

가변구조제어계의 시변 슬라이딩 레짐에  
관한 연구

金 重完\* 李 萬炯\*\*

A Study on Time-Varying Sliding Regime of VSC System

Joong-Wan Kim and Man-Hyung Lee

**ABSTRACT**

Variable structure control (VSC) systems control the state vectors using sliding regime (SR) constructed switching logic, switching plane and control law.

Saturation function switching logic is used to improve the drawback which occurs in traditional sign function switching logic.

Switching plane with time-varying parameter is proposed to improve the drawback which occurs in switching plane with constant parameter and it is suggested the control law which has time-varying parameter.

The stability of VSC system controlled by proposed time-varying SR is discussed, and the good control behavior was shown through computer simulation using proposed SR.

Key Words

Variable structure control system (가변구조제어계),  
Sliding regime (슬라이딩레짐), Switching plane (스위칭평면),  
Switching logic (스위칭논리), Stochastic system (추계학적 시스템)

\* 正會員 : 東亞大工大 機械工學科 助教授

\*\* 正會員 : 釜山大工大 精密機械工學科 教授 · 工博

# 1. 서 론

가변구조제어계(variable structure control system)는 상태공간(state space)에 스위칭평면(switching plane)을 설정하여 상태벡터가 이 평면을 따라 운동하도록 제어기(controller)에 스위칭논리(switching logic)를 구성하여 이 논리의 부호변화에 따라서 시스템의 구조를 변화시킴으로써 슬라이딩모드(sliding mode)를 발생시킨다.<sup>1,2)</sup> 이러한 법칙을 슬라이딩레짐(sliding regime)이라 하며 1950년대 부터 소련에서 연구되기 시작하여 오늘날에는 적응제어(adaptive control)와 더불어 그의 응용범위가 확대되고 있다.<sup>3)-6)17)18)</sup> 슬라이딩레짐에 의하여 시스템이 슬라이딩모드(sliding mode)에 들어가면, 가변구조제어는 시스템의 파라미터변동(parameter variation)과 외란(disturbance)에 대하여 둔감(Insensitive)한 성질을 나타내며, 운동의 응답(response)속도를 향상시키고 정상상태오차(steady state error)를 작게하는 성질을 갖는다.<sup>11)</sup> 특히 시스템의 구조가 가변구조로 변환되므로 불안정한(unstable) 시스템을 안정한(stable) 시스템으로 변환할 수 있으며 비선형시스템의 제어에도 적용가능하다.<sup>2)16)</sup> 가변구조제어계의 부호함수(sign function) 스위칭논리는 시스템의 총체적 점근적 안정성(globally asymptotically stability)을 확고하게 보장하지만 상태벡터의 거동을 채터링(chattering) 하게 한다.<sup>2)4)-6)</sup> 채터링현상은 시스템에 나쁜 영향을 주게 되므로 채터링현상을 제거하기 위하여 스위칭논리를 인계함수로 도입하는 방법이 모색되었다.<sup>2)1)</sup> 슬라이딩모드의 기준이 되는 스위칭평면은 상수계수와 상태벡터의 함수로 정의된다.<sup>2)10)14)</sup> 이러한 스위칭평면을 적용하면 시스템의 임의의 초기위치에서 스위칭평면에 도달할 때 까지 도달시간(reaching time)이 존재하고, 이 기간 동안의 제어는 슬라이딩모드에 의한 제어가 아니므로 시스템파라미터의 변화나 외란이 존재할 때, 가변구조제어의 장점을 얻을 수 없다. 이러한 단점을 해결하기 위하여 시스템의 초기위치

에서 부터 슬라이딩모드를 발생시키는 시변스위칭평면을 연구하게 되었다.<sup>13)</sup> 가변구조제어계의 제어법칙은 상수계수와 상태벡터 및 스위칭논리의 함수로 정의되며 상수계수는 Lyapunov 함수에 의한 안정판별법으로 부터 구해지는 충분한 범위의 값을 선택한다.<sup>12)15)</sup> 안정조건을 만족하는 상수계수를 갖는 제어법칙을 사용하면 시스템은 총체적 점근적으로 안정하며 스위칭평면을 따라 운동하는 슬라이딩모드가 보장된다. 그러나 기존의 시불변 슬라이딩레짐 (부호함수 스위칭논리, 고정된 스위칭평면, 상수계수를 갖는 제어법칙)에 의한 가변구조제어는 채터링현상의 발생, 도달기간동안의 외란종속, 제어 초기에 발생하는 매우 큰 입력, 스위칭평면에 도달하는 순간 입력의 급격한 방향 전환 등이 문제점으로 남는다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제들을 개선하기 위하여 슬라이딩레짐을 시변화하고, 시변슬라이딩레짐의 안정성을 검토하였으며, 시뮬레이션을 통하여 시변슬라이딩레짐의 실용성과 안정성을 확인하였다.

## 2. 가변구조제어계의 이론

### 2.1 고정된 슬라이딩 레짐

다음과 같은 시스템의 상태방정식을 고려한다.

$$X=AX+Bu \dots\dots\dots(1)$$

여기서 X는 n×1 상태벡터, u는 스칼라 제어 입력, A는 n×n 시스템행렬이며 B는 n×1 벡터이다. 가변구조제어계에서 스위칭 평면과 제어법칙은 각각 다음식으로 정의된다.<sup>1)13)15)</sup>

$$\sigma(X) = \sum_{i=1}^n c_i x_i = CX = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$u = \left( - \sum_{i=1}^n \psi_i |x_i| \right) \cdot \text{sign}(\sigma(X)) \dots\dots\dots(3)$$

여기서 sign(δ(x))는 다음식과 같은 스위칭논리이다.

$$\text{sign}(\sigma(X)) = \begin{cases} +1, & \sigma(X) > 0 \\ -1, & \sigma(X) < 0 \end{cases} \dots\dots\dots(4)$$

스위칭평면에서 슬라이딩운동이 일어날 필요충분

조건은 다음과 같다.<sup>4)7)10)</sup>

$$\sigma(X) \cdot \dot{\sigma}(X) \leq 0 \dots\dots\dots(5)$$

식(5)로부터 식(3)의 계수  $\Psi_i$ 의 범위를 구하면 다음과 같다.<sup>16)</sup>

$$\Psi_i \geq (\max \bar{a}_i) / (\min b) \dots\dots\dots(6)$$

여기서

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n), \quad a_{ij}: \text{행렬 } A \text{의 요소}$$

$$b = \sum_{j=1}^n c_j b_j > 0, \quad b_j: \text{벡터 } B \text{의 요소}$$

상태변수가 스위칭평면에서 이상적으로 슬라이딩 운동을 한다면 다음식이 성립한다.

$$\sigma(X) = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$\dot{\sigma}(X) = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$$= \frac{\partial \sigma}{\partial X} \cdot X$$

$$= CAX + CBu = 0 \dots\dots\dots(9)$$

식(9)에서 입력  $u$ 를 구할 수 있으며 이것을 등가입력  $U_{eq}$ 라 한다.

$$u_{eq} = - (CB)^{-1} \cdot CAX \dots\dots\dots(10)$$

식(10)을 식(1)에 대입하면 다음과 같은 등가상태방정식을 구할 수 있다.

$$\dot{X} = (I - B(CB)^{-1}C) \cdot AX = A_{eq}X \dots\dots\dots(11)$$

식(11)에서  $A_{eq}$ 의 모든 고유치가 음의 실수값을 갖도록  $C$ 를 선택하므로써 시스템을 안정하게 할 수 있다.<sup>17)9)13)</sup>

시스템의 점근적 안정을 보장하기 위하여 Lyaapunov의 이론을 이용하여 구한 조건식 (6)을 만족하는  $\Psi_i$ 가 충분히 큰 값이고, 등가상태방정식 (11)이 안정하도록  $C$ 를 구하므로 시스템(1)은 총체적 점근적으로 안정하다. 그러나 발생하는 제어입력이 채터링하는 불연속 입력이고, 스위칭 평면에 도달하는 순간 입력의 부호가 급격히 전환되며, 초기위치에서 스위칭평면에 도달하는 동안은 시스템파라미터의 변동과 외란의 영향을 받게 되는 등 여러가지 문제가 발견되었다.

### 2.2 슬라이딩레짐의 시변화

고정된 슬라이딩레짐의 문제점들을 해결하기 위하여 Slotine은 임계함수 (saturation function)

을 새로운 스위칭 논리로 도입하였고,<sup>8)</sup> Joo 등은 제어초기 부터 슬라이딩모드를 발생시키는 시변스위칭평면을 제안하였다.<sup>13)</sup> 그러나 아직도 제어법칙의 파라미터값을 적절히 선정해야 한다는 정량적인 연구과제를 갖고 있다. 그러므로 본 연구에서는 파라미터의 값을 시스템의 안정성이 보장되는 범위내에서 시변화하는 방법을 도입하여 가변구조제어계의 슬라이딩레짐을 총괄적으로 시변화하고자 한다.

Slotine이 임계함수를 이용하여 제안한 제어법칙은 다음과 같다.

$$u^* = (- \sum_{i=1}^n \Psi_i \cdot |x_i|) \cdot \text{sat}(z) \dots\dots\dots(12)$$

여기서  $z = \sigma(X) / \{m \cdot N(X)\}$  이고  $m$ 은 임의의 상수,  $N(X) = \sum_{i=1}^n (|x_i|)$ 이다.

$$\text{sat}(z) = \begin{cases} z & , |z| < 1 \\ \text{sign}(z), & |z| \geq 1 \end{cases} \dots\dots\dots(13)$$

스위칭논리로 작용하는 임계함수식 (13)은 시스템이 슬라이딩모드에 있을 때, 제어입력을 연속적으로 발생시키므로 제어거동의 채터링현상을 제거한다.

Joo 등이 제안한 시변스위칭평면은 다음과 같다.

$$\sigma(X, t) = \sigma^0(X) - \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \dots\dots\dots(14)$$

여기서  $\sigma^0(X) = CX$ ,  $\alpha = CX(t_0)$ ,  $\beta$ 는 양의 상수,  $X(t_0)$ 는 초기조건이다.

식(14)의  $\sigma(X, t)$ 는 시간이 경과함에 따라  $\sigma^0(X)$ 로 수렴하고, 수렴속도는  $\beta$ 에 의하여 결정되며, 상태의 초기위치에서 부터 슬라이딩운동을 일으키게 한다. 이러한 시변스위칭평면을 도입한 제어법칙은 다음과 같이 정의되었다.

$$u = (- \sum_{i=1}^n \Psi_i |x_i| + \gamma e^{-\beta(t-t_0)}) \text{MOD}(z) \dots\dots\dots(15)$$

여기서  $\text{MOD}(z) = \text{sat}(z)$ 이고  $z$ 는 다음식으로 정의한다.

$$z = \sigma(X, t) / \{m \cdot N(X)\} \dots\dots\dots(16)$$

여기서  $\bar{x}_i = x_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) 이고,

$$\bar{x}_n = x_n - \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \text{이며, } \gamma \geq (\alpha \cdot \beta) / (\min b)$$

이다. 제어법칙(15)를 이용하면 발생하면 제어입

력이 전통적인 제어입력 보다 크기가 매우 작고, 상태의 초기위치에서 부터 슬라이딩운동을 얻을 수 있다. 그러나 파라미터  $\beta$ 와  $m$ 의 크기에 따라서 간헐적으로 채터링현상이 발생하거나 수렴 속도가 오히려 악화되는 경우가 있기 때문에,  $\beta$ 와  $m$ 의 크기를 선정하기 위한 정량적인 연구가 필요하다. 본 연구에서는 새로운 시변스위칭 평면을 제안하고 파라미터의 값을 시변화함으로써, 파라미터의 확정을 보다 용이하게 함과 아울러 가변구조제어의 장점을 충분히 얻고자 한다.

### 2.3 시변슬라이딩레짐의 구성

단일 입력이 갖는 시스템의 상태방정식을 생각한다.

$$X=AX+Bu \dots\dots\dots(17)$$

여기서  $X$ 는  $n \times 1$  상태벡터,  $u$ 는 스칼라 입력,  $A$ 는  $n \times n$  시스템행렬이고,  $B$ 는  $n \times 1$  열벡터 ( $= [0, \dots, 0, 1]$ )이다.

시스템 (17)이 추종해야할 스위칭평면을 다음 식과 같이 정의한다.

$$\sigma(X, t) = \sum_{i=1}^n (c_i(t) x_i) + c_n x_n \dots\dots\dots(18)$$

여기서  $c_i(t) = c_{iL} \cdot H_i(t)$ ,  $c_n = 1$ 이고,  $H_i(t)$ 는 0에서 1로 수렴하는 적당한 시간의 함수이다. 여기서  $H_i(t)$ 는

$$H_i(t) = \begin{cases} \sin(h_i \cdot t), & h_i \cdot t < \pi/2 \\ 1, & h_i \cdot t \geq \pi/2 \end{cases} \dots\dots\dots(19)$$

이며,  $C_{iL}$ 는 시변계수의 최종값,  $h_i$ 는 임의의 상수,  $t$ 는 시간을 나타낸다.

$H_i(t)$ 는 초기시간에는 0이고 시간이 경과하여  $t=\pi/2$ 가 되면 1이 되므로, 스위칭평면(18)은 시변스위칭평면이다.

제어법칙  $u$ 은 다음식으로 정의한다.

$$u = (- \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) \cdot |x_i|) \cdot \text{MOD}(z) \dots\dots\dots(20)$$

여기서  $z = \sigma(X, t) / \{m \cdot N(x)\} \dots\dots\dots(21)$

이고  $\Psi_i(t)$ 는 다음식으로 정의되는 시변계수이다.

$$\Psi_i(t) = \Psi_{i0} + \Psi_i^* \cdot G_i(t) \dots\dots\dots(22)$$

여기서  $\Psi_{i0}$ 는 시스템(17)의 안정조건을 만족하기 위한  $\Psi_i(t)$ 의 경계값이고,  $G_i(t)$ 는 시간의 함수이다. 예를 들면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$G_i(t) = \begin{cases} \sin(g_i \cdot t), & g_i \cdot t < \pi/2 \\ 1, & g_i \cdot t \geq \pi/2 \end{cases} \dots\dots\dots(23)$$

여기서  $g_i$ 는 임의의 상수이다.

### 3. 시변슬라이딩레짐의 적용 및 고찰

시불변슬라이딩레짐을 갖는 전통적인 가변구조 제어는, 시스템이 슬라이딩모드에 있을 때, 시스템파라미터의 변동이나 외란에 대하여 매우 강인하다. 본 연구에서 제안한 시변슬라이딩레짐에 의한 가변구조제어도 이러한 강인성을 갖고 있으며, 파라미터 확정의 용이성을 보이기 위하여 다음과 같은 추계학적 선형시변시스템에 적용하여 고찰하였다.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1(t) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} w \dots\dots\dots(24)$$

여기서  $a_1(t) = 4 + 0.1 \cdot \cos(500 \cdot t)$   
 $a_2(t) = 1 + 0.1 \cdot \cos(500 \cdot t)$   
 $b_1(t) = 1 + 0.1 \cdot \cos(t)$   
 $k_1 = 0.01$   
 $k_2 = 0.01$   
 $w = [\omega_1 \ \omega_2]$

여기서  $\omega_1, \omega_2$ 는 서로 독립인 표준형 백색 Gaussian 잡음 ( $N(0, 1)$ )이다.

식(20)으로 부터, 제어입력  $u$ 를 구하면 다음과 같다.

$$u = (- \Psi_1(t) \cdot |x_1| - \Psi_2(t) \cdot |x_2|) \cdot \text{MOD}(z) \dots\dots\dots(25)$$

식(21)에서  $m > 0$ ,  $N(x) > 0$ 이므로  $|z| \geq 1$ 인 경우에는 다음식이 성립한다.

$$\text{MOD}(z) = \text{sign}(z) \dots\dots\dots(26)$$

$$= \text{sign}\{\sigma(x, t)\} \dots\dots\dots(27)$$

한편 일반적으로

$$|x_i| = x_i \cdot \text{sign}(x_i) \dots\dots\dots(28)$$

$$\text{sign}(x) \cdot \text{sign}\{\sigma(x, t)\} = \text{sign}\{x \cdot \sigma(x, t)\} \quad (29)$$

이므로, 식(25)는 다음식으로 변환된다.

$$u = (-\Psi_1(t) \cdot x_1 - \Psi_2(t) \cdot x_2) \cdot \text{sign}\{x \cdot \sigma(x, t)\} \quad (30)$$

식(30)을 식(24)에 대입하면 다음과 같은 등가상태방정식이 구해진다.

$$\begin{aligned} \dot{X} = & \begin{bmatrix} 0 \\ a_1(t) - b_1(t) \Psi_1(t) \text{sign}\{x \cdot \sigma(x, t)\} \\ 1 \\ a_2(t) - b_1(t) \Psi_2(t) \text{sign}\{x \cdot \sigma(x, t)\} \end{bmatrix} X \\ & + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} w \quad (31) \end{aligned}$$

등가시스템(31)이 가변구조제어에 의하여 슬라이딩운동을 유지하기 위한 조건은 다음과 같다. 상태공간에서 상태벡터는  $x \cdot \sigma(x, t) < 0$ 인 경우에 스위칭평면의 상부에 위치하므로 시스템이 안정해야 하고,  $x \cdot \sigma(x, t) < 0$ 인 경우에는 스위칭평면의 하부에 위치하므로 스위칭평면으로 복귀하기 위해서는 시스템이 불안정해야 한다. 직관적으로  $b_1(t)$ 가 양수이고,  $x \cdot \sigma(x, t) > 0$ 일 때, 시스템등가행렬이 Hurwitz 안정 기준을 만족하는 Hurwitz 행렬이어야 함을 알 수 있다. 시스템파라미터의 변동범위를 고려할 때, 등가행렬이 Hurwitz 행렬이 되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &> 4.1/0.9 \\ \Psi_2(t) &> 1.1/0.9 \end{aligned} \quad (32)$$

식(22)와 식(32)로부터  $\Psi_{10}$ 와  $\Psi_{20}$ 를 다음과 같이 확정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Psi_{10} &= 4.7 \\ \Psi_{20} &= 2.0 \end{aligned} \quad (33)$$

등가시스템의 고유치가  $\lambda_1 = \lambda_2 = -6$ 이 되도록 파라미터의 변동범위를 고려하여  $\Psi_1(t)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 36.27 &< \Psi_1(t) < 44.56 \\ 11.90 &< \Psi_2(t) < 14.56 \end{aligned} \quad (34)$$

식(34)를 참고하여 파라미터  $\Psi_1(t)$ 와  $\Psi_2(t)$ 의 최종값을 다음과 같이 선택한다.

$$\Psi_1(t) = 44.5, \quad \Psi_2(t) = 14.5 \quad (35)$$

식(22), (33) 및 (35)로부터  $\Psi_1^*$ 와  $\Psi_2^*$ 를 다음

과 같이 확정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Psi_1^* &= 39.8 \\ \Psi_2^* &= 12.5 \end{aligned} \quad (36)$$

식(33)과 식(36)을 식(22)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= 4.7 + 39.8 \cdot G_1(t) \\ \Psi_2(t) &= 2.0 + 12.5 \cdot G_2(t) \end{aligned} \quad (37)$$

윗식을 이용하고, 시스템파라미터의 변동범위를 고려하여 시스템등가행렬의 고유치를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Re}(\lambda_{10}) = \text{Re}(\lambda_{20}) &= -0.55 \\ -4.12 > \text{Re}(\lambda_{1r}) &> -5.98 \\ -5.98 > \text{Re}(\lambda_{2r}) &> -10.92 \end{aligned} \quad (38)$$

식(38)은 스위칭평면의 파라미터 값을 결정하는 지표로 사용된다. 식(18)로부터 시스템(24)에 대한 시변스위칭평면을 구하면 다음과 같다.

$$\sigma(X, t) = c_{1r} \cdot H_1(t) \cdot x_1 + x_2 \quad (39)$$

여기서 계수  $c_{1r}$ 는 식(38)을 참고하여 다음과 같은 범위내에서 결정한다.

$$0.55 < c_{1r} < 10.92 \quad (40)$$

다음에 제어법칙(25)와 시변스위칭평면(39)의 시변슬라이딩레짐에 의하여 제어되는 시스템(24)에 대한 안정성을 검토한다. 가변구조제어가 이상적으로 스위칭평면을 추종하기 위해서는 다음식이 성립해야 한다.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{dt} \leq 0 \leq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{dt} \quad (41)$$

그러나 실제로는 외란과 파라미터의 변동 등의 영향을 받으므로 윗식은 다음식으로 수정되어야 한다.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{dt} < 0 < \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{dt} \quad (42)$$

윗식에서 다음과 같은 Lyapunov 함수를 구성할 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (43)$$

식(42)가 성립하기 위해서는  $V$ 의 시간에 대한 도함수는 음이 되어야 한다.

$$V = \sigma \cdot \dot{\sigma} < 0 \quad (44)$$

여기서 식(44)를 만족시키는 조건을 구해야 한다. 식(18)에서 다음식이 유도된다.

$$\sigma(X, t) = \sum_{i=1}^2 (c_i(t) \cdot x_i) \dots\dots\dots (45)$$

여기서  $c_1(t) = c_{1\sigma} \cdot H_1(t)$  ..... (46)  
 $c_2(t) = 1$

여기서  $H_1(t)$ 는 식(19)와 같다. 식(45)의 시간에 대한 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(X, t) &= \sum_{i=1}^2 (\dot{c}_i(t) \cdot x_i) + \sum_{i=1}^2 (c_i(t) \cdot \dot{x}_i) \\ &= \bar{c}(t) + \sum_{i=1}^2 c_i(t) \left\{ \sum_{j=1}^2 (a_{ij}(t) \cdot x_j) \right\} + \left[ \sum_{i=1}^2 (c_i(t) \cdot b_i(t) \cdot u) \right. \\ &= \bar{c}(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (c_j(t) \cdot a_{ji}(t) \cdot x_i) + (t) \cdot u \\ &= \bar{c}(t) + \sum_{i=1}^2 \bar{a}_i(t) x_i - b(t) \\ &\quad \left( \sum_{i=1}^2 \Psi_i(t) \cdot |x_i| \right) \text{MOD}(z) \\ &= \bar{c}(t) + \sum_{i=1}^2 [\bar{a}_i(t) \cdot x_i - b(t) \cdot \Psi_i(t) \cdot |x_i| \text{MOD}(z)] \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

여기서  $\bar{c}(t) = \sum_{i=1}^2 c_i(t) \cdot x_i$  ..... (48)

$$\bar{b}(t) = \sum_{i=1}^2 c_i(t) \cdot b_i(t) > 0 \dots\dots\dots (49)$$

$$\bar{a}_i(t) = \sum_{j=1}^2 c_j(t) \cdot a_{ji}(t) \dots\dots\dots (50)$$

제어과정 중에 식(47)에서  $|z| \geq 1$ 인 경우와  $|z| < 1$ 인 경우가 존재할 수 있다.  $|z| \geq 1$ 인 경우에는 스위칭평면에서 멀어지는 과정 (불안정한 상태)에 있거나 스위칭평면으로 들어오는 과정 (안정한 상태)에 있다고 생각할 수 있고,  $|z| < 1$ 인 경우에는 가변구조제어가 순조롭게 수행 중이라고 추정할 수 있다. 그러므로  $|z| \geq 1$ 인 경우에 식(44)를 만족하는 조건을 구하면 시스템은 슬라이딩모드에 있으며 따라서 시스템은 총체적 접근적으로 안정하다. 이러한 경우에 식(26)~(29)를 이용하면 식(47)은 다음식으로 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(X, t) &= \bar{c}(t) + \sum_{i=1}^2 [\bar{a}_i(t) \cdot \text{sign}\{x_i\} \cdot \sigma(X, t) \\ &\quad - \bar{b} \cdot \Psi_i] \cdot |x_i| \cdot \text{sign}\{\sigma(X, t)\} \\ &\dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

식(44)~(51)로 부터 다음식을 구할 수 있다.

$$\sigma(X, t) \cdot \dot{\sigma}(X, t) = \sum_{i=1}^2 (c_i(t) \cdot x_i) \cdot \sum_{i=1}^2 (\dot{c}_i(t) \cdot x_i)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^2 [\bar{a}_i(t) \cdot \text{sign}\{x_i\} \cdot \sigma(X, t) \\ &- \bar{b} \cdot \Psi_i] \cdot |x_i| \cdot \sigma(X, t) \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

식(52)의 우변의 첫째항은 식(19), (45), (46) 및 (48)을 참고하면 시간  $t \rightarrow \infty$ 일 때 0으로 수렴한다. 그러므로 식(52)가 부호함수에 관계없이 식(44)의 부등식을 만족할 수 있는 조건은 다음과 같다.

$$\Psi_i(t) > \bar{a}_i(t) / \bar{b}(t) \dots\dots\dots (53)$$

식(24), (46) 및 (48)~(50)으로 부터 식(53)을 구하면 다음과 같다.

$$\Psi_i(t) > \{ 4 + 0.1 \cdot \cos(500 \cdot t) \} / \{ 1 + 0.1 \cdot \cos(t) \} \dots\dots\dots (54)$$

식(19), (23), (37) 및 식(40)을 고찰하면 식(54)가 성립하도록  $h_1$ 와  $g_1$ 사이의 관계식을 다음과 같이 세울 수 있다.

$$\sin(g_2 \cdot t) > 0.089 \cdot c_{1\sigma} \cdot \sin(h_1 \cdot t) - 0.063 \dots (55)$$

여기서

$$g_2 = h_1 \dots\dots\dots (56)$$

으로 설정하면 식(40)에서  $C_{1\sigma}$ 를 최대값으로 두어도 식(55)가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

### 4. 시뮬레이션 및 고찰

시변슬라이딩레짐을 갖는 가변구조제어의 실용성과 외란 및 파라미터변동에 대한 강인성을 확인하기 위하여, 3장에서 고찰한 추계학적 선형시변시스템에 적용하여 시뮬레이션을 수행하였으며, 그 결과를 비교 고찰하기 위하여 다음과 같은 선형시불변시스템, 선형시변시스템, 추계학적 선형시불변시스템에 대하여서도 시뮬레이션을 수행하였다.

선형시불변시스템

$$X = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 4.0 & 1.0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} u \dots\dots\dots (57)$$

선형시변시스템

$$X = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 4.0 + a_{r1} & 1.0 + a_{r2} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 + b_r \end{bmatrix} u \quad (58)$$

추계학적 선형시불변시스템

$$X = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 4.0 & 1.0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.01 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} w \quad (59)$$

여기서  $x_1(t_0) = 10.0, x_2(t_0) = 2.0$

$$a_{r1} = a_{r2} = 0.1 \cdot \cos(500 \cdot t) \quad (60)$$

$$b_r = 0.1 \cdot \cos(t) \quad (61)$$

이고 는 3장에서 언급한 표준형 백색 Gaussian 잡음 ( $N(0, 1)$ )이다.

가변구조제어를 위한 시변슬라이딩레짐의 파라미터는 3장에서 확정한 값을 선택하며 식(56)의  $g_2$ 와  $h_1$ 은 1로 둔다.

본 논문에서 제안한 시변 슬라이딩레짐과 대표적인 슬라이딩 레짐을 비교하기 위해서,  $\Psi_1 = 44.5, \Psi_2 = 14.5, c_1 = 6.0$ 의 값을 갖는 대표적인 슬라이딩레짐 (식(2), 식(3))에 의한 시물레이션 결과를 그림 1과 그림 2에 도시하였다.

그림 1은 위상공간에서 상태벡터  $X_1$ 과  $X_2$ 의 상태궤적이고 그림 2는 제어입력  $u$ 의 시간선도이다. 제어거동이 연속적이지 못하고 심하게 채터링함을 알 수 있고, 제어입력도 불연속의 채터링 입력이 발생하고 있다.

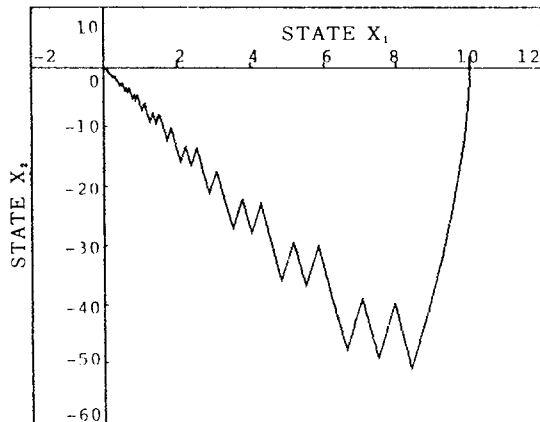


Fig.1 State Trajectory on state space  $X_1$ - $X_2$  using typical sliding regime.

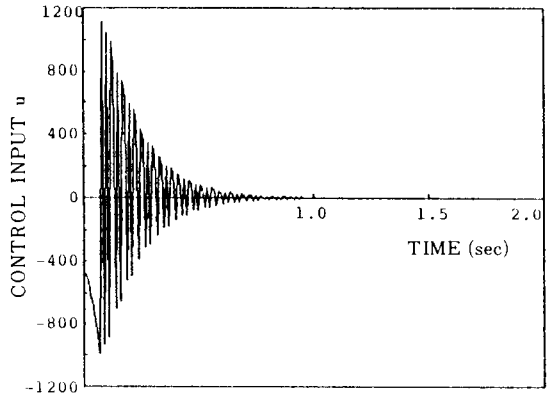


Fig.2 Time diagram of control input using typical sliding regime.

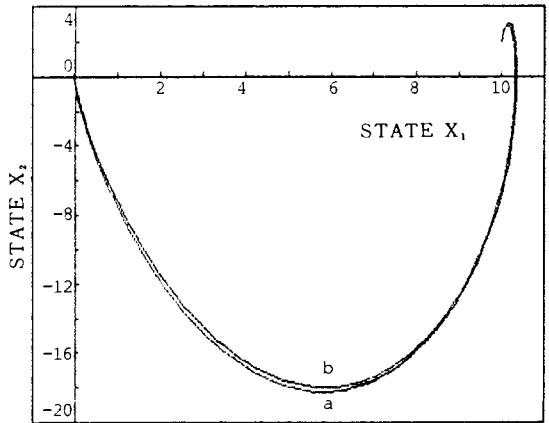


그림 3. 상태공간  $X_1$ - $X_2$ 의 상태궤적.

Fig.3 State trajectories on state space  $X_1$ - $X_2$ .

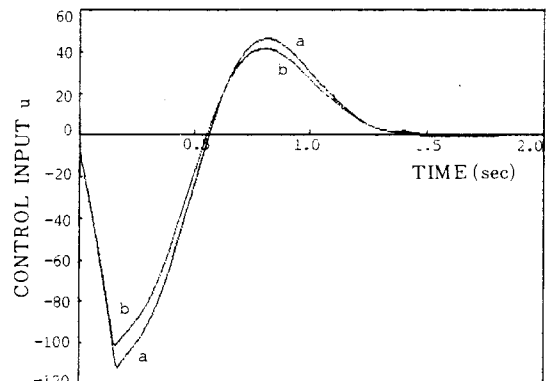


그림 4. 제어입력  $u$ 의 시간선도.

Fig.4 Time diagram of control input  $u$ .

그림 ③은 위상공간에서 상태벡터  $x_1$ 과  $x_2$ 의 상태궤적이다. 여기서 a는 선형시불변시스템과 추계학적 선형시불변시스템의 상태궤적이고, b는 선형시변시스템과 추계학적 선형시변시스템의 상태궤적이다. 그림 ④는 제어입력  $u$ 의 시간선도이다. 그림 ③과 ④를 고찰해 보면 파라미터 변동의 영향이 잡음의 영향보다 크게 나타남을 알 수 있다. 파라미터 변동과 잡음의 영향을 더욱 확실하게 보기 위하여 시변시스템의 시스템행렬의 요소와 추계학적 시스템의 잡음행렬을 다음과 같이 수정하였다.

$$a_{T1} = a_{T2} = 0.2 \cdot \cos(500 \cdot t) \dots \dots \dots (62)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (63)$$

위와 같이 수정하여 각각의 시스템에 적용한 시변슬라이딩레짐은 수정전의 시변슬라이딩레짐과 같이 두고 시뮬레이션하였다. 그림 ⑤는 수정후의 상태궤적이다. 여기서 a, b, c 및 d는 각각 선형시변, 추계학적 선형시변, 선형시불변 및 추계학적 선형시불변시스템에 대한 상태궤적이다. 그림 ⑥은 제어입력  $u$ 의 시간선도이다. 여기서 a, b, c 및 d는 각각 선형시변, 추계학적, 선형시변, 선형시불변, 추계학적 선형시불변 시스템에 대한 제어입력이다. 그림 7과 그림 8은 각각 스위칭평면  $\sigma(X, t)$ 와 스위칭논리 MOD

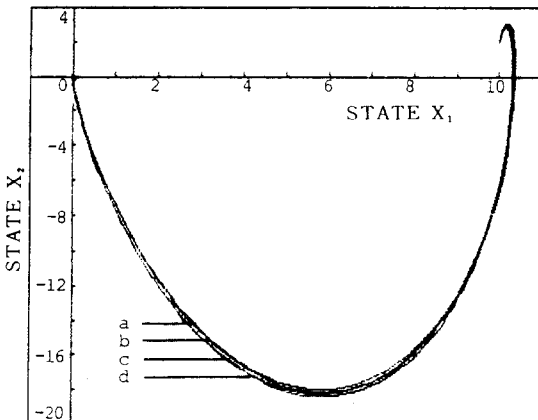


그림 5. 상태공간  $X_1$ - $X_2$ 의 상태궤적.  
Fig.5 State trajectories on state space  $X_1$ - $X_2$ .

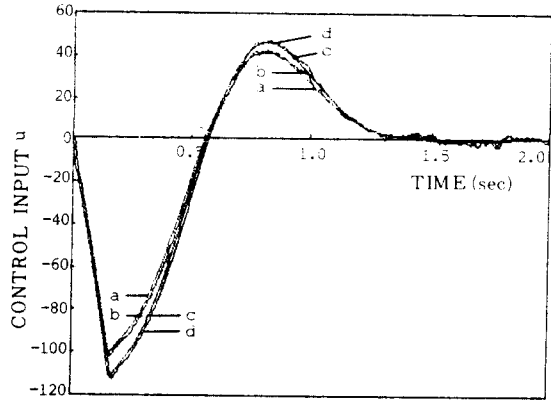


그림 6. 제어입력  $u$ 의 시간선도.  
Fig.6 Time diagram of control input  $u$ .

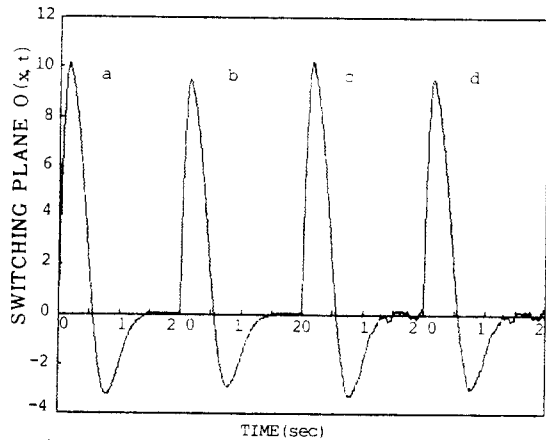


그림 7. 스위칭평면  $\sigma(X, t)$ 의 시간선도.  
Fig.7 Time diagram of switching plane  $\sigma(X, t)$ .

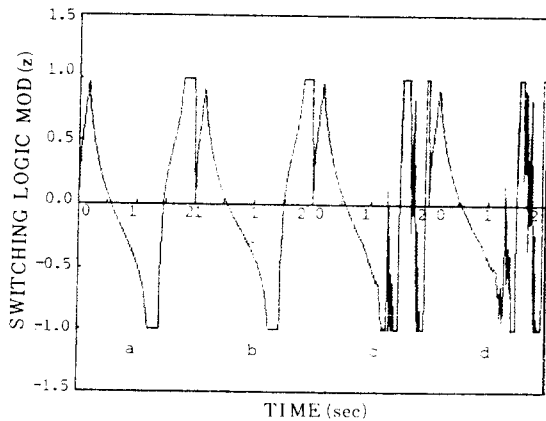


그림 8. 스위칭논리 MOD(z)의 시간선도.  
Fig.8 Time diagram of switching logic MOD(z).



(z)의 시간선도이다. 각각의 시스템에 작용하는 파라미터 변동과 잡음의 영향이 잘 나타나 있다.

## 5. 결 론

가변구조제어의 전반적인 동특성을 향상시키기 위하여 슬라이딩레짐을 전반적으로 시변화 하였으며 이것을 추계학적 선형시변시스템에 적용하여 각각의 파라미터를 확정하였고 안정성을 검토하였다. 여러가지 유형의 선형시스템에 적용시켜 시뮬레이션을 수행하였으며 그 결과를 고찰하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 가변구조제어계의 슬라이딩레짐을 총체적으로 시변화하였다.
- 2) Hurwitz 안정기준과 Lyapunov의 안정이론을 이용하면 슬라이딩레짐의 각각의 파라미터를 쉽게 확정할 수 있다.
- 3) 여러가지 유형의 시스템에 시변슬라이딩레짐을 적용하여 시뮬레이션을 수행하였고 시스템이 안정함을 확인하였다.
- 4) 대표적인 슬라이딩레짐에 의한 제어거동과 발생입력은 불연속적으로 심하게 채터링하는 현상을 보이지만 제안된 시변슬라이딩레짐에 의한 제어거동과 발생입력은 연속적이다.
- 5) 제안된 시변슬라이딩레짐에 의하여 발생하는 입력은 대표적인 슬라이딩레짐에 의하여 발생하는 입력보다 크기가 매우 작다.
- 6) 제안된 시변슬라이딩레짐의 파라미터 변동과 외란에 대한 강인성이 입증되었다.

## 參 考 文 獻

- (1) B. Drazenovic, "The Invariance Conditions in Variable Structure Systems", Automatica, Vol. 5, pp. 287-295 (1969)
- (2) Vadim I. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-22, No. 2, pp. 212-217, April (1977)
- (3) Kar-Keung D. Young, "Asymptotic Stability of Model Reference Systems with Variable Structure Control", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-22, No. 2, pp. 279-281, April
- (4) Kar-Keung D. Young, "Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems", IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-8, No. 2, pp. 101-109, Feb. (1978)
- (5) Kar-Keung D. Young, "Design of Variable Structure Model-Following Control Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-23, No. 6, pp. 1079-1085, Dec. (1978)
- (6) Kar-Keung D. Young, and Harry G. Kwatny, "Variable Servomechanism Design and Applications to Overspeed Protection Control", Automatica, Vol. 18, No. 4, pp. 385-400 (1982)
- (7) O. M. E. El-Ghezawi, S. A. Billings and A. S. I. Zinober, "Variable-Structure Systems and System Zeros", IEE Proc., 130, Pt. D., No. 1, Jan (1983)
- (8) J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking Control of Nonlinear Systems using Sliding Surface with Application to Robot Manipulators", Int. J. Control, Vol. 38, No. 2, pp. 465-492 (1983)
- (9) O. M. E. El-Ghezawi, A. S. I. Zinober and S. A. Billings, "Analysis and Design of Variable Structure Systems using a Geometric Approach", Int. J. Control, Vol. 38, No. 3, pp. 657-671 (1983)

- (1) B. Drazenovic, "The Invariance Conditions in Variable Structure Systems",

- (10) N. N. Bengiamin and B. Kauffmann, "Variable Structure Position Control", Control Systems Magazine, Aug. (1984)
- (11) V. I. Utkin, "Variable Structure Systems: Present and Future", Plenum Publishing Corporation, pp. 1105-1120 (1984)
- (12) S. R. Variable-Structure Control of Space- Large-Angle Maneuvers", J. Guidance, Vol. 9, No. 2, pp. 235-239, March-April (1986)
- (13) Kee-Ho Joo, Myung-Hyun Song, Gwi-Tai Park and Hee-Young Chun, "A Study of Method for Removing Reaching Phase and Chattering Phenomenon in Variable Structure Control Systems", Trans. of KIEE, Vol. 36, No. 1, pp. 52-57, January (1987)
- (14) Herbertt Sira-Ramirez and Thomas A. W. Dwyer III, "Variable Structure Controller Design for spacecraft Nutation Damping", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 5, pp. 435-438, May (1987)
- (15) Kai S. Yeung and You P. Chen, "A New Controller Design for Manipulators Using the Theory of Variable Structure Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 33, No. 2, pp. 200-206, February (1988)
- (16) Anthony J. Galise and Fridrich S. Kramer, "A Variable Structure Approach to Rovust Control of VTOL Aircraft", J. Guidance, Vol. 7, No. 5, pp. 620-626 (1984)
- (17) Gwi-Tae Park, Chun-Ping Kuo, Dong-Sik Kim and Hyeong-Yong Km, "A New Approach to Control System Design for Multivariable SYstems Using Sliding Mode", Trans. of KIEE, Vol. 38, No. 1, pp. 43-50 (1989)
- (18) Ju-Jang Lee and Dong-Hwan Hwang, "Reduction of Reaching Time of Phase Plane in Veible Structure Control Sys- Trans. mof KIEE, Vol. 38, No. 1, pp. 51-59, January (1989)