation of the system( $Q=\text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1]$   $r=0.1$ ).

Table 1. OPTIMAL GAIN

Q=diag[q1, q2, q3, q4]				r	Optimal gain			
q1	q2	q3	q4		f1	f2	f3	f4
1.0	1.0	1.0	1.0	0.1	-3.161	-4.805	-2.945	-1.301
100.0	10.0	1.0	1.0	0.1	-31.631	-13.434	-2.996	-1.792
10.0	100.0	1.0	1.0	0.1	-9.718	-34.588	-2.925	-1.792
1.0	10.0	100.0	1.0	0.1	-2.960	-13.588	6.497	-3.529
1.0	1.0	10.0	100.0	0.1	-3.162	-10.393	-2.948	20.914
1.0	1.0	1.0	1.0	10.0	-3.303	-1.337	-2.145	-1.112

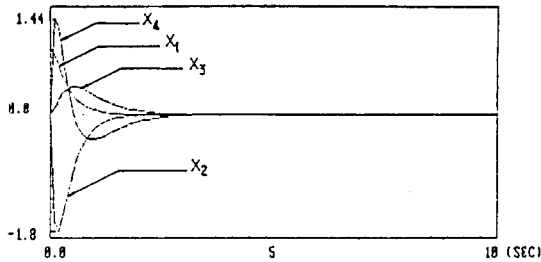


Fig. 5 Simulation of the system( $Q=\text{diag}[100 10 1 1]$   $r=0.1$ ).

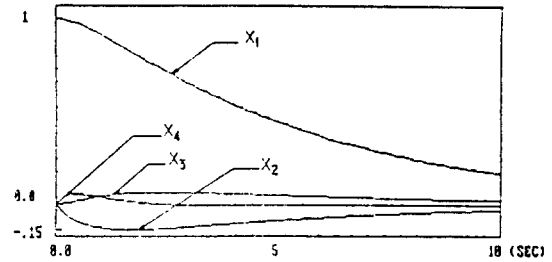


Fig. 9 Simulation of the system( $Q=\text{diag}[1 1 1 1]$   $r=10.0$ ).

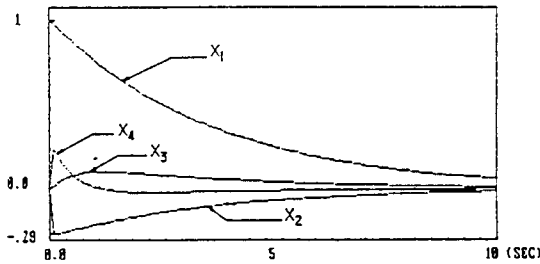


Fig. 6 Simulation of the system( $Q=\text{diag}[10 100 1 1]$   $r=0.1$ ).

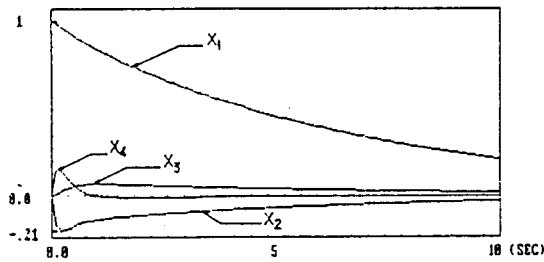


Fig. 7 Simulation of the system( $Q=[1 10 100 1]$   $r=0.1$ ).

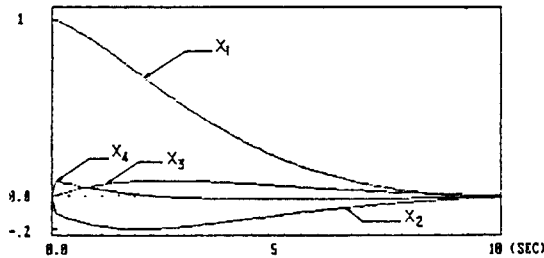


Fig. 8 Simulation of the system( $Q=\text{diag}[1 1 10 100]$   $r=0.1$ ).

값이다. 그리고 狀態  $x_3 \sim x_{n+2}$ 는 실제의 制御계에서는  $\xi_1 \sim \xi_{15} \sim \xi_n$ 으로 대치되며 狀態  $x_1, x_2$ 는  $\rho^0 - \rho$ 의 값으로부터 PI동작을 하는 制御 알고리즘을 利用할 수 있다.

또한, Table 1에서 보는 바와 같이 각 狀態의 하중 행렬  $Q$ 의 각각의 계수가 크게 됨에 따라 그 계수에 대응하는 狀態의 최적계인의 절대값이 크게 됨을 알 수 있으며 입력변수에 대한 하중계수  $r$ 이 크게 됨에 따라 최적계인의 절대값이 모두 작게 됨을 알 수 있다.

그리고 Fig. 4~Fig. 9의 응답 시뮬레이션 곡선으로부터 알 수 있듯이 본 연구에서 제안하는 방법으로 制御系를 設計하면 양호한 制御가 가능하다.

## 결 론

이상과 같은 제어계의 구성방법으로 제어계를 설계할 경우에는 오차신호에 대한 PI제어기와 플란트의 상태피드백을 아울러 행하는 제어제로 됨을 알 수 있으며, 또한 응답 시뮬레이션 결과로부터 알 수 있듯이 본 연구에서 제안하는 방법으로 제어기를 구성할 경우 양호한 제어가 가능하다.

Fig. 3의 플로우차트의 그림에서 점선으로 표시된 실시간제어실험의 프로그램은 구성은 되어 있으나 실제로 실험을 행하지 못한 아쉬움이 있으며, 다음 기회에 이 부분의 실험도 행하고자 한다.

## 參考文獻

- 1) FURUTA, K. H. KAJIWARA and Y.

양 주 호

- OHYAMA(1982): Control System Design for Furnace by using CAD. IFAC Theory and Application of Digital Control, New Delhi, India, 527-532.
- 2) 古田勝久(1989) : 制御系 CAD System, 日本電氣學會雜誌 106(2), 105-112.
- 3) FURUTA, K. T. CHIKADA and H. KAJIWARA(1989): Computer Aided Design and Computer Control using Microcomputer IFAC. Computer Aided Design. Indiana USA, 425-429.
- 4) WALTER S. HEATH(1984): A System Executive for Real Time Microcomputer Programs. IEEE MICRO, 20-32.
- 5) CROWL. DANIEL A.(1985): A Real Time Fortran Executive. IEEE MICRO, 48-66.
- 6) 양주호, 하주식(1987) : PID 制御器의 最適設計에 관한 研究(2), 韓國舶用機關會誌 11(3), 227-235.
- 7) 양주호, 하주식(1987) : 마이크로 컴퓨터를 이용한 最適 피드백 制御에 관한 研究, 韓國舶用機關學會誌 11(4), 287-295.