

# Singular Value를 이용한 이산계 다중입출력 시스템의 Sensitivity 분석

## (Sensitivity Analysis of Discrete MIMO Systems Using Singular Values)

姜 治 宇\*, 李 夫 熙\*

(Chee Woo Kang and Kwae Hi Lee)

### 要 約

지금까지 연속계 다중입출력 시스템의 안정도 및 sensitivity를 분석하기 위하여 singular value와 그 도함수들을 이용하여 왔다. 그러나 이런 방법은 연속계에 국한되어 왔다. 본 연구에서는 연속계에서 사용한 이론을 이산계로 확장하여 이산계에서 설계한 시스템의 sensitivity 분석을 이산계에서 직접 할 수 있도록 하였다. 이를 위하여 이산계에서의 return difference matrix의 최소 singular value와 시스템 안정도 여유 사이의 관계식을 유도하였고, singular value 도함수를 계산하는 방법을 도출하였다. 이 방법의 유용함을 입증하기 위하여 연속계 및 이산계 각각의 경우에 대해서 다중입출력 시스템인 무인항공기의 횡안정 루프에 적용하여 보았다.

### Abstract

Singular values and their gradients have been used to analyze the stability and sensitivity of continuous multiloop systems. But this method has been limited to the discrete systems. This method is extended in this paper to analyze discrete systems directly in discrete domain. To do this, derived is the relationship in the discrete system between the stability margins and the minimum singular value of the return difference matrix, and also implemented is a method which computes singular value gradients. This method is applied to the lateral attitude control loop of a remotely piloted vehicle both in continuous case and discrete case for verification of its utility.

### I. 서 론

제어장치의 설계자는 제어 대상 모델이 불확실하거나 변형되었을 때도 안정한 시스템이 되도록 견고한 제어장치를 설계하고자 한다. 단일입출력(single input single output, SISO) 시스템인 경우는 Bode, Nyquist 등의 수단을 이용하여 이득과 위상에 안정도 여유가 있도록 설계한다. 그러나 다중입출력(multi-input multi-output, MIMO) 시스템의 경우는 이런

수단을 바로 사용할 수가 없다. 그 이유는 다중입출력 시스템에서는 이득과 위상의 변화가 모든 루프에서 동시에 발생할 수 있으므로 한번에 한 루프씩 설계하고 분석하는 방법으로는 동시 변화의 영향을 해석할 수가 없다. 근래에 다중입출력 시스템의 안정도를 판별하기 위하여 singular value (SV)가 이용되고 있다. 여기서 SV와 안정도 여유와의 관계를 그림 1 과 같은 시스템에 대하여 살펴 본다.

그림 1 에서  $L(s)$ 는 승산교란(multiplicative perturbation) 이고

$$\bar{G}(s) = L(s)G(s)$$

\*正會員, 西江大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Sogang Univ.)

接受日字 : 1989年 8月 7日

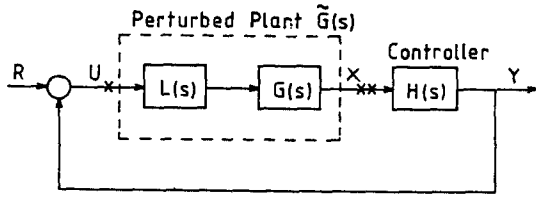


그림 1. 교란된 다중 입출력 시스템  
Fig. 1. Perturbed MIMO system.

이다.  $L(s)$ 가 단위 matrix인 정상상태에서 프랜트의 입력단(x)과 출력단(xx)에서 단락했을 때 다음과 같은 입출력 관계식을 얻을 수 있다. (이후부터 s연산자는 생략한다.)

$$U = (I + HG)^{-1}R \quad (1)$$

$$X = (I + GH)^{-1}GR \quad (2)$$

윗 식에서  $(I + HG)$  및  $(I + GH)$ 를 각각

$(I + HG)$  : 프랜트 입력단(그림 1의 x표시)에서 단락된 Return Difference Matrix(RDM)

$(I + GH)$  : 프랜트 출력단(그림 1의 xx표시)에서 단락된 RDM

이라고 말한다. 식(1)에서 RDM이 singular이면 프랜트 입력 U는 무한대가 되며 시스템은 불안정하게 된다. 또한 RDM이 singular에 가까워지면 시스템은 불안정에 가까워지고 모델링 오차에 민감해진다. 따라서 RDM의 near singularity는 시스템의 상대적 안정도를 판정하는 주요 수단이 될 수 있다.<sup>1)</sup>

어떤 matrix가 singular에 얼마나 가까운가는 것은 matrix의 크기에 관계된다. 따라서 matrix의 크기를 측정하는 수단이 필요하며 그 수단으로서 singular value를 사용한다. Matrix A가 벡터 r을  $U(=Ar)$ 로 선형변환하는 matrix라 할 때, matrix A의 최대 및 최소 크기는 다음과 같이 정의된다.<sup>1)</sup>

$$[A]_{\max} = \frac{|Ar|}{|r|} \Bigg|_{\max} = \bar{\sigma}(A)$$

$$[A]_{\min} = \frac{|Ar|}{|r|} \Bigg|_{\min} = \underline{\sigma}(A)$$

여기서  $\bar{\sigma}(A)$ 와  $\underline{\sigma}(A)$ 는 최대 및 최소 SV를 뜻하며 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\sigma}(A) = \max_i \{ \sigma_i(A) \}$$

$$\underline{\sigma}(A) = \min_i \{ \sigma_i(A) \}$$

$$\sigma_i(A) = \{ \lambda_i(A^*A) \}^{1/2}, \quad \lambda_i(\#) : \text{eigen value of } \#, \\ H : \text{conjugate transpose}$$

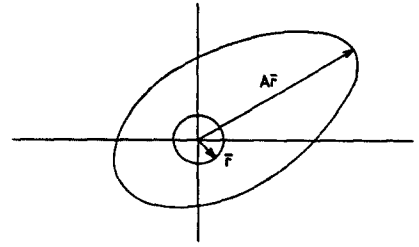


그림 2. Matrix A에 의한 vector r의 변환  
Fig. 2. Transformation of vector r by matrix A.

그림 1의 시스템에 SV의 개념을 도입하면, 이 시스템의 안정도에 대한 조건은

$$\underline{\sigma}(I + HG) > 0$$

로 주어진다. 또한 그림 1에서  $L(s)$ 가 다음과 같은 대각선 matrix일때,

$$L = \text{DIAG}(K_n e^{j\omega n}),$$

이 시스템이 안정할 조건은

$$\underline{\sigma}(I + HG) > 0 \quad \text{그리고} \quad \underline{\sigma}(I + HGL) > 0$$

이다. 만일  $L^{-1}$ 가 존재하고

$$\underline{\sigma}(L^{-1} - I) < \underline{\sigma}(I + HG) \quad (3)$$

이 성립하면, 교란된 시스템의 안정도는 보장된다!<sup>1)</sup> 식(3)이 성립하고,

$$\underline{\sigma}(I + HG) \geq a, \quad a \leq 1 \quad (4)$$

이면, 그림 1의 다중입출력 시스템의 이득 여유(gain margin, GM) 및 위상여유((phase margin, PM)는 다음 식들로 주어진다!<sup>1), 4)</sup>

$$GM = \frac{1}{1 \pm a} \quad (5)$$

$$PM = \pm \cos^{-1} \left( 1 - \frac{a^2}{2} \right) \quad (6)$$

식(5), (6)의 여유들은 각 루프에 동일하게 해당되며 각 루프의 이득 또는 위상이 동시에 변하여도(여유 내에서) 시스템은 안정하다. 그러나 이득과 위상이 동시에 변화할 때는 보장이 안된다. Mukhopadhyay와 Newsom이 참고문헌[2]에서 이득과 위상이 동시에 변할 때에도 안전한 영역을 그래프로 표시하였다. 시스템의 프랜트나 제어장치의 계수 변화가 폐루프 시스템의 안정도에 미치는 영향을 조사하기 위해

서는 그 계수에 대한 SV의 도함수(singular value gradient, SVG)가 조사되어야 한다. Newsom과 Mukhopadhyay<sup>[1]</sup>는 제어장치 계수에 관한  $\frac{\partial}{\partial P}(I+HG)$ 의 SVG를 계산해서 그 시스템의 RDM의 minimum SV를 증가(안정도 여유 신장)시키는 제어기 변수를 찾는데 사용했으며, Alfredo Vaillard등<sup>[11]</sup>은 시스템 안정도에 영향을 미치는 프랜드 계수들을 찾기 위해서 SVG를 사용했다. 그러나 이런 방법들은 모두 연속계에서만 사용 가능했다. 다만 이산계 시스템의 안정도를 판별하기 위하여, Alfredo Vaillard등<sup>[11]</sup>이 이산계 시스템의 SV와 안정도 사이의 관계를  $W'$ 공간에서 유도하였을 뿐이다. 본 논문에서는 이산계 시스템의 SV와 안정도 사이의 관계를  $Z$ 공간에서 유도하였고, 이산계에서의 SVG계산식들을 유도하였다. 다음 절에서 연속계에서 SVG를 계산하는 식들을 참고문헌<sup>[1, 2, 3]</sup>을 인용하여 열거하였고, III 절에서 이산계에서의 SVG 계산식들을 유도하였다.

II. 연속계에서의 Singular Value Gradient (SVG) 계산 방법 고찰

다음과 같은 상태방정식으로 표현되는 제어 시스템을 가정한다.

$$\begin{aligned} \text{프랜드트 : } \dot{X}_s &= FX_s + GuU \\ Z &= HsX_s \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \text{제어기 : } \dot{X}_c &= AX_c + BZ \\ U &= CX_c + DZ + R \end{aligned} \tag{8}$$

두 상태방정식을 결합하면,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \bar{A}X + \bar{B}U \\ U &= -\bar{C}X + R \end{aligned} \tag{9}$$

이 된다. 여기서

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} X_s \\ X_c \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ BH_s & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} Gu \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{C} &= [-DH_s \quad -C] \end{aligned}$$

이다. 식(9)의 U는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$U = [I + \bar{C}(IS - \bar{A})^{-1}\bar{B}]^{-1}R$$

여기서 S는 Laplace 연산자이다.

따라서,

$$RDM = I + \bar{C}(IS - \bar{A})^{-1}\bar{B} \tag{10}$$

이 된다. 식(10)을 간단한 형태로 표시한다.

$$\begin{aligned} RDM &= I + \bar{C}\phi\bar{B} \\ &= I + G_1 \end{aligned} \tag{11}$$

여기서,  $\phi = (IS - \bar{A})^{-1}$ ,  $G_1 = \bar{C}\phi\bar{B}$  이다.

SVG를 계산하기 위하여 다음과 같은 SV분해 알고리즘을 사용한다.

$$\begin{aligned} (I + G_1)Vi &= Ui\sigma_i \\ (I + G_1)^HUi &= Vi\sigma_i \end{aligned} \tag{12}$$

여기서,  $\sigma_i$ 는 SV,  $Vi$  및  $Ui$ 는 각각 right 및 left unitary eigen벡터이다. Sensitivity 정보를 얻고 싶어 하는 variable을  $p$ 라 하면, 식(10)을 식(12)에 대입하고 식(12)를 미분하면 다음과 같이 식을 얻을 수 있다 (참고문헌[1]과 [2] 참조할 것).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i(I + G_1)}{\partial P} &= \text{Re} \cdot \text{tr} \left[ \frac{\partial}{\partial P} \bar{\phi} \bar{B} + \bar{C} \phi \frac{\partial \bar{B}}{\partial P} \right. \\ &\quad \left. + \bar{C} \phi \frac{\partial \bar{A}}{\partial P} \bar{\phi} \bar{B} \{ ViUi^H \} \right] \end{aligned} \tag{13}$$

여기서  $\text{Re} \cdot \#$ 은 #의 real 값,  $\text{tr}[\#]$ 은 #의 trace를 뜻한다. 식(13)을 각 matrix내에 있는 원소에 대해서 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial P_{\bar{A}}} = \text{Re} \cdot \text{tr} \left[ \bar{C} \phi \frac{\partial \bar{A}}{\partial P_{\bar{A}}} \bar{\phi} \bar{B} ViUi^H \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial P_{\bar{B}}} = \text{Re} \cdot \text{tr} \left[ \bar{C} \phi \frac{\partial \bar{B}}{\partial P_{\bar{B}}} ViUi^H \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial P_{\bar{C}}} = \text{Re} \cdot \text{tr} \left[ \frac{\partial \bar{C}}{\partial P_{\bar{C}}} \bar{\phi} \bar{B} ViUi^H \right]$$

또한 다음과 같은 matrix 미분식<sup>[5]</sup>을 이용하여,

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{tr} [BAC] = [CB]^t$$

SVG를 matrix 전체의 원소들로 확장할 수 있다.

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \bar{A}} = \text{Re} \cdot [\bar{\phi} \bar{B} ViUi^H \bar{C} \phi]^t, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \bar{B}} = \text{Re} \cdot [ViUi^H \bar{C} \phi]^t \tag{15}$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \bar{C}} = \text{Re} \cdot [\bar{\phi} \bar{B} ViUi^H]^t \tag{16}$$

식(14), (15), (16)들이 연속계에서 SVG를 계산하는 식들이 된다.

III. 이산계에서의 Singular Value Gradient 계산식 유도

그림 1의 연속계 시스템을 이산계 시스템으로 변

환하면 그림 3 과 같으며 이 절에서는 이산계 제어시스템의 SVG를 계산하는 식들을 유도한다. 그림 3의 프랜트의 상태방정식을 이산계에서 표시하면 다음과 같다.

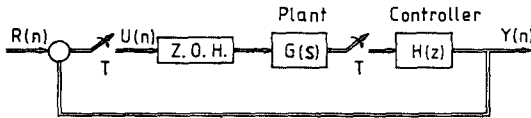
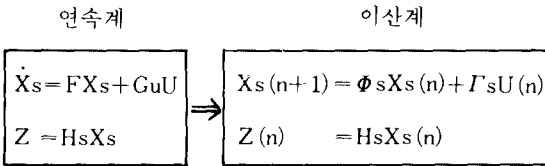


그림 3. 이산계 다중 입출력 시스템  
Fig. 3. Discrete MIMO System.



여기서,

$$\Phi = e^{FT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(FT)^k}{k!}, \quad \Gamma_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(FT)^k}{(k+1)!} T Gu$$

이다. 또한 제어기의 상태방정식이

$$X_c(n+1) = A_c X_c(n) + B_c Z(n)$$

$$U(n) = C_c X_c(n) + D_c Z(n) + R(n)$$

와 같이 주어지면, 두 상태방정식을 결합하여 식(17)과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} X(n+1) &= \Phi X(n) + \Gamma U(n) \\ U(n) &= -\xi X(n) + R(n) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} X_s \\ X_c \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_s & 0 \\ B_c H_s & A_c \end{bmatrix}, \quad \Gamma^t = \begin{bmatrix} \Gamma_s \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \xi &= [-D_c H_s : -C_c] \end{aligned}$$

이다. 식(17)을 Z-변환하여 정리하면,

$$U(Z) = [I + \xi (IZ - \Phi)^{-1} \Gamma]^{-1} R(Z)$$

가 되므로 프랜트 입력에서 단락된 RDM은

$$\begin{aligned} RDM &= I + \xi (IZ - \Phi)^{-1} \Gamma \\ &= I + \xi \psi \Gamma \end{aligned}$$

가 된다. 여기서  $\psi = (IZ - \Phi)^{-1}$ 이다. 이 RDM의 최소 SV와 GM 및 PM사이의 관계는 연속계의 경우와 동일하며, 그 증명은 부록 II에 수록하였다.

이제 이 RDM에 II 절에서와 같은 방법으로 식(13)을 이용하면, 임의의 변수 P에 대한 SVG를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i (1 + \xi \psi \Gamma)}{\partial P} &= \text{Re} \cdot \text{tr} \left[ \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial P} \psi \Gamma + \xi \psi \frac{\partial \Gamma}{\partial P} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \xi \psi \frac{\partial \Phi}{\partial P} \psi \Gamma \right\} V_i U_i^H \right] \end{aligned} \quad (18)$$

각(18)을 각 matrix 내에 있는 원소들에 대해서 표시한다.

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial P_r} = \text{Re} \cdot \text{tr} \left[ \left\{ \xi \psi \frac{\partial \Phi}{\partial P_r} \right\} \psi \Gamma V_i U_i^H \right] \quad (19)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial P_r} = \text{Re} \cdot \text{tr} \left[ \left\{ \xi \psi \frac{\partial \Gamma}{\partial P_r} \right\} V_i U_i^H \right] \quad (20)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial P_r} = \text{Re} \cdot \text{tr} \left[ \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial P_r} \right\} \psi \Gamma V_i U_i^H \right] \quad (21)$$

지금부터 식(19), (20) 및 (21)을 각 matrix 내의 모든 원소들에 대한 식으로 확장하고자 한다. 우리가 알고자 하는 sensitivity 정보는 프랜트 계수가 있는 matrix F, Gu, 및 H와 제어기 계수가 있는 matrix A<sub>c</sub>, B<sub>c</sub>, C<sub>c</sub> 및 D<sub>c</sub>의 각 원소들에 대한 것이므로 식(19), (20) 및 (21)은 이런 matrix에 대한 미분형태로 표시되어야 한다. Matrix F의 원소는  $\Phi$ 와  $\Gamma$ 에 존재하므로 식(19)와 (20)을 이용하여 F에 대한 도함수를 계산 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial F} &= \frac{\partial}{\partial F_r} \left[ \text{Re} \cdot \text{tr} \left\{ \xi \psi \Gamma V_i U_i^H \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial F_r} \left[ \text{Re} \cdot \text{tr} \left\{ \xi \psi \Phi \psi \Gamma V_i U_i^H \right\} \right] \right] \\ &= \text{Re} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial F_r} \text{tr} \left\{ \xi \psi \Gamma V_i U_i^H \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial F_r} \text{tr} \left\{ \xi \psi \Phi \psi \Gamma V_i U_i^H \right\} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

여기서  $\frac{\partial}{\partial F_x} [\#]$ 는 #의 X속 있는 F에 대한 편미분을 뜻한다. 식(22)의 두번째 항을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial F_s} \text{tr} \{ \xi \psi \Phi \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \} \\
&= \frac{\partial}{\partial F_s} \text{tr} \left\{ \xi \psi \begin{bmatrix} \Phi_s & 0 \\ \text{BcHs} & \text{Ac} \end{bmatrix} \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial F_s} \text{tr} \left\{ \xi \psi \begin{bmatrix} e^{FT} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \right\} \\
&= \text{Re} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \text{Ac}_{Ac}} \text{tr} \left\{ \xi \psi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Ac} \end{bmatrix} \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \right\} \right] \\
&= \text{Re} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \text{Ac}_{Ac}} \text{tr} \left\{ \xi \psi \begin{bmatrix} 0 \\ \text{Um} \end{bmatrix} \text{Ac} [0 : \text{Um}] \phi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \Gamma \text{ViUi}^{\#} \right\} \right] \\
&= \text{Re} \cdot \left[ \bar{\text{Um}}^t \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \xi \psi \bar{\text{Um}} \right]^t \quad (27)
\end{aligned}$$

또한 식(23)과 같은 matrix 미분식(부록 I 참조)을 이용하면,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial (\text{AT})} \text{tr} \{ \text{Be}^{\text{AT}} \text{C} \} &= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^k \{ (\text{AT})^{k-1} \right. \\
&\quad \left. \text{CB}(\text{AT})^{l-1} \right]^t, \quad (23)
\end{aligned}$$

식(22)의 두번째 항은 matrix의 곱의 합의 형태로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \text{FT}_s} \text{tr} \{ \xi \psi \Phi \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \} \\
&= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^k \{ (\text{FT})^{k-1} \bar{\text{Un}}^t \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \right. \\
&\quad \left. \xi \psi (\text{FT})^{l-1} \bar{\text{Un}} \right]^t \quad (24)
\end{aligned}$$

여기서,  $\bar{\text{Un}} = \begin{bmatrix} \text{Un} \\ 0_{mn} \end{bmatrix}$  Un :  $n \times n$  unit matrix,

$0_{mn}$  :  $m \times n$  null matrix,  $[\#]^t$  :  $[\#]$ 의 transpose

이다. 같은 방법으로 식(22)의 첫번째 항을 식(25)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \text{FT}_r} \text{tr} \{ \xi \psi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \} &= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{(k+1)!} \sum_{l=1}^k (\text{FT})^{k-1} \right. \\
&\quad \left. \text{GuViUi}^{\#} \xi \psi \bar{\text{Un}} (\text{FT})^{l-1} \right]^t \quad (25)
\end{aligned}$$

이제 식(24)와 (25)를 합하여 식(22)를 다시 정리하면,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_1}{\partial F} &= T \frac{\partial \sigma_1}{\partial (\text{FT})} \\
&= T \text{Re} \cdot \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^k (\text{FT})^{k-1} \left( \bar{\text{Un}}^t \phi \Gamma + \frac{T \text{Gu}}{k+1} \right) \right. \\
&\quad \left. \text{ViUi}^{\#} \xi \psi \bar{\text{Un}} (\text{FT})^{l-1} \right]^t \quad (26)
\end{aligned}$$

가 된다. 다음에는 Ac의 원소들에 대한 SVG계산식을 유도한다. Ac는  $\Phi$ 에만 존재하므로 식(19)를 이용한다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \text{Ac}} &= \text{Re} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \text{Ac}_s} \text{tr} \{ \xi \psi \Phi \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \} \right] \\
&= \text{Re} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \text{Ac}_{Ac}} \text{tr} \left\{ \xi \psi \begin{bmatrix} \Phi_s & 0 \\ \text{BcHAc} & \text{Ac} \end{bmatrix} \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \right\} \right]
\end{aligned}$$

여기서  $\bar{\text{Um}} = \begin{bmatrix} 0_{nm} \\ \text{Um} \end{bmatrix}$  이고, Um은  $m \times m$  unit matrix,  $0_{nm}$ 은  $n \times m$  null matrix이다.

같은 방법으로 나머지 matrix들에 대한 미분식들을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \text{BcHs}} = \text{Re} \cdot \left[ \bar{\text{Un}}^t \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \xi \psi \bar{\text{Um}} \right]^t \quad (28)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \text{Gu}} = \text{Re} \cdot \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T}{(k+1)!} \text{ViUi}^{\#} \xi \psi \bar{\text{Un}} (\text{FT})^k \right]^t \quad (29)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial (-\text{DcH})} = \text{Re} \cdot \left[ \bar{\text{Un}}^t \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \right]^t \quad (30)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial (-\text{Cc})} = \text{Re} \cdot \left[ \bar{\text{Um}}^t \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \right]^t \quad (31)$$

이상의 식(26)에서 부터 (31)까지의 식들이 이산계에서의 SVG계산식들이다. Bc, H, Dc등에 대한 도함수는 서로 곱한 형태로 주어지기 때문에 이상의 식구들로부터 직접 구할 수는 없다. 식(28)과 (30)을 분해하여 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \text{Hs}} = \text{Re} \cdot \left[ \bar{\text{Un}}^t \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} (\xi \psi \bar{\text{Um}} \text{Bc} - \text{Dc}) \right]^t \quad (32)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \text{Bc}} = \text{Re} \cdot \left[ \text{Hs} \bar{\text{Un}}^t \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \xi \psi \bar{\text{Um}} \right]^t \quad (33)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \text{Dc}} = -\text{Re} \cdot \left[ \text{Hs} \bar{\text{Un}}^t \phi \Gamma \text{ViUi}^{\#} \right]^t \quad (34)$$

지금까지 유도한 식들이 타당하고 사용 가능한지 여부를 보기 위하여, 다중입출력 시스템인 무인항공기 자동비행 조종장치의 횡안정루프에 적용하여 보았다.

## VI. 이산계 다중 입출력 시스템의 Sensitivity 분석 예

이 절에서는 III 절에서 유도된 식들을 다중 입출력

제어시스템에 적용해 본다. Sensitivity 분석 결과를 점검하기 위하여 연속계에서 수행한 결과와 비교해 보고자 한다. 실험 대상은 참고문헌[2]에 수록되어 있는 무인항공기의 횡안정루프로 선정하였다. 이 시스템의 부록선도와 프래트 matrix 및 제어기 matrix를 부록 III의 그림 III-1과 표 III-1 및 III-2에 수록하였다. 연속계 제어시스템과 같은 성능을 내는 이산계 제어시스템을 얻기 위하여 프래트와 제어기를 각각 이산계 상태 방정식으로 변환하여 그 matrix들을 부록 III의 표 III-3과 III-4에 수록하였다. 연속계 시스템과 이산계 시스템에 대하여 II절과 III절에 수록된 SVG 계산식들을 이용하여 흥미있는 주파수 대역에서 SVG를 계산하였다. 그림 4에 RDM의 최

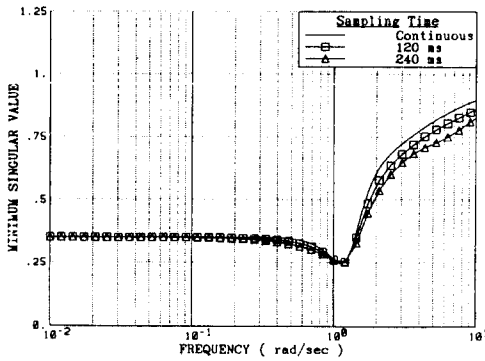


그림 4. 최소 singular value의 그래프  
Fig. 4. Minimum singular value plot.

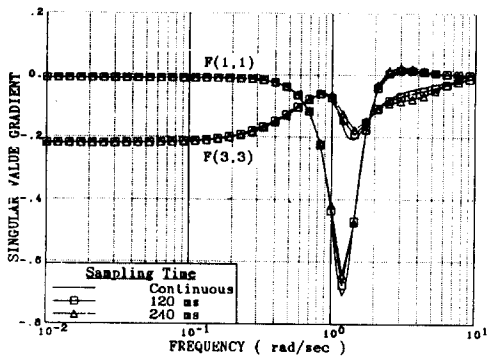


그림 5. 프래트 matrix F의 원소들에 대한 SVG 그래프  
Fig. 5. SVG plot with respect to plant parameters in matrix F.

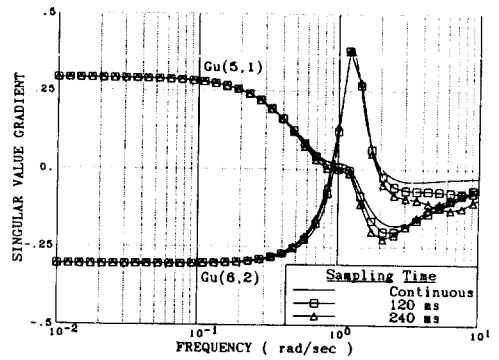


그림 6. 프래트 matrix Gu의 원소들에 대한 SVG 그래프  
Fig. 6. SVG plot with respect to plant parameters in matrix Gu.

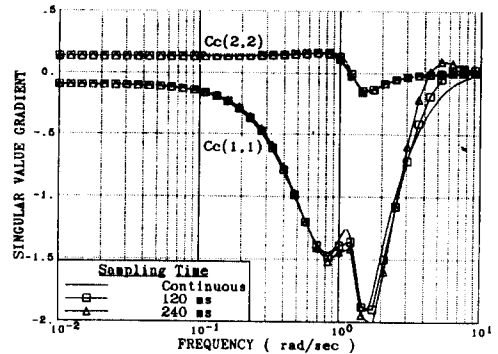


그림 7. 제어기 matrix Cc의 원소들에 대한 SVG 그래프  
Fig. 7. SVG plot with respect to controller parameters in matrix C (= Cc).

소 SV를 주파수에 대해서 그렸고, 그림 5와 6에 프래트 matrix, 그림 7에 제어기의 원소들에 대한 SVG그림을 그렸다.

그림 4에 샘플링주기 T의 영향이 나타나 있다. 단일 이산계에서 설계한 제어기를 연속계로 변환하는 것이 항상 가능하다고 가정하더라도, 이산계 시스템을 직접 이산계에서 분석하지 않고 연속계로 변환하여 분석하면 이 샘플링주기 T의 영향을 무시하는 결과를 가져오게 될 것이다. 또한 연속계로 변환하여 해석할 경우에 프래트 계수에 대한 sensitivity는 구할 수 있으나, 이산계 제어기의 계수들(matrix Ac 및

Bc의 원소들)에 대한 sensitivity는 구할 수 없다. 따라서 이산계 시스템을 연속계로 변환하여 해석하는 데는 한계가 있다. 그림 4에서 샘플링주기 240ms는 프랜트 운동(roll subsidence) 모드의 고유진동 주파수가 3.25 rad/sec에 대한 Nyquist 샘플링주기 보다 약 4배 빠른 시간이다. 그림 4와 5로부터 샘플링주기가 짧은 경우 연속계와 이산계에서의 계산 결과가 거의 일치함을 알 수 있다. 따라서 III절에서 유도한 이산계에서의 SVG 계산식들이 틀림이 없음을 간접적으로 알 수가 있다.

V. 결 론

Singular value의 특성을 이용하여 이산계 다중 입출력 시스템에 대한 안정도 및 sensitivity를 분석하는 방법을 연구하였다. SVG를 이용하여 무인 항공기의 횡측 자세제어 시스템의 sensitivity 분석을 연속계와 이산계에서 수행해 보았다. 그 결과 샘플링주기가 충분히 빠른 경우는 매우 유사하고, 샘플링주기가 느린 경우는 이산계 시스템이 다소 나쁜 것으로 나타났다. 이 결과로부터 III절에서 유도한 이산계에서의 SVG 계산식들은 틀림이 없음을 간접적으로 알 수 있었고, 이산계 시스템을 연속계로 변환하여 해석하는 것은 샘플링주기의 영향을 무시한 근사적인 해석밖에 안되므로, 샘플링주기가 클 경우는 연속계로 변환하여 해석하는 것은 문제가 있다는 것을 알 수 있었다. 본 연구의 결과로 이산계에서 직접 설계한 다중 입출력 시스템의 sensitivity 분석을 시스템을 구성하고 있는 모든 변수들에 대해서 행할 수 있는 수단을 얻게 되었다.

부록 I. Trace 함수의 Matrix Gradient

Matrix gradient 공식을 다시 쓴다.<sup>(5,6)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{tr}[BAC] = [CB]^t \tag{I-1}$$

공식 (I-1)을 이용하여 다음과 같이 진행한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}[BA^2C] &= \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}[BAAC] \\ &= [ACB]^t + [CBA]^t \\ &= [ACB + CBA]^t \\ \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}[BA^3C] &= \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}[BAAAC] \\ &= [A^2CB]^t + [ACBA]^t + [CBA^2]^t \\ &= [A^2CB + ACBA + CBA^2]^t \end{aligned}$$

다음과 같은 일반 식을 가정하자.

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{tr}[BA^kC] = \left[ \sum_{i=1}^k A^{k-i} CBA^{i-1} \right]^t \tag{I-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}[BA^{k+1}C] &= \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}[BA^kAC] \\ &= \left[ \sum_{i=1}^k A^{k-i} ACBA^{i-1} \right]^t + [CBA^k]^t \\ &= \left[ \sum_{i=1}^k A^{k+1-i} CBA^{i-1} \right]^t + \\ &+ [A^{k+1-i} CBA^{i-1} |_{i=k+1}]^t \\ &= \left[ \sum_{i=1}^{k+1} A^{k+1-i} CBA^{i-1} \right]^t \end{aligned}$$

m = k+1로 놓으면,

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{tr}[BA^mC] = \left[ \sum_{i=1}^m A^{m-i} CBA^{i-1} \right]^t \tag{I-3}$$

가 된다. 따라서 앞에서 가정한 식 (I-2)는 성립한다.

연속계 상태 방정식과 이산계 상태방정식과의 관계식<sup>(7)</sup>인 식 (I-4a) 및 (I-4b)와 앞에서 증명한 식 (I-3)을 이용하여 본문에서 유도과정을 생략한 식 (24)를 유도한다.

$$\Phi = e^{F^T \tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(F^T \tau)^k}{k!} \tag{I-4a}$$

$$\Gamma = e^{F^T \tau} d_n G u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(F^T \tau)^k}{(k+1)!} T G u \tag{I-4b}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (AT)} \text{tr}[Be^{AT}C] &= \frac{\partial}{\partial (AT)} \text{tr} \left[ B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AT)^k}{k!} C \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial (AT)} \text{tr} \left[ B \frac{(AT)^k}{k!} C \right] \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k (AT)^{k-i} CB(AT)^{i-1} \right]^t \end{aligned} \tag{I-5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial (F^T)_*} \text{tr}[\xi \psi \Phi \psi \Gamma V i U_i^m] \\ &= \frac{\partial}{\partial (F^T)_*} \text{tr} \left[ \xi \psi \begin{bmatrix} \Phi_s & 0 \\ B_C h & A_c \end{bmatrix} \psi \Gamma V i U_i^m \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial (F^T)_*} \text{tr} \left[ \xi \psi \begin{bmatrix} e^{F^T \tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \psi \Gamma V i U_i^m \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial (F^T)_*} \text{tr}[\xi \psi \tilde{U} n e^{F^T} \tilde{U} n^t \psi \Gamma V i U_i^m] \end{aligned}$$

여기서

$$\bar{U}_n = \begin{bmatrix} U_n \\ 0_{mn} \end{bmatrix}, \quad U_n : n \times n \text{ unit matrix,}$$

$0_{mn} : m \times n \text{ null matrix}$

이다. 식 (I-5)를 이용하여 간단히 하면, 본문의 식 (24)와 같은 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial (FT)} \text{tr}[\xi \psi \Phi \psi \Gamma V i U_i^m] \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^k (FT)^{k-1} \bar{U}_n^t \psi \Gamma V i U_i^m \xi \psi (FT)^{l-1} \right. \\ & \quad \left. \bar{U}_n \right]^t \end{aligned}$$

**부록 II. 이산계 시스템에서의 최소 SV와 이득 여유 및 위상여유와의 관계**

그림 II-1과 같은 시스템의 RDM은  $[I + H(z)GL(z)]$ 이다.  $GL(z)$ 를 분리하기 위하여 그림 II-2와 같은 등가 시스템이 존재한다고 가정하면,

$$L(s) = L'(s) * \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (II-1)$$

가 된다.

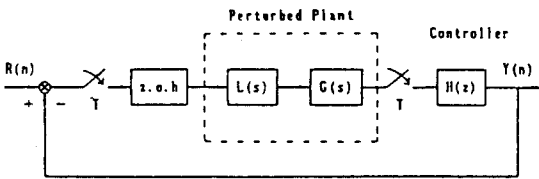


그림 II-1. 교란된 이산계 다중입출력 시스템  
Fig. II-1. Perturbed discrete MIMO system.

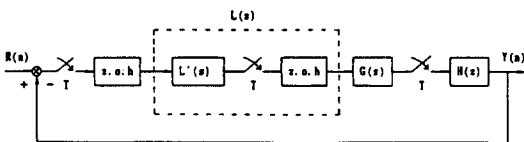


그림 II-2. 그림 II-1의 등가 시스템  
Fig. II-2. Equivalent system of Fig. II-1.

등가 시스템의 RDM은  $[I + H(z)G(z)L'(z)]$ 가 된다. 여기서  $L'(z)$ 는  $L(s)$ 의 Z-변환이며, 연속계의 경우에서와 같이 다음과 같은 형태를 갖는다고 가정하자.

$$L'(z) = \text{DIAG} [l_1'(z), l_2'(z), \dots, l_n'(z)]$$

$$l_i'(z) = K_i'(z) e^{j\phi_i'(z)} \quad (II-2)$$

여기서  $K_i'(z)$ 와  $\phi_i'(z)$ 는 실수이고,  $K_i'(z)$ 는 크기교란을,  $\phi_i'(z)$ 는 위상교란을 나타낸다. 연속계의 경우와 같은 방법으로 교란된 시스템의 안정조건을 구하면 다음과 같다.

$$\sigma[L'(z)^{-1} - I] < \sigma[I + H(z)G(z)] \quad (II-3)$$

본래 시스템의 RDM의 최소 SV가 항상

$$\sigma[I + H(z)G(z)] \geq \alpha_d \quad (II-4)$$

일 때의 GM과 PM을 계산하기로 한다. 식 (II-4)를 식 (II-3)에 대입하면,

$$|l_i'^{-1}(z) - 1| < \alpha_d \quad (II-5)$$

가 된다. GM을 계산하기 위하여  $l_i'(z) = K_i'(z)$ 로 놓고,  $\alpha_d \leq 1$ 이라고 가정하면,

$$\frac{1}{1 + \alpha_d} < l_i'(z) < \frac{1}{1 - \alpha_d} \quad (II-6)$$

이 된다. 또한

$$l'(z) = Z \left[ l_i'(s) * \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right] \quad (II-7)$$

이므로, 식 (II-7)을 식 (II-6)에 대입하여 S-영역으로 역 Z-변환하면,

$$\frac{1}{1 + \alpha_d} < l_i'(s) * \frac{1 - e^{-sT}}{s} < \frac{1}{1 - \alpha_d} \quad (II-8)$$

이 된다. 식 (II-1)을 이용하면,

$$\frac{1}{1 + \alpha_d} < l_i(s) < \frac{1}{1 - \alpha_d} \quad (II-9)$$

이 된다. 또한 앞에서 제한한  $l_i'(z) = k_i(z)$ 라는 조건으로부터,

$$l_i(s) = k_i(s)$$

라는 것을 알 수 있다(Z-영역에서 실수는 S-영역에서도 실수). 따라서

$$\frac{1}{1 + \alpha_d} < k_i(s) < \frac{1}{1 - \alpha_d} \quad (II-10)$$

이 되고,



$$GM = \frac{1}{1 \pm \alpha_d} \quad \text{for } \alpha_d \leq 1$$

이 된다. PM을 계산하기 위해서

$$l_1'(z) = e^{j\phi'(z)}$$

로 놓고, 식 (II-5)를 정리하면,

$$|l_1'(z) - 1| < \alpha_d \quad (II-11)$$

가 되고, S-영역으로 역 Z-변환하면,

$$|l_1'(s) * \frac{1 - e^{-sT}}{s} - 1| < \alpha_d$$

$$|l_1(s) - 1| < \alpha_d \quad (II-12)$$

가 된다. 또한  $l_1'(z) = e^{j\phi'(z)}$  라는 조건으로 부터

$$l_1(s) = e^{j\phi'(s)}$$

라는 것을 알 수 있으므로, 식(II-12)를 다시 정리 하면,

$$|e^{-j\phi'(s)} - 1| < \alpha_d \quad (II-13)$$

가 된다. 이 식을 정리하면,

$$|\phi'(s)| < \cos^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha d^2}{2} \right)$$

이 된다. 그러므로

$$PM = \pm \cos^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha d^2}{2} \right)$$

이 된다. 따라서 이상에서 구한 RDM의 최소 SV와 GM 및 PM과의 관계식은 연속계의 경우와 동일하다.

부록III. 무인항공기의 횡측 자세제어 시스템

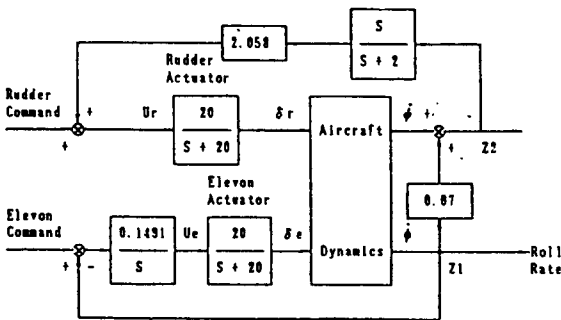


그림 III-1. 무인항공기의 횡측 자세제어 시스템  
Fig. III-1. Lateral attitude control system of a remotely piloted vehicle(RPV).

표 III-1. 무인항공기 횡측 자세제어 시스템의 프랜트 상태방정식의 matrix들

Table III-1. Matrices of the plant state equation of an RPV.

$$Xs = [\beta \ \phi \ \dot{\phi} \ \delta_e \ \delta_r]^T, \quad U = [U_e \ U_r]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} -0.08527 & -0.0001423 & -0.9994 \\ -46.86 & -2.757 & -0.3896 \\ -0.4248 & -0.06224 & -0.06714 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.04142 & 0 & 0.1862 \\ 0 & -124.3 & 128.6 \\ 0 & -8.792 & -20.46 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20.0 & 0 \\ 0 & 0 & -20.0 \end{bmatrix}$$

$$G_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

표 III-2. 무인항공기 횡측 자세제어 시스템의 제어기 상태방정식의 matrix들

Table III-2. Matrices of the controller state equation of an RPV.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1491 & 0 \\ 0 & -4.116 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2.058 \end{bmatrix}$$

표 III-3. 이산계 상태방정식으로 변환된 프랜트의 matrix 들(샘플링주기 T=120ms 인 경우)

Table III-3. Matrices of the plant state equation which is converted from the continuouse form(for the sampling time T=120ms).

$$X_s(K+1) = \Phi_s X_s(K) + \Gamma_s U(K)$$

$$Z_s(K) = H_s X_s(K)$$

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} 0.9916 & 0.0007 & -0.1189 \\ -4.7663 & 0.7170 & 0.3408 \\ -0.0318 & -0.0063 & 0.9941 \\ -0.3022 & 0.1021 & 0.0149 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_s = \begin{pmatrix} 0.0049 & 0.0305 & 0.0862 \\ 0.0125 & -4.5973 & 4.4710 \\ 0.0001 & 0.3726 & -0.9527 \\ 0.9995 & -0.4114 & 0.4151 \\ 0 & 0.0907 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0907 \end{pmatrix}$$

$$H_s = \begin{pmatrix} 0.0015 & 0.0043 \\ -0.4114 & 0.4151 \\ -0.0315 & -0.0773 \\ -0.0198 & 0.0202 \\ 0.0455 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0455 \end{pmatrix}$$

$$H_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

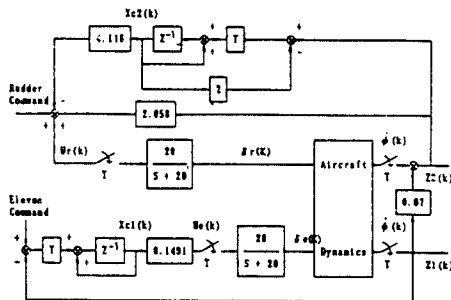


그림 III-2. 그림 III-1의 등가 이산계 시스템  
Fig. III-2. Equivalent discrete system of Fig. III-1.

표 III-3. 이산계 상태방정식으로 변환된 제어기의 matrix 들(샘플링주기 T=120ms 인 경우)

Table III-3. Matrices of the controller state equation which is converted from the continuouse form(for the sampling time T=120ms).

$$X_c(K+1) = A_c X_c(K) + B_c Z(K)$$

$$U_c(K) = C_c X_c(K) + D_c Z(K)$$

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.76 \end{pmatrix}$$

$$B_c = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.12 & 0 \\ 0 & 0.12 \end{pmatrix}$$

$$C_c = C, \quad D_c = D$$

参 考 文 献

- [1] A. Vaillard, J. Paduano, and D. Downing, "Development of a sensitivity analysis technique for multiloop flight control systems," *NASA CR-166619, Oct. 1985.*
- [2] V. Mukhopadhyay and J. Newsom, "Application of matrix singular value properties for evaluating gain and phase margins of multiloop systems," *Guidance and Control Conference, AIAA, 1982.*
- [3] J. Newsom and V. Mukhopadhyay, "A multiloop robust controller design study using singular value gradients," vol. 8, no. 4, *J. Guidance*, 1985.
- [4] N. Lehtomaki, N. Sandell, and M. Athans, "Robustness results in linear-quadratic gaussian based multivariable control designs," *IEEE trans. on automatic control*, vol. AC-26, no. 1, Feb. 1981.
- [5] A. Gelb, "Applied optimal estimation," *MIT press*, Cambridge, Massachusetts, 1975.
- [6] M. Athans, "Gradient matrices and matrix calculations," *Lincoln Laboratory*, Lexington, Mass. Nov. 1965 (AD 624426)
- [7] G. Franklin, and D. Powell, "Digital control of dynamic systems," *Addison-wesley*, 1980.

---

 著 者 紹 介
 

---



李 夫 熙 (正會員)

1948年 8月 22日生. 1971年 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1973年 서울대 대학원 전기공학과 졸업. 1975年~1977年 울산공대 전기공학과 전임강사. 1977年~1978年 동국대 공대 전기공학과 전임강사. 1983年 미국 Univ. of Southern California 전기공학과 졸업(공학박사). 1983年~현재 서강대 이공대 전자공학과 부교수.



姜 治 宇 (正會員)

1949年 10月 30日生. 1973年 서강대 이공대 전자공학과 졸업. 1983年 서강대 대학원 전자공학과 졸업. 1987年~현재 서강대 대학원 전자공학과 박사과정. 1976年~현재 국방과학 연구소 선임연구원.