

계단적 충격 생명검사에 관한 연구*

이 석 훈**

요 약

정상조건에서 수명이 상당히 긴 개체의 생명검사(Life Test)를 현실적으로 수행하기 위하여 제안된 충격생명검사에 관하여 고찰하였다. 생명검사의 결과로 얻는 자료의 통계적 분석을 위하여 이미 제안된 모형의 검토와 이들을 일면 포함하는 모형을 제시하고 그에 따르는 통계적 추론 과정을 최대우도추정법과 가중최소자승법을 사용하여 토의하였다. 한편 검사를 계획할 때 발생하는 실험설계의 문제를 검토하고 단순 계단적 충격검사에서 잘려진 자료(Censored Data)를 포함한 경우를 연구하였다.

1. 서 론

많은 생명검사(Life Test) 문제에 있어서 각 개체의 수명이 상당히 긴 경우에는 검사 시간(Test Time)이 현실적으로 받아들일 수 없을 만큼 장시간을 요구하며 동시에 많은 경비가 필요하게 되어 실제로 정상적인 조건에서의 생명검사가 불가능하다. 이와 같은 개체의 검사를 위하여 가속화된 생명검사(Accelerated Life Testing : ALT) 방법이 제안되었다.

ALT의 기본 입장은 개체를 정상조건보다 열악한 조건에서 검사하여 보다 짧은 시간에 정상조건에서 수행할 경우 얻을 수 없었던, 추론을 위하여 필요한 수의 관찰치 즉 고장 개체수 또는 사망 개체수(앞으로는 관찰치를 고장시간으로 표현한다)를 획득하여 시간과 경비면에서 검사의 현실성을 회복하려는 것이다. 반면 이러한 문제를 극복하기 위하여 지불하는 희생은 정상조건의 경우에 적용할 추론과정에서 외삽법(Extrapolation)의 사용으로 비롯되는 모형 의존성의 문제가 있다. 이와같은 ALT는 공학분야에서 많이 보여지는데 주로 생산품의 수명이나 그 성능의 검사, 또는 생산공정의 비교를 위하여 주로 사용된다. (Graser(1984), Kitagawa et al(1984), Fettel et al(1980), Nelson(1980))

ALT 검사방법에는 크게 두가지로 나눌 수 있는데 하나는 개체를 정상조건보다 열악한 특정한 조건에서 검사를 행하는 고정 충격 생명검사(Constant-Stress Life Test : CSLT)와 개체의 내·외적인 조건을 적당한 시간 간격을 두며 단계적으로 변화시켜서

* 이 연구는 88년도 한국과학재단 연구비 지원에 의한 결과임(과제번호 883-0105-018-1)

** 충남대학교 자연과학대학 통계학과

검사하는 계단적 충격 생명검사(Step-Stress Life Test : SSLT)가 있다. 조건의 변화를 충격을 준다는 의미로 쓰인 원어에 일치 시키고자 조건대신 충격이라는 표현을 쓰고자 한다. CSLT와 SSLT의 사용은 무엇보다도 관심있는 개체의 속성에 따라서 결정되므로 특정한 기준은 없으나 일반적으로 비록 열악하지만 고정된 충격 아래에서는 장시간의 검사가 예상되는 경우와 강한 충격을 주는 것이 비용과 관련될 경우에 모든 피검사 개체에게 강한 충격을 줄 필요없이, 검사를 진행하여 가다가 생존하는 개체에게만 더 강한 충격을 줌으로써 비용의 절감을 가져올 경우 SSLT를 택하게 된다고 할 수 있다.

우리는 이 연구에서 ALT중에서도 특별히 SSLT에 관한 통계분석을 고찰하는데 2절에서 SSLT에 의해서 얻은 자료의 분석을 위한 기존의 모형들을 검토하고 일면 이들 모형들을 포함하는 일반적인 모형을 제시하고 3절에서는 관심있는 모수의 추정에 관하여 토의하고 이 결과를 실제 Data에 적용하여 본다. 4절에서는 SSLT의 검사계획에 관하여 검토하고 특별히 조건의 변화가 1회만 허용된 검사에서 검사기간이 미리 정하여진 경우 (Type 1 Censoring Scheme)에 관하여 고찰한다.

2. 모 형

ALT로 부터 획득된 자료를 통계적으로 분석하는 목적은 피검사 개체가 정상적인 충격 아래에서 사용될 때 나타나는 수명분포에 관하여 추론하는 것이다. 이를 위하여 우리는 정상적인 충격에서 개체가 갖는 수명분포와 열악한 조건에서 갖게되는 수명분포 사이의 관계를 설정하는 모형과 SSLT에서 충격이 계단적으로 변화(대개의 경우는 강하여 지는 쪽으로 변화한다)할 때 수명에 미치는 효과를 설명하는 모형이 필요하게 된다. 이 절에서는 SSLT를 위하여 기존에 제안된 모형들을 검토하고 이들과 다른 입장에서 하나의 모형을 제안하고자 한다. 기본적으로 필요한 기호를 다음과 같이 정의한다.

V_j : 충격 j 를 나타내는 변수 (V_0 는 정상 충격)

τ_{ij} : i 번째 SSLT 양식에서 충격 V_j 가 시작되는 시점

(i 번째 SSLT 양식은 충격 V_1, V_2, \dots, V_m 이 $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots, \tau_{im}$ 에 시작하는 검사 양식을 의미한다.)

$F_j(t) = F(t : V_j)$: 충격 j 아래에서 개체가 갖는 수명분포

$\lambda_j(t) = \lambda(t : V_j)$: 충격 j 아래에서 개체가 갖는 고장율(failure rate)

$G_i(t)$: 충격 V_j 들과 변경 시점 τ_{ij} 가 주어진 상황에서 개체의 수명분포

(이후로는 양식을 나타내는 첨자 i 는 필요할 때만 사용한다.)

ALT에서 가장 중요한 모형은 $F_0(t)$ 와 $F_j(t)$ 의 관계이고 추가하여 SSLT에서는 $F_j(t)$ 들과 $G(t)$ 의 관계를 나타내는 모형을 필요로 한다. 많은 학자들이 SSLT의 모형을 제안

하여 왔는데, 그중 Nelson(1980)은 General Electric Co.의 전선 절연 물질의 수명에 관한 자료를 분석하기 위하여 $F_i(t)$ 와 $F_0(t)$ 사이에는 Inverse Power Rule과 $G(t)$ 와 $F_i(t)$ 들 사이에는 CE(Cumulative Exposure) 모형을 제안하였다. 그의 기본 입장은 어떤 시점에서 한 개체의 잔여수명은 그 시점에 적용된 충격에서의 수명분포로만 설명된다는 것이다. 다시말하면

$$\begin{aligned} G(t) &= F_1(t - \tau_1) & 0 &= \tau_1 < t < \tau_2 \\ &= F_2(t - \tau_2 + s_1) & \tau_2 &< t < \tau_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

로 나타낼 수 있는데 여기서 s_1 은 s 에 관한 방정식 $F_2(s) = F_1(\tau_2 - \tau_1)$ 의 해이다. Nelson은 $F_i(t)$ 를 Weibull 분포로 가정하고 위의 모형을 사용하여 자료를 분석하고 $F_0(t)$ 의 모수 및 신뢰도 등의 최우추정량을 구하였다. Bhattacharyya(1987)가 지적하였듯이 Nelson의 CE모형은 직관적, 현실적인 해석보다는 수리적인 해석과 함께 실제 자료분석에 사용된다고 본다.

반면 보다 물리적인 해석을 갖는 모형이 DeGroot와 Goel(1979)에 의해서 제안되었다. 그들의 입장은 충격변화의 영향을 잔여 수명에 미지의 값을 곱한 형태로 표현하였는데 그들은 1회의 충격 변화만이 있는 SSLT에 적용시켰다. 이를 분포함수로 나타내면

$$\begin{aligned} G(t) &= F_1(t - \tau_1) & \tau_1 &< t < \tau_2 \\ &= F_1(\tau_2 + \beta(t - \tau_2)) & \tau_2 &< t \end{aligned} \quad (2.2)$$

와 같이되어 $\beta > 1$ 이면 열악한 충격으로 변화된 것을 의미하게 된다. 그들은 이 모형에서 F_1 에 지수분포를 가정하여 Bayesian기법으로 모수 추정을 시도하였다.

우리는 SSLT계획을 Holford(1978)가 제시한 공변수를 갖는 표본 생명표 방식으로 보아서 동일한 충격이 가해지는 구간에서는 개체의 고장율이 동일하다는 가정을 기본적으로 한다. 따라서 i 번째 양식에서 j 번째 충격이 가하여지는 구간(τ_{ij}, τ_{ij+1})에서 임의의 개체가 갖는 고장율을 상수 λ_j 로 가정한다. 다시 말하면 한 개체에게 충격 V_j 가 시작되려고 하는 시점 τ_{ij} 에서 고장이 발생하지 않을 때 이 개체에게 시간 t 까지 사건이 발생하지 않을 조건부 확률이 $\exp[-\lambda_j(t - \tau_{ij})]$ 된다. 두번째로 우리는 고장율 λ_j 을 충격 V_j 의 함수로 나타내는 모형을 Armitage와 Doll(1961)이 세포속의 Carcinogen의 효과를 연구하기 위하여 사용하고 Klein과 Basu(1982)가 CSLT에 적용한 고장율 개념을 이용하여

$$\lambda_j = \lambda \exp\left[\sum_{i=1}^b \beta_i Q_i(V_j)\right] \quad (2.3)$$

을 가정한다. 여기서 $Q_1(V_j), Q_2(V_j), \dots, Q_b(V_j)$ 는 V_j 의 감소하지 않는 함수이며 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b$ 는 미지의 모수가 된다. 이와 같이 정의된 조건부확률과 고장율을 바탕으로 분포함수를 나타내면

$$\begin{aligned}
 G(t) &= F_1(t - \tau_1) & \tau_1 < t < \tau_2 \\
 &= F_2(t - \tau_2) + F_1(\tau_2 - \tau_1) - F_2(t - \tau_2)F_1(\tau_2 - \tau_1) & \tau_2 < t < \tau_3 \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

와 같이 된다.

지금까지 언급된 세 모형이 정의하는 수명 분포 함수의 기본적인 형태를 구체적으로 보면 먼저 Nelson이 가정한 모형에서 Weibull 분포대신 지수분포로 즉, 그의 기호 β 를 1로 하고 CE모형을 사용하면 SSLT 조건에서 개체의 수명분포는

$$\begin{aligned}
 G(t) &= 1 - \exp[-(t - \tau_1)(V_1/V_0)^\beta] & \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\
 &= 1 - \exp[-\{(t - \tau_2)(V_2/V_0)^\beta + (\tau_2 - \tau_1)(V_1/V_0)^\beta\}] & \tau_2 \leq t \leq \tau_3 \\
 &= 1 - \exp[-\{(t - \tau_3)(V_3/V_0)^\beta + (\tau_3 - \tau_2)(V_2/V_0)^\beta + (\tau_2 - \tau_1)(V_1/V_0)^\beta\}] & \tau_3 \leq t \leq \tau_4 \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

와 같이 되고 DeGroot와 Goel의 모형에 따르면

$$\begin{aligned}
 G(t) &= 1 - \exp[-\lambda_1(t - \tau_1)] & \tau_1 \leq t \leq \tau_2 & (2.6) \\
 &= 1 - \exp[-\lambda_1\tau - \beta\lambda_1(t - \tau_2)] & \tau_2 < t
 \end{aligned}$$

이며 우리가 제안한 모형에 따르면

$$\begin{aligned}
 G(t) &= 1 - \exp[-\lambda \exp[\sum_{i=1}^p \beta_i Q_i(V_1)](t - \tau_1)] & \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\
 &= 1 - \exp[-\lambda \exp[\sum_{i=1}^p \beta_i Q_i(V_2)](t - \tau_2) - \lambda \exp[\sum_{i=1}^p \beta_i Q_i(V_1)](\tau_2 - \tau_1)] & \tau_2 \leq t \leq \tau_3 \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

이 된다. 이와 같이 비교하여 볼 때 우리가 제시하는 모형이 Nelson이 사용한 Inverse Power Rule 모형뿐 아니라 일반적으로 잘 알려진 ALT의 충격 변환 함수를 포함하는 일반적인 모형이며 또한 CE모형의 현실적 의미 결여와 DeGroot와 Goel의 모형이 두개의 충격에서만 정의되는 약점을 극복하는 모형이라고 할 수 있다.

3. 분 석

3.1 자 료

k 개의 SSLT 양식(pattern)이 있다고 하자. N 을 양식 i 의 표본 크기라고 하고 $N_0 = \sum_{i=1}^k N_i$ 를 전체 표본 크기라고 하자. d_{ij} 를 시간 τ_{ij} 와 τ_{ij+1} 사이에서 고장 발생 갯수라 하고 그 고장시간을 $\tau_{ij} + t_{ij\ell}$ ($\ell=1, 2, \dots, d$)라고 하며 W_{ij} 를 시간 τ_{ij} 와 τ_{ij+1} 사이에서 제거된 개체의 수라 하고 그 최종 확인 시간을 $\tau_{ij} + t'_{ij\ell}$ ($\ell=1, 2, \dots, W$)라고 하자. N_{ij} 는 시간 τ_{ij} 와

τ_{ij+1} 사이에 작동하고 다음 충격 V_{j+1} 에 노출되는 표본 크기이다. 즉 $N_{ij} = N_{ij-1} - W_{ij} - d_{ij}$ 가 성립한다.

3. 2 최대 우도 추정

모형이 포함하고 있는 모수 λ 와 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 의 최대 우도 추정을 위하여 양식 i 에서 충격 V_j 에 투입되는 조건하에서 조건부 우도함수는

$$L_{ij} \propto \left[\prod_{l=1}^{d_{ij}} \lambda_j \exp(-\lambda_j t_{ijl}) \right] \left[\prod_{l=1}^{w_{ij}} \exp(-\lambda_j t'_{ijl}) \right] \exp(-\lambda_j (\tau_{ij+1} - \tau_{ij}) N_{ij}) \quad (3. 1)$$

$$= \lambda_j^{d_{ij}} \exp(-\lambda_j T_{ij})$$

이다. 여기서

$$T_{ij} = \sum_{l=1}^{d_{ij}} t_{ijl} + \sum_{l=1}^{w_{ij}} t'_{ijl} + N_{ij}(\tau_{ij+1} - \tau_{ij})$$

는 충격 V_j 아래에서 개체들이 보낸 총 시간을 의미하게 된다.

모든 양식과 m 개의 조건부 우도함수를 함께 고려하고 λ_j 를 (2. 3)으로 치환하면 전체 우도함수는

$$L = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^m \lambda_j^{d_{ij}} \exp\left[d_{ij} \sum_{l=1}^p \beta_l Q_l(V_j)\right] \exp\left[-T_{ij} \lambda \exp\left(\sum_{l=1}^p \beta_l Q_l(V_j)\right)\right] \quad (3. 2)$$

이다. λ 와 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 의 최대 우도 추정량은 전체 우도함수에 \log 를 취하여 각 모수에 관하여 미분한 $p+1$ 개의 우도 방정식

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m [d_{ij}/\lambda - T_{ij} \exp(\sum_{l=1}^p \beta_l Q_l(V_j))] = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_q} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m Q_q(V_j) [d_{ij} - T_{ij} \lambda \exp(\sum_{l=1}^p \beta_l Q_l(V_j))] = 0 \quad (3. 3)$$

($q = 1, 2, \dots, p$)

의 해로써 얻어진다. 이들 추정량의 근사분산 공분산 행렬(Asymptotic Variance Covariance Matrix)의 추정량은 정보 행렬(Information matrix)의 역행렬에 모수를 최대 우도 추정량으로 치환하여 얻을 수 있다.

3. 3 최소 자승 추정

비선형 우도 방정식 (3. 3)을 수치적으로 풀기 위하여 초기값이 필요로 되는데 이를 위하여 우리는 최소 자승 추정량을 자료로부터 얻을 것을 제안한다. 충격 V_j 에서 가정된 임의의 개체의 고장율 λ_j 의 최대 우도 추정량을 (3. 1)에서 구하면

$$\partial \ln L / \partial \lambda_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (d_{ij} / \lambda_j - T_{ij}) = 0 \text{ 으로부터}$$

추정량 $\hat{\lambda}_j = d_j / T_j$ 을 얻는다(여기서 $d_j = \sum_i d_{ij}$; $T_j = \sum_i T_{ij}$ 이다).

한편 $\eta_j = \ln \lambda_j$ 라고 놓으면

$$\eta_j = \ln \lambda + \sum_{i=1}^p \beta_i Q_i(V_j) \quad j = 1, 2, \dots, m \text{ 이다.}$$

따라서 우리는 X 와 B 를 아래와 같이 정의하면,

$$X = \begin{bmatrix} 1 Q_1(V_1) \cdots Q_p(V_1) \\ 1 Q_1(V_2) \cdots Q_p(V_2) \\ \dots \\ 1 Q_1(V_m) \cdots Q_p(V_m) \end{bmatrix} \quad \text{와} \quad B = \begin{bmatrix} \ln \lambda \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

모형 $\eta_j = XB + \epsilon_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$)을 얻고 B 의 최소 자승 추정량을 구할 수 있다. 그러나 최대 우도 추정량 $\hat{\eta}_j = \ln \hat{\lambda}_j$ 의 분산이 근사적으로 $1/d_j$ 로 정보 행렬의 역행렬에서 얻어지므로 단순 최소 자승 추정량이 아닌 가중 최소 자승 추정량을 구한다.

즉,

$$A = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_m \end{bmatrix} \quad \text{라고 하면}$$

$$\hat{B} = [X' A^{-1} X]^{-1} X' A^{-1} \hat{\eta} \text{ 이 된다} \quad (3.5)$$

여기서 $d_j = 0$ 인 경우는 $\hat{\eta}_j$ 가 대단히 작은 값이 되지만 (3.4)에서 $\hat{\eta}_j$ 에 해당하는 가중치가 0으로 주어지게 되므로 자동적으로 최소자승추정과정에서 제거되게 된다.

3.4 예

우리는 2절에서 제안한 모형과 3절에서 논한 추정방법을 Nelson(1980)이 토의한 전선 절연 물질의 SSLT 자료에 적용하여 보려고 한다. 여기서 설명을 단순화 하기 위하여 전선의 굵기(27, 28, 29, 30)를 무시하고 30mm로 간주하고 정상조건을 12kv로 놓았다. 또한 5, 10, 15, 20kv에서 10분간씩 검사한 것은 그 충격에서 아무것도 관찰되지 않았으므로 자료 기술에서는 생략된다. 그의 자료를 다음과 같이 요약할 수 있다.

i \ j	V	1	2	3	4	5	6
	N _i	26.5	28.5	31	33.4	36.0	38.5
1	3	0	0	0	0	3	
(15)		45	45	45	45	28	
2	3	0	0	0	0	0	1(2)
(60)		180	180	180	180	180	40
3	6	0	0	0	0	2	3(1)
(240)		1440	1440	1440	1440	1154.8	205.8
4	9	0(2)	1	3(1)	1	1	
(960)		7902.3	5920	3665.1	963.9	262.1	
No	25	0	1	3	1	6	4
		9567.3	7585	5330.1	2628.9	1624.9	245.8

1-4행의 각 cell의 위치는 $d_{ij}(W_{ij})$, 아래는 T_{ij} 이고 5행은 d_i 와 T_i 를 나타낸다.

위의 자료로 부터 우리는 $Q_1(V) = V$ 와 $Q_2(V) = V^2$ 으로 모형을 설정하여 추정하고자 일차적으로 모형 (3. 4)에 적합 여부를 $\hat{\eta}_i$ 와 V 의 plot으로 검토한 바 정상조건 $V = 12\text{kv}$ 에서 외삽법의 사용이 비현실적인 것을 발견하였다. 왜냐하면 $\hat{\eta}$ 를 V 에 관하여 2차식으로 적합시킨 결과는 V 값이 정상조건인 12kv 근처에서 단조감소현상이 보이는 것으로 나타났다. 따라서 $Q_1(V) = V$ 로 하여 1차항만 사용하는 모형을 설정하고 추정하였다.

결과를 요약하면 다음과 같다.

	$\hat{\eta} = \ln \hat{\lambda}$	$\hat{\beta}_1$
최소자승법	-22.2745	.4621
가중최소자승법	-22.1976	.4641
최대우도추정법	-23.30	.4928
(95% C.I.)	(-29.2310, -17.3692)	(.3239, .6617)

한편 그림 (3. 1)과 (3. 2)에서 1st percentile과 10th percentile의 신뢰구간을 전압 11kv 부터 50kv 사이에서 볼 수 있다.

3. 5 토 의

Nelson이 제안한 CE모형이 주로 수리적으로 해석되는데 반하여 보다 현실적인 의미를 갖고 설명되는 우리의 모형이 갖게되는 장점은 첫째로 한 충격을 지속하는 시간이 대단히 짧으면 우리가 설정한 부분적인 지수 분포(Piecewise Exponential)의 결합 분포가 넓게 적용되는 수명분포들과 매우 가까운 형태를 갖게 된다는 것이다. 둘째로 우리의 모형은 충격과 수명과의 관계를 대단히 일반화 시켰다는 사실이다. 즉 Nelson이 쓴 Power Rule을 포함할 뿐 아니라 대부분 잘 알려진 모형들, Arrhenius Reaction Model,

Errying Model 등을 포함하게 되므로 특수한 가정을 사용할 필요가 없다. 세째는 MLE 추정에서 가중 최소 자승 추정량이 좋은 초기치로 사용되며 또한 최소 자승 추정법의 사용에서 잔차 등의 분석으로 모형의 적합성에 관하여 일부를 검증할 수 있다는 것이다.

4. 실험계획

4.1 가정과 문제설정

일반적으로 ALT를 계획할 때 고려되는 사항은 조건(충격)을 나타내는 변수의 선택과 변수가 택할 수 있는 가능한 값의 범위가 우선 관심있는 개체의 고장요인과 함께 생각되어져야 한다. 특히 우리가 토의하고 있는 SSLT에서는 사용되어야 하는 충격의 크기들을 정하고 이들을 변경하는 시점을 어떻게 결정하느냐 하는 문제가 계획 단계에서 제기된다. 이 문제에 대하여는 아직 깊은 연구가 이루어지지 않았고 Miller와 Nelson(1983)이 두 개의 충격이 사용될 때 충격을 바꾸는 시점의 선택을 종합적으로 연구하여 계획 과정에서 판단을 크게 도와 주었다. 그러나 그들이 연구한 내용은 두번째 충격이 주어진 후 모든 관찰치가 획득되는 것을 가정하고 한 것이므로 현실적으로 검사시간의 단축에 중요한 의미를 부여하는 SSLT의 중요성을 간과 한다고 볼 수 있다. 이에 우리는 실험의 총 시간이 주어진 상황을 설정하여 그들의 연구 결과를 확장하고자 한다.

2절과 3절에서 제안한 모형에서 충격이 두개 있는 경우에 관하여 고찰하게 되므로 우리가 사용한 기호들을 Miller와 Nelson이 사용한 기호와 일관성을 갖게 하기 위하여 다음과 같이 다시 정의하기로 한다.

$V_D(V_L)(V_H)$: SSLT에서의 정상조건(초기조건, 2차조건)

x : 1차 조건에서 2차 조건으로 바꾸는 시점

τ : SSLT실험에 허용된 총시간

$V_D < V_L < V_H$ 을 가정한다.

$k := (V_L - V_D)/(V_H - V_L)$

n : SSLT에 투입된 표본의 크기

$R_1(R_2)$: 1(2)차 충격에서 고장난 개체의 수

R_3 : 2차 충격에서도 고장나지 않은 개체의 수

$$\begin{aligned}
 G(t) &= 1 - \exp(-\alpha t) & t \leq x \\
 &= 1 - \exp(-\alpha x) \exp(-\alpha \beta(t - x)) & x \leq t < \tau \\
 &= 1 & t \geq \tau
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

이 절에서 $G(t)$ 를 (4.1)로 하는 것은 이 모형이 우리가 제시한 모형에서 충격이 두개인 경우로 DeGroot와 Goel의 모형과 동일하고 Miller와 Nelson이 가정한 모형과도 실질적으로 동일하기 때문이다.

한편 우리가 구하는 최적의 기준은 Miller와 Nelson, DeGroot와 Goel 등이 연구한 것과 같이 정상 조건의 평균 수명의 최대 우도 추정량의 분산을 최소화 하는 것으로 한다. 또한 그들의 결과를 확장시키기 위하여 충격과 평균 수명을 2절에서 가정한 지수 함수 대신 그들이 가정한 것 같이 1차식으로 가정하고

$$F_0(t) = 1 - \exp(-(\alpha/\beta^k)t) \quad (4. 2)$$

으로 놓는다.

4. 2 최적 시점 탐색

최대 우도 추정량 $\hat{\alpha}$ 와 $\hat{\beta}$ 의 함수, $f(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \hat{\beta}^k/\hat{\alpha}$ 이 분산을 최소화 시키기 위하여 먼저 $\hat{\alpha}$ 와 $\hat{\beta}$ 의 최대 우도 추정량 및 이들의 근사 분산 공분산 행렬을 구하여야 한다. 우리가 갖게 되는 자료 즉, 관찰되는 수명을 t_1, t_2, \dots, t_n 이라 하고 r_1, r_2, r_3 를 R_1, R_2, R_3 의 관찰치라고 하고 D_i 를 R_i 에 대응되는 그룹 i 에 속하는 개체들의 집합이라고 하면 우도 함수는

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \sum_{i \in D_1} \alpha \exp(-\alpha t_i) \prod_{j \in D_2} \alpha \beta \exp(-\alpha \beta(t_j - x)) \exp(-\alpha x) * \\ &\quad \prod_{i \in D_3} [\exp(-\alpha \beta(\tau - x) - \alpha x)] \\ &= \alpha^{r_1 + r_2} \beta^{r_2} * \exp[-\alpha \sum_{i \in D_1} t_i - \alpha \beta \sum_{j \in D_2} (t_j - x) - (n - r_1) \alpha x - \\ &\quad (n - r_1 - r_2) \alpha \beta(\tau - x)] \end{aligned} \quad (4. 3)$$

이 된다.

log 우도 함수로부터 우도 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \partial \ln L / \partial \alpha &= (r_1 + r_2) / \alpha - T_1 - \beta T_2 - (n - r_1)x - (n - r_1 - r_2) \beta(\tau - x) = 0 \\ \partial \ln L / \partial \beta &= r_2 / \beta - \alpha T_2 - (n - r_1 - r_2) \alpha(\tau - x) = 0 \end{aligned} \quad (4. 4)$$

여기서 $T_1 = \sum_{i \in D_1} t_i$ 이고 $T_2 = \sum_{j \in D_2} (t_j - x)$ 이다.

방정식 (4. 4)의 해는

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= r_1 / (T_1 + (n - r_1)x) \\ \hat{\beta} &= r_2 (T_1 + (n - r_1)x) / \{r_1 (T_2 + (n - r_1 - r_2) (\tau - x))\} \end{aligned} \quad (4. 5)$$

이고 정보 행렬 $I(\alpha, \beta)$ 는

$$I(\alpha, \beta) = E \left[\begin{array}{cc} (r_1 + r_2) / \alpha^2 & T_2 + (\tau - x)(n - r_1 - r_2) \\ T_2 + (\tau - x)(n - r_1 - r_2) & r_2 / \beta^2 \end{array} \right]$$

이다.

(R_1, R_2, R_3) 가 $A = \exp(-\alpha x)$, $B = \exp(-\alpha\beta(\tau-x))$ 라고 할 때 $(p_1=1-A, p_2=A(1+B), p_3=AB)$ 를 모수로 갖는 삼항 분포라는 사실과 $E(T_2) = n(A(1-B))/\alpha\beta - nAB(\tau-x)$ 로 부터

$$I(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} n(1-AB)/\alpha & n(A-AB)/\alpha\beta \\ n(A-AB)/\alpha\beta & n(A-AB)/\beta \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

그리고 추정량 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 의 분산 공분산 행렬,

$$C(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (1-A)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha^2/n & -\alpha\beta/n \\ -\alpha\beta/n & \beta^2/\{n(1-AB)/(A-AB)\} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

을 얻는다.

이제 우리의 목표인 $f(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \hat{\beta}/\hat{\alpha}$ 의 분산을 델타 방법(δ -method)으로 구하면

$$\begin{aligned} V(f(\hat{\alpha}, \hat{\beta})) &= V(\hat{\beta}/\hat{\alpha}) \\ &= (\beta^{2k}/n\alpha^2)x\{(1+2K)A(1-B)+K^2(1-AB)\}/\{A(1-A)(1-B)\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

이다. 따라서 우리의 문제는 식 (4.8)을 최소화 시키는 x 의 값을 구하는 것인데 이를 위하여는 모든 최적화 실험 계획 문제가 갖고 있는 난점인 미지의 모수들, 여기서는 α 와 β 에 대한 가정이 요구된다. Miller와 Nelson의 경우는 $B=0$ 이 되어서

$$V(\hat{\beta}/\hat{\alpha}) = (\beta^{2k}/n\alpha^2)x(2A+1)/\{A(1-A)\}$$

을 최소화시키는 문제로 축소된다. 식 (4.8)을 $Y=A, L=AB$ 로 하여 다시 정리하면

$$0(Y) = \{(1+2K)/(1-Y)\} + [K^2\{Y^{\beta-1}-L^{\beta}\}/\{(1-Y)(Y^{\beta}-L^{\beta})\}]$$

가 되고 $Y = \exp(-\alpha x)$ 는 초기 조건에서 개체가 고장이 나지 않을 확률이고 $L = \exp(-\alpha\tau)$ 는 임의의 개체가 미리 제한된 총 검사시간까지 초기 조건에서만 관찰될 경우 고장이 나지 않을 확률을 의미한다. 따라서 α 와 τ 를 분리하여 가정할 필요가 없으므로 우리는 Y 의 범위 $(L, 1)$ 에서 $0(Y)$ 를 최소로 하는 Y 값을 K, L, β 로 표시하기를 원한다. 그러나 $0(Y) = 0$ 이 Y 에 관한 4차식으로 그 해를 수식으로 구할 수 없기 때문에 Y 와 K, L, β 상호간의 관계를 그림 (4.1)과 (4.2)로 설명하고자 한다.

그림 (4.1)에서 (A), (B), (C)로 분류한 것은 L 의 값이, 즉 초기 조건과 총검사 시간으로부터 예측되는 값 $\exp(-\alpha\tau)$ 이 .22, .37, .61인 경우이다. 총격을 변화시키지 아니하고 총검사시간 τ 동안 검사할 경우 78% 정도의 관찰값이 예상 된다면, 즉 $L = .22$ 이면 (A) part의 curve들을 참조하게 된다. 예를 들면 (A)에서 K 값이 1인 근처에서 Y 값이 .

35정도를 갖는 것을 볼 수 있다. 이는 만약 $K=1$, 즉 정상 조건이 초기 조건으로부터의 낮은 정도가 초기 조건이 2차 조건보다 낮은 정도와 비슷하다면 약 65% 정도가 초기 조건에서 고장 나리라고 생각되는 시점 x 에서 충격 V 를 주는 것이 적절하다는 것을 알 수 있다. 이는 Miller와 Nelson의 경우, $L=0$ 인 경우 70%를 제시한 것으로부터 총검사 시간 τ 가 주어져서 계산된 $L = .22$ 정도인 경우에는 약 5% 정도 적게 고장날 것으로 예상되는 시점에서 조건을 변화시킬 것을 제시하고 있다. (A) part의 세 개의 curve들을 통해서 V 에 의해서 결정되는 β 값에 따라 좀 더 면밀히 조사할 수는 있으나 우리가 조사한 바에 의하면 L 값이 0과 1로 가까워 질수록 β 값에 의한 차이는 적다는 것을 알 수 있었다. 또한 K 값이 작아질수록 각 군의 곡선들은 β 값에 관계없이, Y 값이 L 값으로 가까이 감을 볼 수 있다. 이것은 K 값이 작아진다 함이 초기 조건이 정상 조건과 가깝다는 것을 의미하고, Y 값이 L 값과 비슷하다는 것은 x 가 τ 에 가깝다는 것을 의미하므로 대부분을 초기 조건에서 검사하는 것이 적절하다는 직관적인 생각을 설명해 준다. 그림 (4. 1)에서는 주어진 L , 즉 $\alpha\tau$ 에 대하여 K 와 Y 의 관계를 보았는데 반하여 그림 (4. 2)는 충격 V 에 의해서 주어지는 β 에 대하여 L 과 Y 의 관계를 보여주는데 특히 주목되는 것은, L 이 적당히 큰 값 (β 가 12인 경우는 L 이 .2이상인 경우, β 가 6인 경우는 L 이 .1 이상)인 경우에 L 과 Y 가 거의 선형 관계를 갖고 있다는 것이다. 또한 관찰된 것은 L 이 커지면 커질수록 서로 다른 K 값들에 대한 Y 값들의 차이가 작아지고 있다는 사실과 L 이 작고 β 가 큰 경우는 Y 의 값이 Miller와 Nelson이 제시한 값 $1/(2+1/K)$ 에 근사하면서 K 값에 따라 결정되어 진다는 것이다. 다시 말하면 총 검사 시간이 상대적으로 충분히 크고 충격 V 로 큰 β 값이 예상되면 Miller와 Nelson이 고려한 총검사시간의 제약이 없는 상황과 유사한 환경이 되므로 그들이 제시한 값을 사용하여도 좋다는 것을 알 수 있다.

결론적으로 그림 (4. 1)과 (4. 2)를 통해서 Miller와 Nelson의 결과도 볼 수 있을 뿐 아니라 총 검사 시간 τ 가 정해진 경우에 모수들 α , β 와 충격 변환 시점과의 관계를 충격의 크기를 상대적으로 나타내는 K 값에 따라 보임으로써 단순 SSLT 경우의 최적화 문제가 갖고 있는 내부 구조를 더 깊이 이해할 수 있게 하고 최적 계획을 탐색할 때 보다 확장된 하나의 지침을 제공할 수 있다.

Fig. 3. 1 1st p'tile at each voltage (95% C.I.)

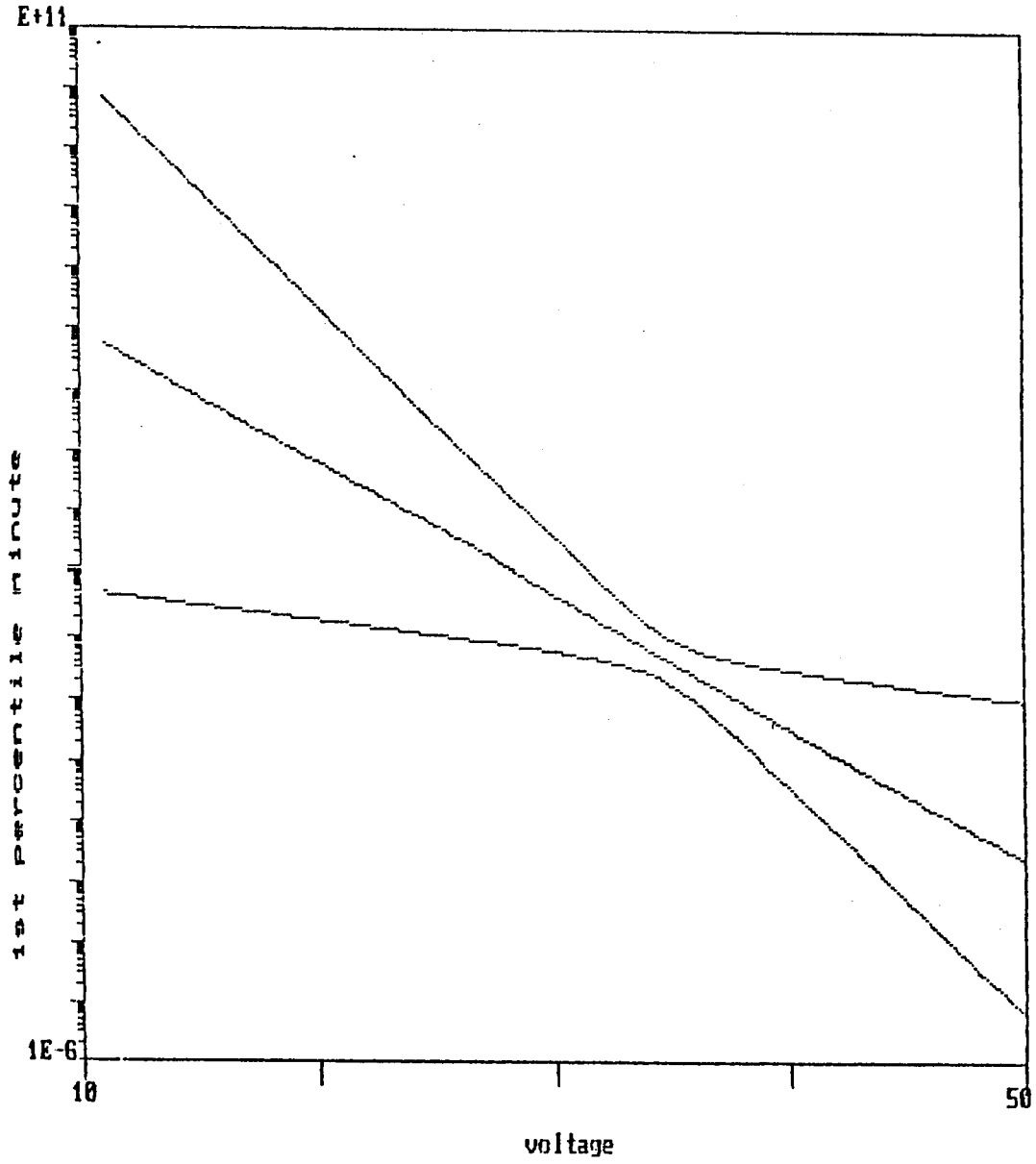


Fig. 3. 2 10th p'tile at each voltage (95% C.I.)

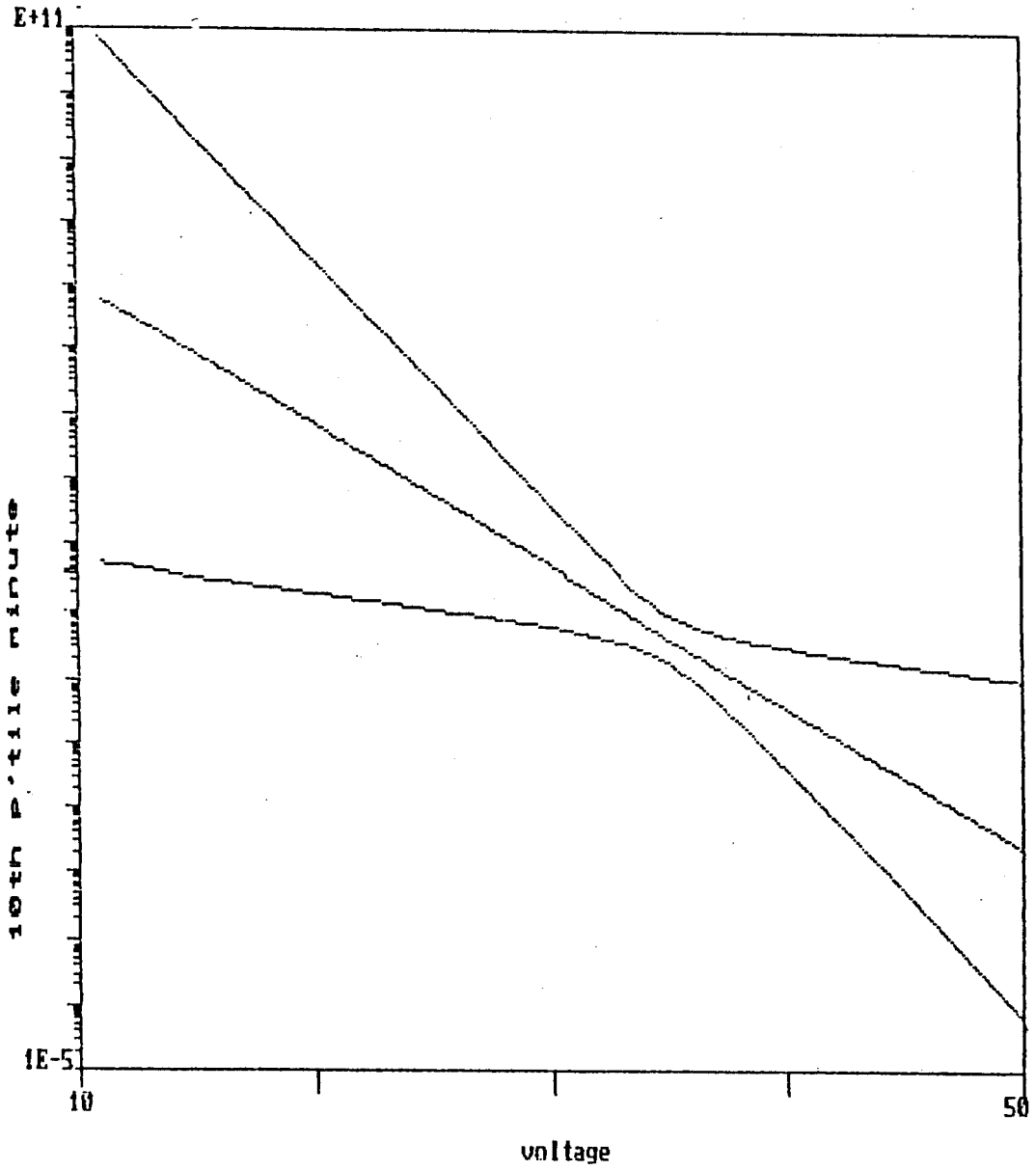


Fig. 4. 1 K vs Y at L=.22(R), .37(B), .61(C)

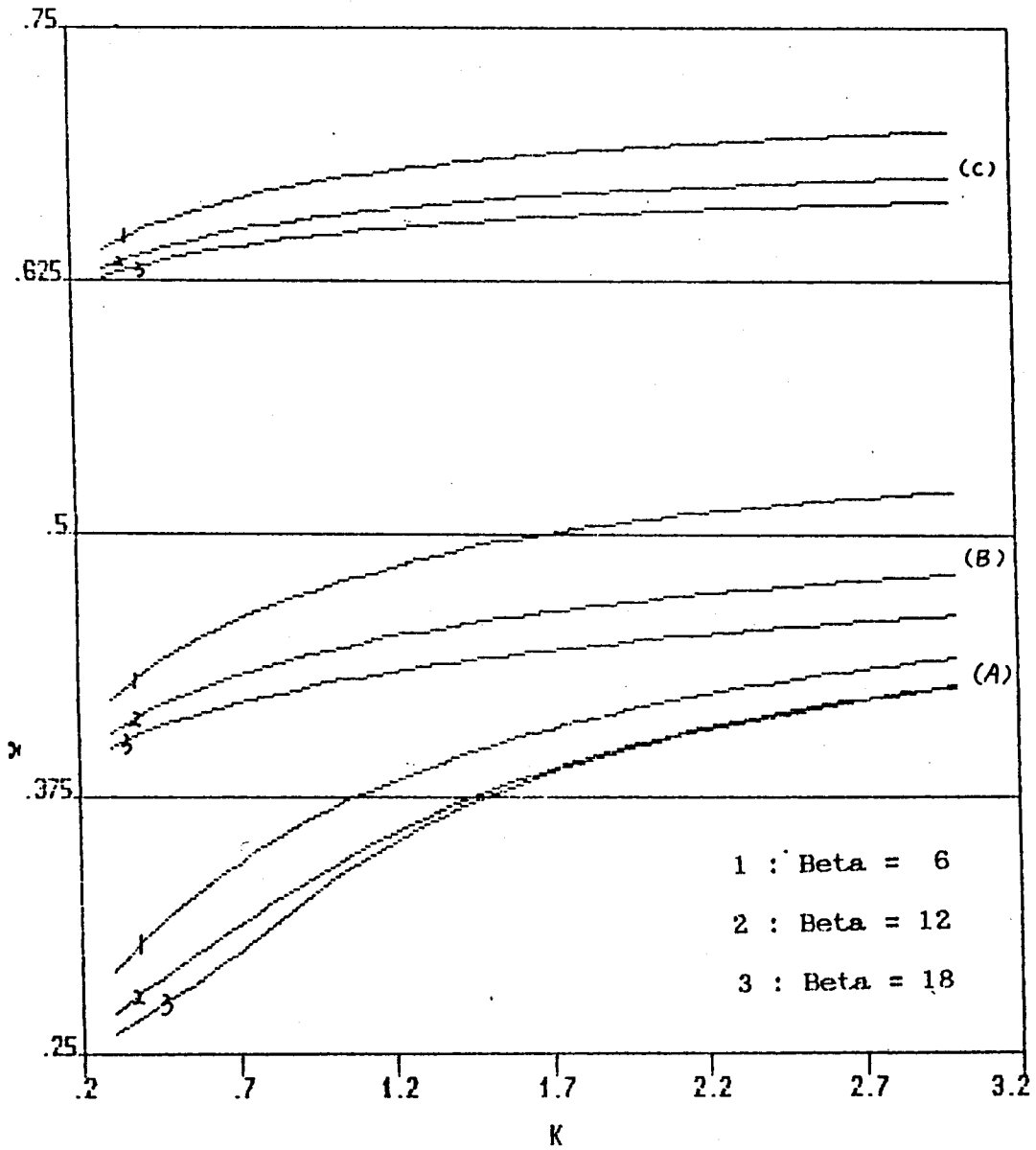


Fig. 4. 2 L vs Y at Beta=12.0

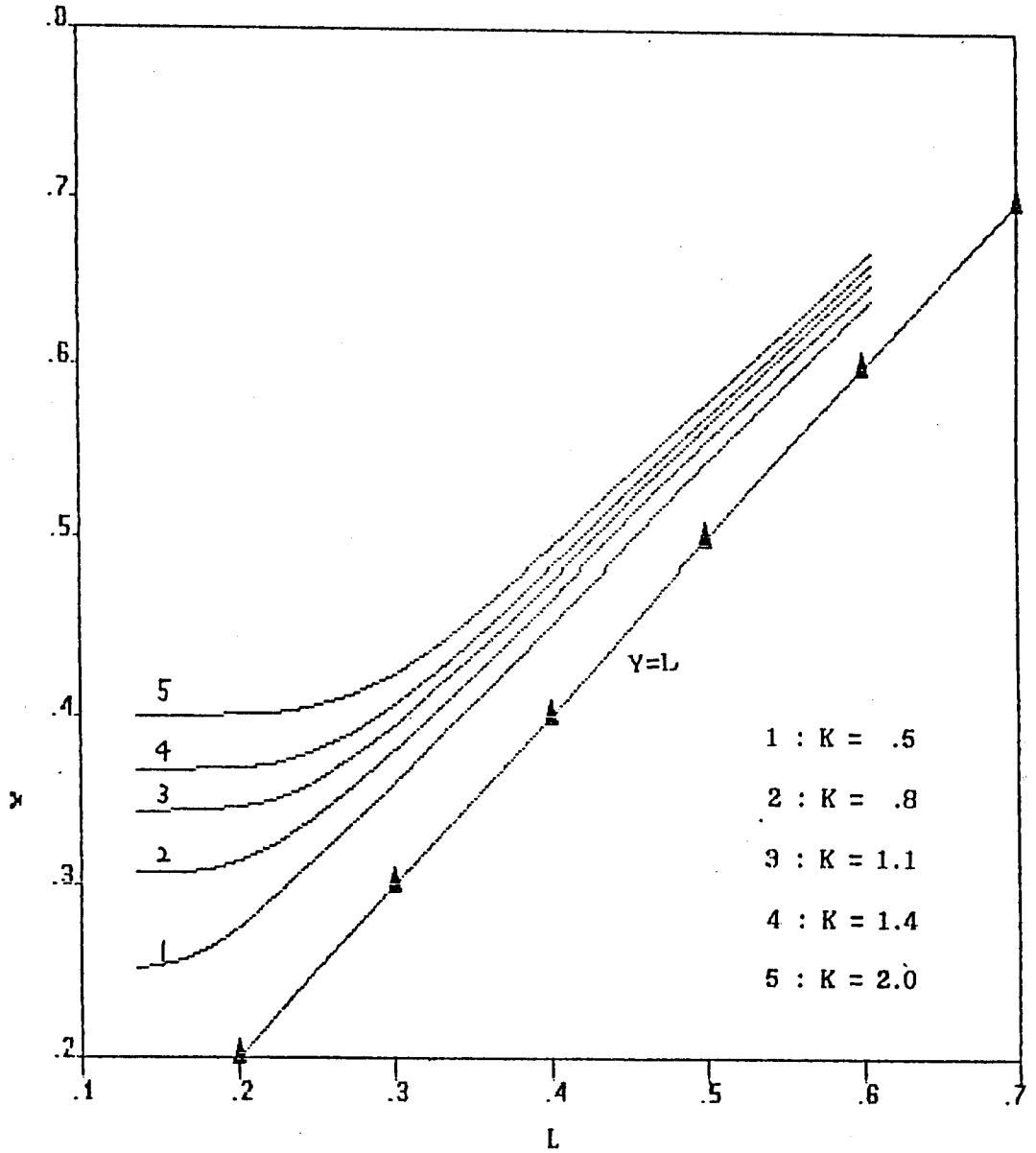
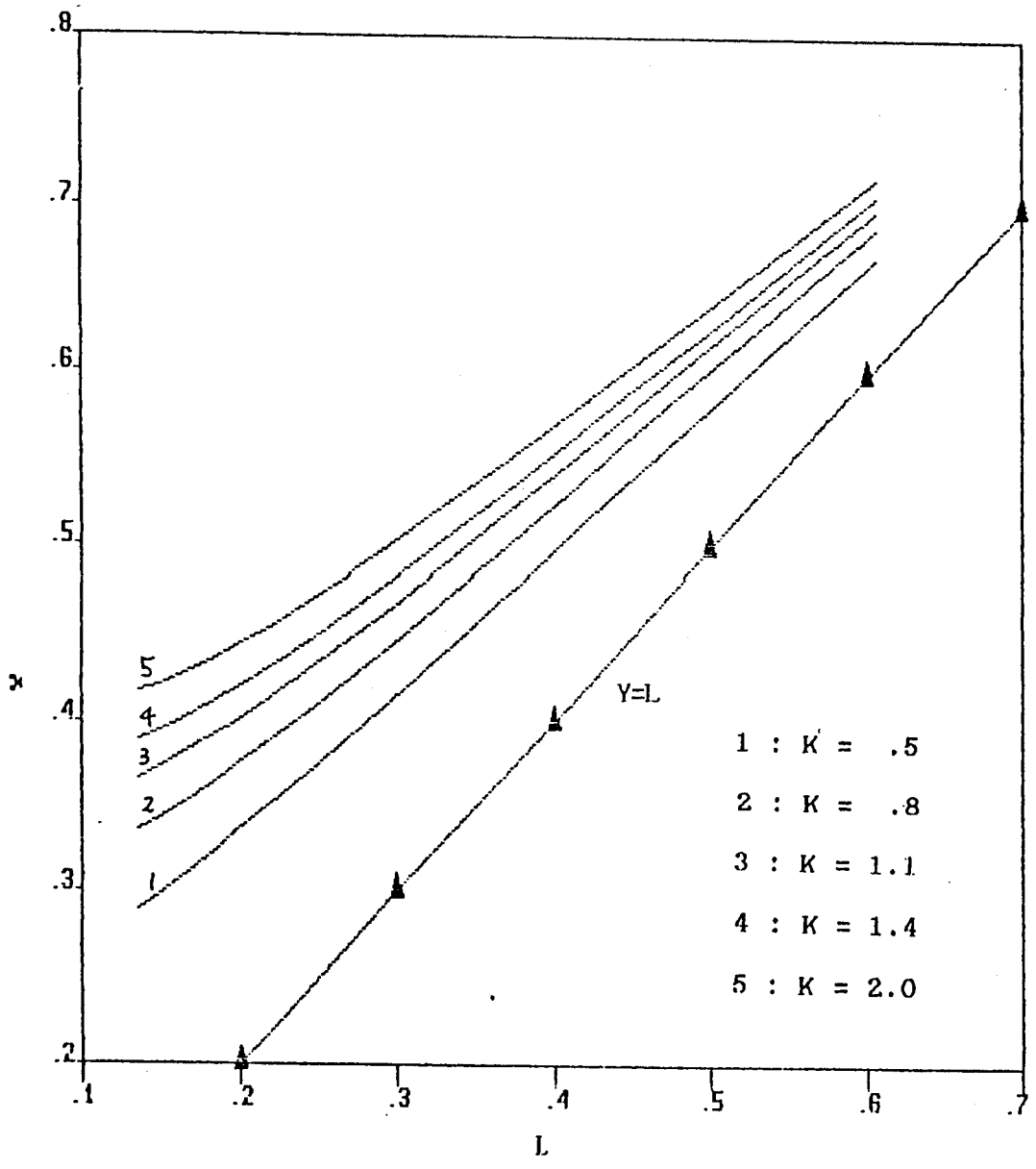


Fig. 4. 2 L vs Y at Beta=3.0



참 고 문 헌

- (1) Armitage, P. and Doll, R.(1961), "Stochastic models for carcinogens, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 19-38."
- (2) Bhattacharyya, G.K.(1987), "Parametric models and inference procedures for accelerated life tests, Invited Paper for the 46th Session of the International Statistical Institute."
- (3) DeGroot, M. H. and Goel, P.K.(1979), "Bayesian estimation and optimal designs in partially accelerated life testing," *Naval Research Logistics Quarterly*, 26, 223-235.
- (4) Fettel, B. E., Johnston, D. R. and Morris, P.E. (1980), "Accelerated life testing of prosthetic heart valves," *Medical Instrumentation*, 14, 161-164.
- (5) Glaser, R.E.(1984), "Estimation for a Weibull accelerated life testing model," *Naval Research Logistics Quarterly*, 31, 559-570
- (6) Holford, T. R. (1976), "Life Tables with concomitant information," *Biometrics*, 32, 587-597.
- (7) Kitagawa, K., Toriama, K. and Kanuma, Y. (1984), "Reliability of liquid crystal display," *IEEE Transaction on Reliability*, R-33, No. 3, 213-218.
- (8) Klein, J. P. and Basu, A. P. (1982), "Accelerated life tests under competing Weibull causes of failure," *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 11, 2271-2286.
- (9) Miller, R. and Nelson, W. (1983), "Optimum simple step stress plans for accelerated life testing," *IEEE Transactions on Reliability*, R-32, 59-65.
- (10) Nelson, W. (1980), "Accelerated life testing—step—Stress models and data analysis," *IEEE Transaction on Reliability*, R-29, 103-108.

A Study on the Step Stress Life Testing

Suk Hoon Lee

Abstract

We consider the step stress life testing which has been developed in order to perform the life testing of the units whose normal life time is long within a reasonable amount of time. The models suggested for statistical analysis of the data obtained from the stress life testing are reviewed and a model which contains these models in some respect is suggested. The statistical inference based on the suggested model is done using maximum likelihood and weighted least square estimates. Finally we review the design of the simple step stress life testing and extend the result to the censoring case.