

線型動吸振器의 媒介變數가 減衰振動系의 振動特性에 미치는 影響

尹 壯相*, 李 亮雨**, 宋 昌燮***

Effects of parameters of a linear dynamic vibration absorber on the vibrational characteristics of damped vibrational systems

J. S. Yoon, Y. W. Lee, C. S. Song

Abstract

This paper presents the vibrational characteristics of linear damped vibrational systems with a linear dynamic absorber. The amplitude ratios of main vibrational system are derived from the equation of motion for the system, and optimal natural frequency ratio and damping ratio of dynamic absorber are obtained by computer simulation, which minimize the amplitude ratio of main vibrational system for the whole range of the frequency ratio. And, the effects of the parameters on the amplitude ratios are investigated.

As the results, the effect of the natural frequency ratio on the amplitude ratio of main vibrational system is more important than that of the damping ratio of dynamic absorber as damping ratio of main vibrational system becomes larger. For the case of large damping ration of main vibrational system becomes larger. For the case of large damping ratio of main vibration system, the amplitude ratios are not decreased dramationally in spite of increasing mass ratio.

* 서울산업대학 기계설계과
** 보험감독원 전산실
*** 한양대학교 정밀기계과

1. 序 論

動吸振器의 理論的 해석은 1928年에 Ormondroyd와 Den Hartog가 調和強制力에 의해 加振된 非減衰主振動系에 動吸振器를 附着하여 수학적으로 解析한 것으로부터 비롯되며, 減衰係數에 關係없이 항상 振幅 - 振動數平面의 一定한 2點을 通過하는 最適固有振動數比와 最適減衰比를 求하였다.^{1), 2)}

G.B.Warburton도 2自由度를 갖는 非減衰主振動系에 附着된 動吸振器의 最適媒介變數를 決定하여 最大 응답을 最小化 하였으며 1986년에 Vakakis는 비감쇠선형 다자유도계에서 계의 전달율을 최소화하는 동흡진기의 최적치를 구하였으나 감쇠진동에 대한 동흡진기의 연구는 이루어지지 않았다. 1981년에 Thomson은 주진동계에 감쇠가 있을 경우 Den Hartog의 방법을 적용할 수 없으므로 진동수궤적법을 사용하여 turning function을 유도하였으며 이를 최소화 하므로써 graphical criteria를 얻어냈고 1983년에 Soom은 감쇠된 주진동계에 대한 선형 및 비선형 동흡진기의 최적치를 비선형 Programming 수법을 사용하여 구하였으며 Hunt는 감쇠된 주진동계와 동흡진기 사이에 비선형 스프링과 점성감쇠기를 병행하게 연결하여 Suppression bandwidth를 상당히 확장하는 방법에 대하여 연구하였으며 최근에는 Jordanov가 조화강제력을 받는 선형 및 비선형 감쇠기에 있어서 최적설계에 대한 연구를 하였으나, 動吸振器의 媒介變數들의 影響을 具體的으로 기술하고 있지 못한 실정이다.³⁾⁻⁸⁾

本 論文에서는 減衰振動系의 振幅比를 最小로 하는 線型動吸振器의 最適固有振動數比와 最適減衰比를 數值解法으로 求하고, 매개변수들이 主振動系의 振幅比에 미치는 影響을 糾明하였다.

2. 數學的 모델

系는 그림 1과 같이 質量 m_1 , 스프링 상수 k_1 , 減衰常數 c_1 인 주진동계에 質量 m_2 , 스프링 상수 k_2 , 減衰常數 c_2 인 吸振器가 부착되어 있다. 主振動系는 調和強制力 $f(t) = F_1 \exp(j\omega t)$ 에 의해 加振되고 系는 正常狀態振動(steady state vibration)을 한다고 가정한다.

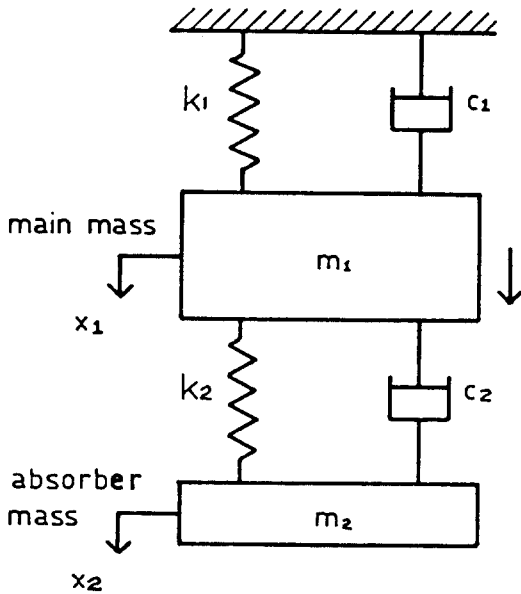


Fig.1 System with dynamic vibration absorber

그림 1과 같이 粘性減衰된 線型 2自由度系의 運動方程式은 다음과 같다.

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) = f(t) \dots\dots\dots(1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

式(1), (2)를 matrix 형태로 변환시키고 微分演算子 p를 사용하여 정리하면 식(3)과 같이 간단히 표시할 수 있다.

$$Z(p)\{x\} = \{f(t)\} \dots\dots\dots (3)$$

여기서, $\{x\} = [x_1, x_2]'$, $\{f(t)\} = [F_1 \exp(j\omega t), 0]'$ 이고 $Z(p)$ 는 2×2 impedance matrix로서 다음과 같이 표시된다.

$$Z(p) = p^2 [m] + p [c] + [k]$$

여기서,

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, [c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

식(3)의 解는 다음과 같이 된다.

$$\{x\} = [Z(p)]^{-1} \{f(t)\} = T(p) \{f(t)\} \dots\dots\dots (4)$$

여기서, $T(p) = [Z(p)]^{-1}$ 는 2×2 transfer function matrix이다.

그러므로, 主振動系의 傳達函數 $T_1(p)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$T_1(p) = (m_2 p^2 + c_2 p + k_2) / |Z(p)| \dots\dots (5)$$

여기서, $|Z(p)|$

$$= [m_1 p^2 + (c_1 + c_2)p + (k_1 + k_2)]$$

$$(m_2 p^2 + c_2 p + k_2) - (c_2 p + k_2)^2$$

$$= m_1 m_2 p^4 + [m_1 c_2 + m_2 (c_1 + c_2)] p^3$$

$$+ [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2) + c_1 c_2] p^2$$

$$+ (c_1 k_2 + c_2 k_1) p + k_1 k_2$$

이다.

또한, $p\{x\} = j\omega\{x\}$, $p^2\{x\} = -\omega^2\{x\}$ 이므로 $T(p) = T(j\omega)$ 가 된다.

식(4)을 主振動系에 대한 표현식으로 고치면 다음과 같다.

$$x_1 = T_1(j\omega) f_1(t) \dots\dots\dots (6)$$

主振動系의 靜的 처짐량을 X_{st} 라 하고 加振力 $f(t)$ 의 最大振幅은 $k_1 k_{st}$ 라 하면 x_1 / X_{st}

는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$X_1 / X_{st} = k_1 T_1(j\omega) = k_1 (-m_2 \omega^2 + c_2 j\omega + k_2) / |Z(j\omega)| \dots\dots\dots (7)$$

식(7)로부터 질량비 $\mu (=m_2/m_1)$, 固有振動數比 $\psi (= \omega_2 / \omega_1)$, 加振周波數比 $\theta (= \omega / \omega_1)$, 主振動系 및 吸振器의 減衰比 $\xi_1 (=c_1 / (m_1 \omega_1))$ 및 $\xi_2 (=c_2 / (m_2 \omega_1))$ 등의 無次元數를 사용하여 主振動系의 振幅比 λ 를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\lambda = |X_1 / X_{st}| = \{ [1 / (A^2 + B^2)] [(\psi^2 - \theta^2)^2 + (\xi_2 \theta)^2] \}^{1/2} \dots\dots\dots (8)$$

여기서, $A = \theta^4 - [(1 + \mu)\psi^2 + (1 + \xi_1 \xi_2)] \theta^2 + \psi^2$

$$B = [(1 + \mu)\xi_2 + \xi_1] \theta^3 - (\xi_1 \psi^2 + \xi_2) \theta$$

이다.

3. 數值解析

그림 1에서 主振動系에 減衰가 없는 경우에는 最適固有振動數比 및 最適減衰比 ξ_{2opt} 는 다음과 같이 표시된다.⁽²⁾

$$\psi_{opt} = 1 / (1 + \mu) \dots\dots\dots (9)$$

$$\xi_{2opt} = [3\mu / 2(1 + \mu^3)]^{1/2} \dots\dots\dots (10)$$

이와같은 動吸振器의 最適條件은 第1共振點에서 振幅比를 λ_1 , 第2共振點에서의 振幅比를 λ_{11} 라 할 때, 주어진 質量比 μ 에 대해 λ_1 과 λ_{11} 의 크기를 같게 하므로써 구해진다.

主振動系에 減衰가 수반되는 경우에는 固有振動數比와 減衰比에 관계없이 恒常 2個의 定點 (invariant point)을 통과하는 非減衰振動系의 特性과는 다르므로 2個의 共振點에서 振幅比의 크기를 같게 하는 動吸振器의 最適固有

振動數比와 減衰比를 求하는 것이 複雜해진다. 이와 같은 경우에는 컴퓨터를 이용한 數值解法으로 해석할 수 있다.

振動系의 最適條件은 전체 진동수비 영역에서의 최대 진폭비를 최소화 하는 것으로서, 이를 求하기 爲해서는 다음과 같은 함수를 정의하여 주어진 질량비 μ 와 主振動系의 減衰比 ξ_1 에 대한 $f_1(\Psi, \xi_2)$ 와 $f_2(\Psi, \xi_2)$ 를 모두 零으로 하는 固有振動數比 Ψ 와 動吸振器의 減衰比 ξ_2 의 값을 결정하면 된다.

$$f_1(\Psi, \xi_2) = \lambda_1 - \lambda_{11} \dots\dots\dots (11)$$

$$f_2(\Psi, \xi_2) = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_{11}}{2} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

즉, f_1 은 1,2차 공진점에서 진폭비의 차이이며, f_2 는 두공진점을 잇는 직선의 ξ_2 에 대한 기울기로서, 이 두식을 영으로 하는 고유진동수비 Ψ 와 감쇠비 ξ_2 를 최적치로서 구할 수 있다.

이를 위해서는 다음의 조건을 동시에 만족하는 2개의 共振點을 우선 찾아야 한다. 즉, λ_1, λ_{11} 는 각각 $\lambda-\theta$ 평면상의 극대점이므로 $\partial \lambda / \partial \theta = 0, \partial^2 \lambda / \partial \theta^2 \geq 0$ 의 조건으로부터 (13), (14)식을 각각 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = a'b - b'a = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} = (a'b - b'a)(3a - b) - 2ab$$

$$(a''b - b''a) \geq 0 \dots\dots\dots (14)$$

여기서, $a = \theta^4 + (\xi_2^2 - 2\Psi^2)\theta^2 + \Psi^4$
 $b = (\theta^4 - a\theta^2 + \Psi^2)^2 + (\beta\theta^3 - \gamma\theta)$
 $\alpha = (1 + \mu)\Psi^2 + (1 + \xi_1\xi_2)$
 $\beta = (1 + \mu)\xi_2 + \xi_1$
 $\gamma = \xi_1\Psi^2 + \xi_2$

이다.

식(13)의 解를 Newton의 Iteration method로 구하여 식(14)의 조건을 충족시키는 第1次 및 第2次 共振振動數比 θ_1 및 θ_{11} 를 찾아내고, 이 共振振動數比에서 식(11)과 (12)로 정의된 $f_1(\Psi, \xi_2)$ 과 $f_2(\Psi, \xi_2)$ 의 값이 零으로 되는가 검토한다.

만일, 零이 아니면 Ψ 및 ξ_2 의 값을 식(15) 및 식(16)으로 표시되는 증분 $\Delta\Psi$ 및 $\Delta\xi_2$ 만큼 증가시켜 가면서 반복계산하여 $f_1(\Psi, \xi_2)$ 및 $f_2(\Psi, \xi_2)$ 의 값이 零이 되는 Ψ 및 ξ_2 를 구한다.

$$\Delta\Psi = f_1(\Psi) / (\partial f_1 / \partial \Psi) \dots\dots\dots (15)$$

$$\Delta\xi_2 = - \frac{\partial g}{\partial \xi_2} / \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_2^2} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

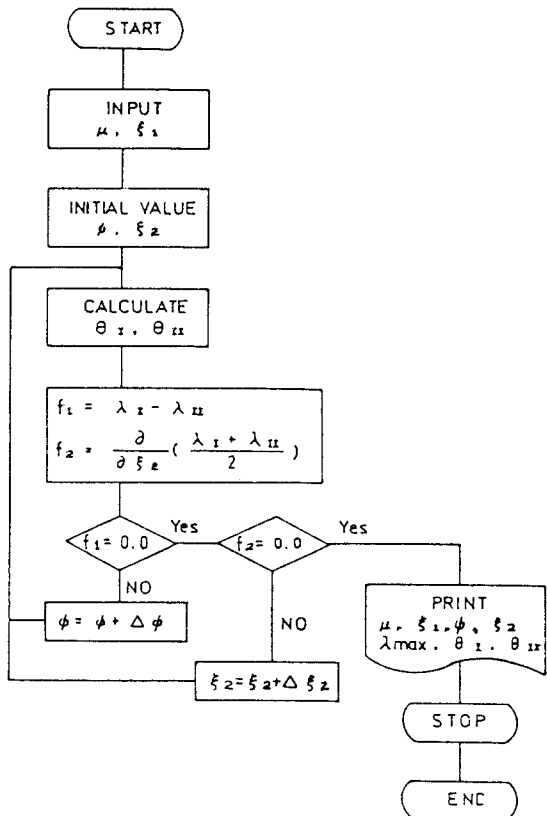


Fig. 2 Flow chart for numerical analysis

여기서, 미분계수는 차분식을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Psi} = \frac{f_1(\Psi + \Delta \Psi) - f_1(\Psi)}{\Delta \Psi} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_2} = \frac{g(\xi_2 + \Delta \xi_2) - g(\xi_2)}{\Delta \xi_2} \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_2^2} = \frac{g(\xi_2 + \Delta \xi_2) - 2g(\xi_2 + \Delta \xi_2) + g(\xi_2)}{\Delta \xi_2^2} \dots\dots\dots (19)$$

그 결과 얻어진 값들이 系 전체에 걸쳐 振幅比를 최소로 하는 最適値가 된다. 數値解析을 위한 flow chart 는 그림 2에 도시한 바와 같다.

4. 結果 및 考察

數値解析의 結果로 求한 最適固有振動數比와 最適減衰比는 표 1과 같다. 표 2에서는 質量比를 기준으로 한 improvement index를 사용하여 質量比와 主振動系의 共振振幅比가 감소하는 效果를 나타내었다. Improvement index는 質量比가 0.05에서, 最適共振振幅比에 對해 各 質量比에서의 最適共振振幅比의 比率로서 다음과 같다.

$$I = \min(\lambda_{max}) / \min(\lambda_{max})_{at \mu=0.05}$$

Table 1. Results of simulation for the lowest maximum amplitude ratio

(a) $\xi_1 = 0$

μ	ξ_2	ψ	λ_{max}	θ_1	θ_{11}
0.05	0.255	0.952	6.4239	0.899	1.052
0.10	0.337	0.909	4.5907	0.848	1.059
0.15	0.386	0.870	3.8001	0.807	1.058
0.20	0.419	0.833	3.3293	0.772	1.054
0.25	0.441	0.800	3.0098	0.741	1.048
0.30	0.456	0.767	2.7811	0.714	1.041

(b) $\xi_1 = 0.1$

μ	ξ_2	ψ	λ_{max}	θ_1	θ_{11}
0.05	0.257	0.936	4.1548	0.874	1.055
0.10	0.351	0.887	3.3403	0.828	1.049
0.15	0.393	0.845	2.9198	0.783	1.047
0.20	0.407	0.808	2.6527	0.741	1.050
0.25	0.435	0.773	2.4606	0.712	1.037
0.30	0.454	0.741	2.3157	0.687	1.024

(c) $\xi_1 = 0.2$

μ	ξ_2	ψ	λ_{max}	θ_1	θ_{11}
0.05	0.266	0.914	3.0575	0.850	1.046
0.10	0.340	0.862	2.6226	0.793	1.045
0.15	0.372	0.818	2.3781	0.746	1.044
0.20	0.394	0.779	2.2123	0.708	1.039
0.25	0.423	0.743	2.0873	0.681	1.022
0.30	0.450	0.710	1.9918	0.660	1.001

(d) $\xi_1 = 0.3$

μ	ξ_2	ψ	λ_{max}	θ_1	θ_{11}
0.05	0.271	0.888	2.4269	0.822	1.030
0.10	0.346	0.832	2.1670	0.766	1.023
0.15	0.369	0.788	2.0118	0.716	1.023
0.20	0.389	0.746	1.9035	0.677	1.016
0.25	0.423	0.709	1.8197	0.653	0.993
0.30	0.441	0.676	1.7555	0.629	0.975

(e) $\xi_1 = 0.4$

μ	ξ_2	ψ	λ_{max}	θ_1	θ_{11}
0.05	0.275	0.857	2.0199	0.792	1.008
0.10	0.334	0.798	1.8545	0.730	1.004
0.15	0.336	0.750	1.7514	0.683	0.995
0.20	0.383	0.709	1.6775	0.640	0.986
0.25	0.413	0.672	1.6211	0.619	0.963
0.30	0.418	0.640	1.5746	0.591	0.951

(f) $\xi_1 = 0.5$

μ	ξ_2	ψ	λ_{max}	θ_1	θ_{11}
0.05	0.264	0.820	1.7386	0.754	0.984
0.10	0.331	0.759	1.6292	0.694	0.972
0.15	0.357	0.710	1.5592	0.646	0.962
0.20	0.370	0.669	1.5087	0.608	0.953
0.25	0.393	0.632	1.4683	0.581	0.931
0.30	0.399	0.600	1.4359	0.554	0.918

여기서, $\min(\lambda_{max})$ 는 최대 진폭비 λ_{max} 가 최소로 되는 진폭비임. 그림 3은 主振動系の 最適共振振幅比를 표시한 것으로서, 主振動系の 減衰比가 클수록 最適共振振幅比는 낮게 나타나며, 또한 質量比가 增加할 수록 最適共振振幅比는 減少한다는 것을 알 수 있다. 여기서, 主振動系の 減衰比가 클 경우, 質量比가 增加하여도 最適共振振幅比는 크게 減少하지 않는다는 것을 알 수 있다. 즉, 이를 表 2에서 보면 主振動에 減衰가 없는 경우에는 質量比가 0.05에서 0.30으로 增加함에 따라 最適共振振幅比는 56.7%가 감소한 반면 主振動系の 減衰比가 0.5인 경우에는 17.4% 밖에 감소하지 않았다.

Table 2. Improvent index of the lowest maximum amplitude ratio against that with the mass ratio $\mu = 0.05$

ξ_1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.05	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.10	0.715	0.804	0.858	0.893	0.918	0.937
0.15	0.592	0.703	0.778	0.829	0.867	0.897
0.20	0.518	0.638	0.724	0.784	0.830	0.868
0.25	0.469	0.592	0.683	0.759	0.803	0.845
0.30	0.433	0.557	0.651	0.723	0.780	0.826

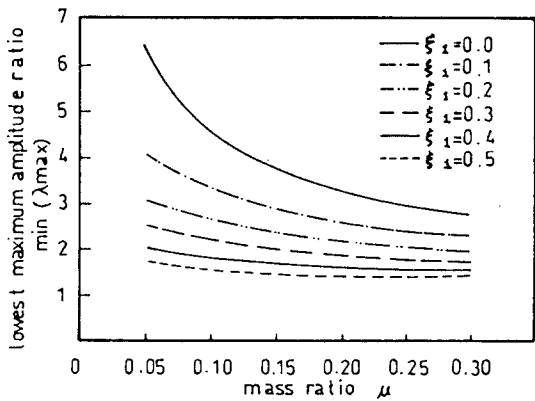


Fig. 3 Lowest maximum amplitude ratio $\min(\lambda_{max})$ Plotted against mass ratio μ

그림 4는 質量比에 대한 最適固有振動數比를 표시한 것으로서, 主振動系の 減衰比가 클수록

最適固有振動數比는 낮게 나타나며 質量比가 增加함에 따라 最適固有振動數比는 느린 速度로 감소하는 것을 알 수 있다. 여기서, 主振動系の 減衰比가 클수록 質量比 增加에 따른 最適固有振動數比의 減少幅도 점차 커진다는 것을 알 수 있다.

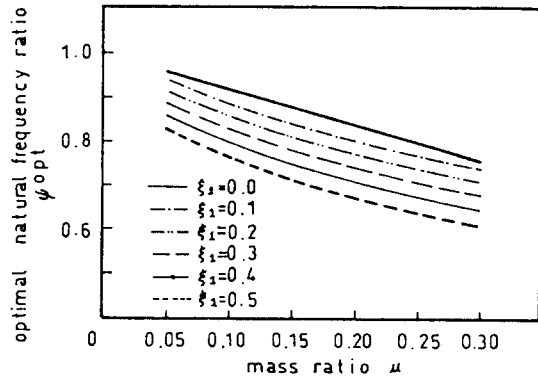


Fig. 4 Optimal natural frequency ratio ϕ_{opt} Plotted against mass ratio μ

그림 5는 質量比에 대한 動吸振器의 最適減衰比를 나타낸 것으로서, 質量比가 增加함에 따라 最適減衰比는 처음에는 빠른 속도로 增加하다가 나중에는 서서히 增加하며 主振動系の 減衰比가 클수록 最適減衰比의 增加폭이 둔화된다는 것을 알 수 있다.

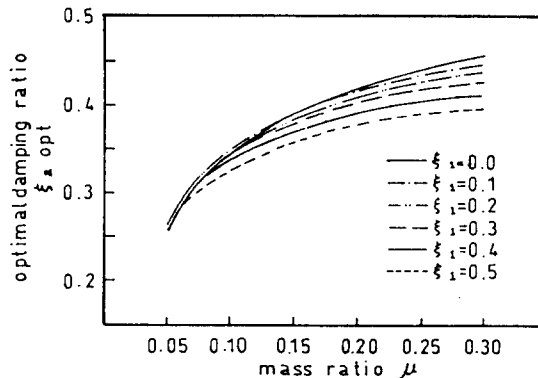


Fig. 5 Optimal damping ratio $\xi_{a,opt}$ Plotted against mass ratio μ

그림 4와 그림 5로부터 主振動系の 減衰比가 클수록 質量比가 增加함에 따라 最適固有振動數比의 增減幅보다 더 커지므로, 主振動系の 振幅比는 固有振動數比의 影響을 더욱 크게 받는다는 것을 알 수 있다. 主振動系の 振幅比를 낮추기 위해서는 固有振動數比와 振幅比의 最適値를 이용하는 것이 바람직하지만 固有振動數比의 最適値를 이용하는 것이 減衰比의 最適値를 이용하는 것보다 最適動吸振器를 부착한 主振動系의 最大振幅比에 가까와진다는 것을 알 수 있다.

그림 6(a)부터 그림 6(f)까지는 數値解析結果로서 求해진 最適固有振動數比와 最適減衰比에 의한 主振動系の 振幅比를 표시한 것으로서 第1共振點과 第2共振點에서 振幅比의 차이가 거의 없게 나타나며, 主振動系の 減衰比가 0.3 이상인 경우 그림 6(d), (e), (f)에서와 같이 主振動系の 振幅比는 크게 개선되지 않는다는 것을 實際로 알 수 있다. 또한, 質量比가 0.15 이상이 될 경우에도 主振動系の 振幅比는 크게 낮아지지 않는다. 그러나 質量比가 增加하면 第1共振振動數比가 第2共振振動數比보다 더 빠른 속도로 감소하여 두 共振振動數比사이의 領域이 擴張된다는 것을 알 수 있다.

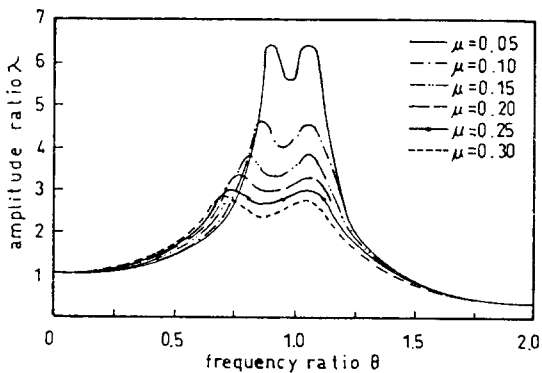
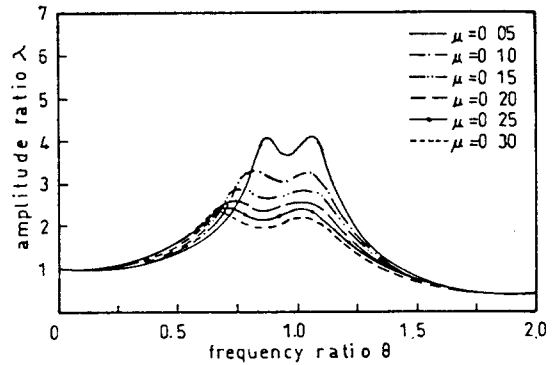
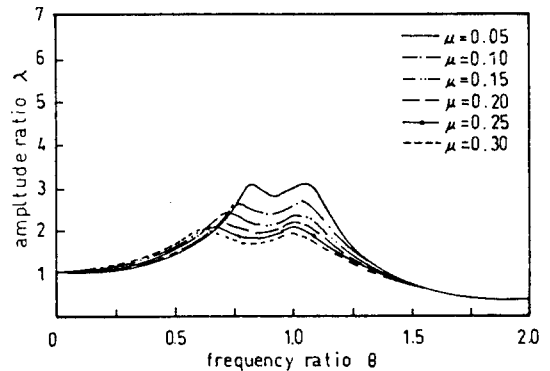


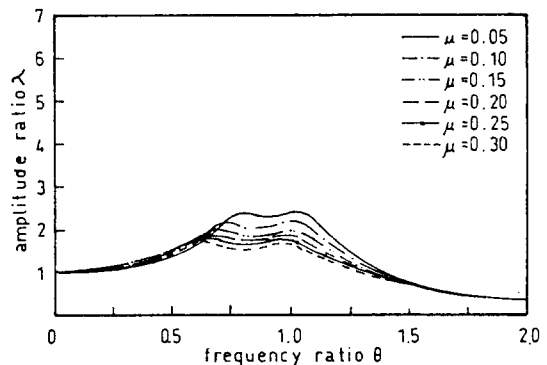
Fig. 6(a) Amplitude ratio plotted against frequency ratio for various mass ratio ($\xi_1 = 0$)



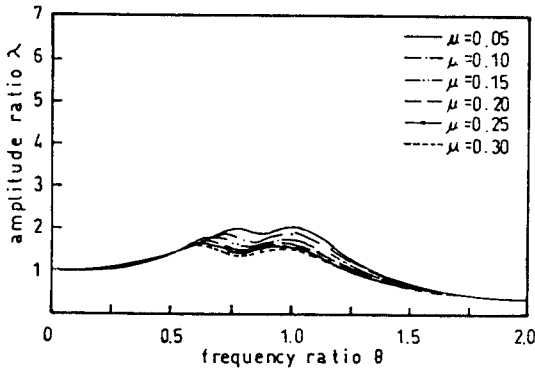
(b) Amplitude ratio plotted against frequency ratio for various mass ratio ($\xi_1 = 0.1$)



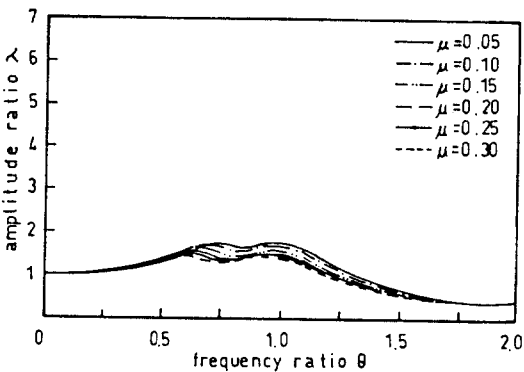
(c) Amplitude ratio plotted against frequency ratio for various mass ratio ($\xi_1 = 0.2$)



(d) Amplitude ratio plotted against frequency ratio for various mass ratio ($\xi_1 = 0.3$)



(e) Amplitude ratio plotted against frequency ratio for various mass ratio ($\xi_1 = 0.4$)



(f) Amplitude ratio plotted against frequency ratio for various mass ratio ($\xi_1 = 0.5$)

5. 結 論

減衰振動系에 線型動吸振器를 부착한 振動系의 運動方程式으로부터 主振動系의 振幅比를 유도하였으며 數值解析을 한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) 動吸振器가 부착된 振動系에서 主振動系의 減衰比가 클수록 主振動系의 振幅比는 動吸振器의 減衰比보다 固有振動數比의 影響을 더욱 크게 받는다.

2) 主振動系의 減衰比가 큰 경우에는 質量比가 增加해도 主振動系의 振幅比는 크게 減少하지 않는다.

3) 動吸振器의 質量比가 增加하면 第1共振振動數比가 第2共振振動數比보다 더 빠른 속도로 감소하여 두 共振振動數比사이의 領域이 擴張된다.

參 考 文 獻

1. J.Ormondroyd and J.P.Den Hartog, "Theory of the Dynamic Vibration Absorber," Trans. of the ASME, Vol.50, pp.9-22, 1928
2. J.P.Den Hartog, "Mechanical Vibrations," New York, McGraw-Hill, fourth edition, 1956.
3. G.B.Warburton, "Optimum Absorber Parameter for Minimizing Vibration Response," Earth-quake Engineering and Structural Dynamics, Vol.9, pp.251-262, 1982.
4. A.G.Thompson, "Optimum Tuning and Damping of a Dynamic Vibration Absorber Applied to a Force Exited and Damped Primary system," Journal of Sound and Vibration, Vol.77(3), pp.403-415, 1981.
5. A.F.Vakakis and S.A.Paipetis, "The Effect of a Viscously Damped Dynamic Absorber on a Linear Multi Degree of Freedom System", Journal of Sound and Vibration, Vol.105, pp.45-60, 1986
6. A.Soom and M.Lee, "Optimal Design of Linear and Non-linear

- Vibration Absorbers for Damped Systems”, Trans. of the ASME Journal of vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.105, pp.112-119, 1983.
7. J.B.Hunt and J.C.Nissen, “ The Broadband Dynamic Vibration Absorber,” Journal of Sound and Vibration, Vol.83, pp.573-578,1982
8. I.N.Jordanov and B.I.Cheshakov, “Optimal Design of Linear and Non-linear Dynamic Vibration Absorbers”, Journal of Sound and Vibration, Vol.123(1), pp.157-170, 1988.