

다중적분기 사용 +1, 0, -1 계수의 선형위상 FIR 필터의 설계

(FIR Linear Phase Filter Design Using Coefficients +1, 0, -1 and Multiple Integrator)

金 炯 明*

(Hyung Myung Kim)

要 約

다중적분기를 이용하여 필터의 계수가 +1, 0, -1만으로 이루어진 선형위상 디지털 FIR 필터의 설계 방법에 대하여 제안하였다. 기존의 단일적분기를 사용한 선형위상 필터설계 개념이 다중적분기의 경우에도 확장되어 적용될 수 있음을 보여 주었고, 다중적분기를 사용한 경우, 선형위상 필터가 되기 위한 조건을 종합하여 제시하였다. 이중적분기 및 삼중적분기를 사용한 경우의 근사필터 설계방법과 그 시뮬레이션 예를 들었으며, 단일적분기의 경우와 비교하여 그 장점을 도출하였다.

Abstract

Improved algorithms are presented to design linear phase digital FIR filters with coefficients of +1, 0, -1 only followed by a multiple integrator. It has been shown that the existing linear phase filter design concept for the single integrator (or, accumulator) case can be extended to the case of the multiple integrator. Linear phase conditions for the multiple integrators are summarized. Filter design methods with double or triple integrator are exploited in detail and its computer simulation results are presented to deduce the advantages of multiple integrator to the single integrator.

I. 서 론

디지털 필터의 응용분야가 점차 늘어남에 따라, 그 구성회로를 간단히 만드는 일은 디지털 필터 설계 문제중 중요한 과제로 등장하게 되었다.^[1,2,3] 디지털 필터는 8-15비트의 필터계수와 디지털 신호의 곱셈

및 덧셈 기능이 수행되도록 구현되는데, 이러한 산술 기능 수행회로의 존재가 디지털 필터의 구성을 복잡하게 한다. 근래에 계수가 +1, 0, -1만으로 이루어진 디지털 필터의 구현에 곱셈 기능을 필요로 하지않는 두 가지 방식이 제안되었다. 하나는 프로그램가능형 CCD (Charge-Coupled Device) 장치를 이용하여 표본화된 자료를 처리하는 방식^[4,5]이고, 또 한가지는 이동(shift) 레지스터, up-down 계수기 및 누산기를 이용하여 디지털 신호를 처리하는 방식이다.^[6,7] 이러한 방식들은 프로그램이 가능한 VLSI 형태로 구현이 가능하므로 점차 디지털 필터 구현에 많은 기여를 할 수 있으리라 전망된다.

*正會員, 韓國科學技術院 科學技術大學 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical and Electronics Eng., Korea Institute of Technology, KAIST)
接受日字: 1989年 8月 3日

주어진 주파수 특성을 만족시키면서 계수가 +1, 0, -1 만으로 이루어진 필터의 설계 방법은 델타변조와 유사한 방식으로 모델링한 후^[4,5] 다이내믹 프로그래밍 기법으로 적합한 계수를 선정^[6,7]하도록 제안되었다. 이러한 방식으로 설계되는 필터의 선형위상을 보장하기 위하여 단일적분기를 사용하는 경우 기존의 알고리즘을 개선하여 제안되었다.^[8] 단일 적분기를 사용한 경우, 필터의 길이를 확장시킴으로써 임의의 주파수 반응을 만족시킬 수 있다. 그러므로 정해진 길이의 신호를 처리하기 위하여는 신호의 보간(interpolation)과 확장된 길이의 필터링 및 필터링된 신호의 decimation이 수반되어야 한다. 보간에 의하여 확장된 길이는 필터의 특성을 개선시켜 주지만, decimation 과정에서 도입되는 오차의 영향으로 인하여, 개선 효과가 감소된다.^[4] 보간을 필요로 하는 경우는 필터 계수가 밀접하게 상관되어 있지 않은 경우인데, 이러한 경우, 인접 계수간의 변화가 다양한 반면 델타 변조 방식을 적용하면 단위 스텝 크기 이상 인접계수가 변화하지 못하기 때문에 그 오차가 커지게 되는 것이다. 만일 인접 계수간의 변화량이 단위 스텝 크기 이상이 되도록 허용한다면, 이러한 오차는 줄일 수 있게 된다.

델타 변조 방식을 이용하여 설계된 필터의 특성은 +1, 0, -1 계수 필터의 뒤에 위치한 단일 적분기를 포함시켜 얻어지므로, 만일 단일적분기를 이중 또는 삼중적분기와 같은 다중적분기로 대체한다면, 전체 필터의 인접 계수간의 변화는 단위 스텝이내로 제한되지 않아도 된다. 이러한 특성을 이용하여 제안된 필터 설계 방식^[5]에 따르면 필터의 선형위상이 보장되어 있지 않다. 본 논문에서는 선형위상을 보장하면서 개선된 주파수 반응을 얻을 수 있도록 다중 적분기를 사용한 +1, 0, -1 계수의 FIR 필터 설계 방식을 제안하도록 한다. 제 II 장 및 III 장에서 이중 또는 삼중적분기를 사용하여 +1, 0, -1 계수로 이루어진 선형 위상 필터 설계 방식을 제시하도록 하며 단일적분기를 이용한 기존^[8]의 방식을 다중적분기 사용의 경우로 확장시키도록 하겠다. 또한 제 IV 장에서는 다중적분기를 사용한 경우의 적용례를 보이도록 하며 단일적분기를 이용한 보간 및 decimation 경우의 예 및 선형위상이 보장되어 있지 않은 경우의 예들과 비교하도록 한다. 마지막으로 제 V 장에 간략한 결론을 도출하였다.

II. 이중적분기 사용 선형위상 필터

이중 적분기를 사용한 델타 모듈레이션 방식의 필터 구조는 그림 1에 보인바와 같다. 근사필터 u(n)의

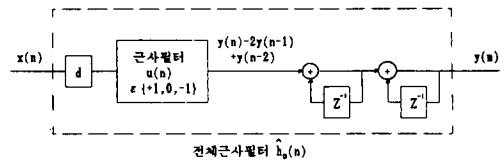


그림 1. 이중적분기를 사용한 필터의 구조
Fig. 1. Filter structure using a double integrator.

필터 계수치가 +1, 0 또는 -1 세 값중의 하나이며, 필터링 후 이중적분기를 통과한 출력을 얻을 수 있다. 길이가 N이며 선형위상을 갖는 필터 h₀(n)을 스케일링 계수 d만큼 스케일링하여 얻어진 값을 h(n)이라 하면

$$h(n) = h_0(n)/d, \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

로 정해지며, 이 필터 계수 h(n)에 대하여

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} [h(n) - \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^p u(q)]^2 \quad (1)$$

$$u(n) \in \{+1, 0, -1\}, \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

식(2)를 만족시키면서, 식(1)의 E를 최소화 시키는 u(n)이 그림 1의 근사필터 u(n)의 계수가 된다. 필터 u(n)에 뒤따르는 이중적분기를 고려하면 결과적으로

$$\hat{h}(n) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^p u(q), \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

인 필터가 얻어지게 되는데, $\hat{h}(n)$ 은 h(n)의 근사값이며, $\hat{h}_0(n)$ 은 h₀(n)의 근사값이 된다. 적합한 스케일링 상수가 주어진 경우, h₀(n)에 대한 근사필터를 구하는 문제는 h(n)에 대한 근사필터를 구하는 문제로 대체될 수 있으며, 이 결과 얻어지는 자승오차는 식(1)에 보인 E 값이 되는데

$$E_0 = \sum_{n=0}^{N-1} [h_0(n) - \hat{h}_0(n)]^2 = E \times d^2$$

의 관계에 의하여 실제 오차값을 구할 수 있게 된다. 그러므로 본 장에서는 h(n)을 원하는 필터로 하여 FIR 조건^[9]

$$\hat{h}(N-1) = 0 \quad (4)$$

과 h(n)의 선형위상 조건을 만족시키는 u(n) ∈ {+1, 0, -1}, n=0, 1, ..., N-1을 구하는 문제를 논하도록 한다.

1. 선형위상 조건

식(3)의 $\hat{h}(n)$ 이 선형위상을 갖도록 하려면, 표본화

중심점 M이

$$M = \begin{cases} (N-1)/2, & N \text{ 홀수} \\ N/2, & N \text{ 짝수} \end{cases} \quad (5)$$

와 같이 정의되었을 때

$$\hat{h}(n) = \hat{h}(N-1-n), \quad n=0, 1, \dots, M-1 \quad (6)$$

의 조건을 만족시켜야 한다.^{[10][11]} 그런데

$$w(n) = \sum_{q=0}^n u(q), \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

과 같이 w(n)을 정의하면

$$\hat{h}(n) = \sum_{p=0}^n w(p), \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

로 적을 수 있다. 식(8)이 성립하는 경우, $\hat{h}(n)$ 에 대한 (4)와 (6)의 조건을 만족시키는 w(n)에 대한 조건을 참고문헌 [9]에서 도출하였는데, 이를 다시 적으면

$$w(0) = 0 \quad (9)$$

$$w(n) = -w(N-n), \quad n=1, 2, \dots, M \quad (10)$$

와 같다. 특기할 사항은 위 (10)의 조건은 N이 짝수인 경우

$$w(M) = 0, \quad N \text{ 짝수} \quad (11)$$

임이 내포되어 있는데, 이중적분기를 사용하는 경우 N이 홀수인 경우도 위 (11)의 관계가 성립된다는 점이다. 그 이유는 식 (10)의 n=M인 경우에 식 (7)을 적용하면

$$u(M+1) = -2w(M), \quad N \text{ 홀수} \quad (12)$$

과 같이 되어, 이를 만족시키는 값은 조건(2)와 식 (12)에 의하여

$$u(M+1) = 0 = w(M) = w(M+1), \quad N \text{ 홀수} \quad (13)$$

밖에 없기 때문이다.

위의 조건들 (9), (10), (11), (13)으로 부터 선형 위상이 되기 위한 u(n)의 조건들을 구하면, 먼저 n=0인 경우, 식(7)과 (9)로 부터

$$u(0) = 0 \quad (14)$$

이 얻어진다. 또한 식 (10)의 n=1인 경우에 식 (7)을 대입하면

$$u(0) + u(1) = - \sum_{q=0}^{N-1} u(q) \quad (15)$$

이 얻어진다. 식 (10)에 n=2를 대입한 경우, 식 (7)

을 이용하여

$$u(0) + u(1) + u(2) = - \sum_{q=0}^{N-2} u(q)$$

를 얻게 되는데, 여기에 식 (15)를 대입하면

$$u(2) = u(N-1)$$

가 된다. 위와 같은 방식으로 n=M까지 u(n)의 조건을 구하여 종합하면

$$u(n) = u(N+1-n), \quad n=2, 3, \dots, M \quad (16)$$

이 됨을 알 수 있다. 그러므로 원래의 문제는 조건 (2)를 만족시키는 필터 u(n)이 식(1)의 E를 최소화시키면서 식 (11), (13), (14), (15), (16)을 만족시킴을 하는 문제로 대치되는데, 이 때 u(n), n=0, 1, ..., M만 먼저 구한 후 식 (13), (16)의 조건에 따라 u(n), n=M+1, ..., N-1의 값을 구하면 된다.

2. 알고리즘

위 1절에서 얻은 관계식을 고려하여 효과적인 알고리즘을 제시하도록 하겠다. 먼저 식(7)에 정의된 w(n)값의 존재 가능 범위를 정수 집합 W_n 으로 표기하도록하면, 정수 K가

$$K = \begin{cases} (M-1)/2, & M \text{ 홀수} \\ M/2, & M \text{ 짝수} \end{cases} \quad (17)$$

로 정의될 때

$$W_n = \begin{cases} \{m; m \text{은 정수}, |m| \leq n\}, & 0 < n \leq K \\ \{m; m \text{은 정수}, |m| \leq M-n\}, & K < n \leq M \end{cases} \quad (18)$$

으로 나타낼 수 있다. 그림2에 N=8, 9, 10, 11인 경우의 W_n 의 범위 및 u(n)의 가능한 변화를 예로 들어 도시하였다. 그림2에 나타난 바와 같이 여러가지 가능한 u(n), n=0, 1, ..., M의 종류중 식(1)의 자승오차를 최소화시키는 최적 u(n)은 다이내믹 프로그래밍 기법^[12]을 이용하여 순환적(recursive) 계산 방법으로 구해진다. 최적 u(n)의 후보값들을 $Q_n, m \in W_n$ 으로 나타내면

$$Q_{n,m} \in \{+1, 0, -1\}$$

이며, 최적 $\hat{h}(n)$ 의 후보값들을 $H_{n,m}, m \in W_n$ 으로 적을 때

$$H_{n,m} = \begin{cases} H_{n-1,m-1} + m, & Q_{n,m} = 1 \\ H_{n-1,m}, & Q_{n,m} = 0 \\ H_{n-1,m+1} + m, & Q_{n,m} = -1 \end{cases}$$

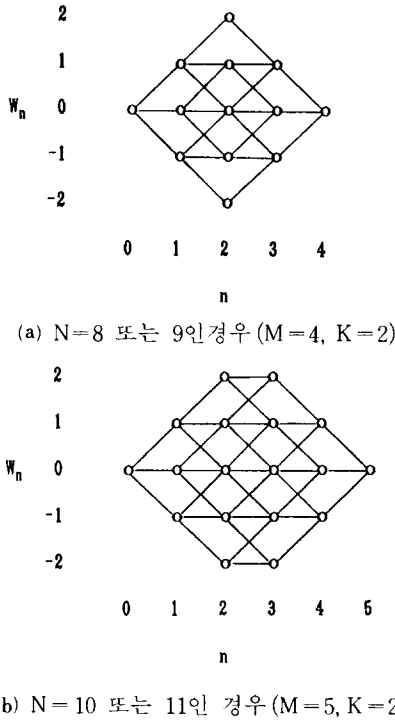


그림 2. W_n 의 범위와 $w(n)$ 의 변화
Fig. 2. Range of W_n and variation of $w(n)$.

이 됨을 이용하여 이중적분기를 사용한 선형위상 필터 설계 알고리즘을 다음과 같이 적을 수 있다.

알고리즘

- [1] 다음 값을 초기화시킨다.
 M : 식(5), K : 식(17), $E_{0,0} = h(0)^2 \times 2$
 $H_{0,0} = 0, \quad n=1, \quad nt=2$
- [2] 만일 $n \neq M$ 인 경우, [3]을 수행하고, $n=M$ 인 경우, N 이 홀수이면 $nt=1$, N 이 짝수이면 $nt=0$ 으로 정한 후 [3]을 수행한다.
- [3] 식(18)에 의하여 $m \in W_n$ 을 정한 후, 각 $m \in W_n$ 에 대하여 다음 계산을 한다.
- [3.1] $R_{-1}^{(n,m)} = E_{n-1,m+1} + nt \times [h(n) - H_{n-1,m+1} - m]^2$
 $R_0^{(n,m)} = E_{n-1,m} + nt \times [h(n) - H_{n-1,m} - m]^2$
 $R_1^{(n,m)} = E_{n-1,m-1} + nt \times [h(n) - H_{n-1,m-1} - m]^2$
- [3.2] $E_{n,m} = \min[R_{-1}^{(n,m)}, R_0^{(n,m)}, R_1^{(n,m)}]$ 으로 정한다.
- [3.3] $Q_{n,m} = \begin{cases} -1, & E_{n,m} = R_{-1}^{(n,m)} \text{으로 정한다.} \\ 0, & E_{n,m} = R_0^{(n,m)} \\ 1, & E_{n,m} = R_1^{(n,m)} \end{cases}$

$$[3.4] H_{n,m} = \begin{cases} H_{n-1,m+1} + m, & Q_{n,m} = -1 \text{로 정한다.} \\ H_{n-1,m} + m, & Q_{n,m} = 0 \\ H_{n-1,m-1} + m, & Q_{n,m} = 1 \end{cases}$$

- [4] $n=M$ 이면 $m=0$ 으로 정하고 [5]로, 그렇지 않으면 n 을 1증가시키고 [2]와 [3]을 반복한다.
- [5] $u(n) = Q_{n,m}$ 으로 정한다.
- [6] $n=1$ 이면 [7]로, 그렇지 않으면 m 에 $m - Q_{n,m}$ 을 대입시키고, n 을 1감소시킨 후 [5]를 반복한다.
- [7] $u(0) = 0$ 으로 정하고, N 이 홀수이면 $u(M+1) = 0$ 으로 정한다.
- [8] $u(N+1-n) = u(n)$ 으로 정한다.
- [9] $n=M$ 이면 정지하고, 그렇지 않으면 n 을 1증가시킨 후 [8]을 반복한다.

위 알고리즘에서 명기할 사항은 $R_i^{(n,m)}, i = -1, 0, 1$ 은 각각 스칼라량으로 구현시킬 수 있으며, 또한 $E_{n,m}$ 과 $H_{n,m}$ 의 저장문제를 고려하면 $k=n$ 에서 필요한 자료는 $E_{n-1,m}$ 과 $H_{n-1,m}, m \in W_{n-1}$ 이므로 2차원배열을 사용하는 대신 각각 1차원 배열 두개씩을 사용하면 충분하다는 사실이다. 위 알고리즘을 적용하면 선형위상의 조건을 충족시키는 물론 기존의 방식^[6,8,9]보다 그림 2의 구조에서 미루어 알 수 있듯이 저장 공간이 훨씬 적게 소요되며, 계산에 소요되는 시간도 줄어들게 됨을 알 수 있다. 그러나 위 알고리즘의 $R_{-1}^{(n,m)}, R_0^{(n,m)}$ 및 $R_1^{(n,m)}$ 의 계산시간이 기존방식^[9]에 추가되어 있기 때문에 전체적인 계산 소요시간은 기존방식^[9]과 비교하여 비슷하다고 볼 수 있다.

III. 다중적분기 사용 선형위상 필터

제 II 장에서 보인 바와 유사한 방식으로 삼중 이상의 다중적분기 사용의 경우에도 $+1, 0, -1$ 의 계수를 가진 선형위상 필터 설계 방법을 구할 수 있다. 본 절에서는 삼중적분기 사용의 경우를 예로 들어, 먼저 기술한 후 다중적분기 사용 필터의 선형위상 조건을 종합하여 보이도록 한다.

1. 삼중적분기의 경우

삼중적분기 사용 경우 식(3)과 (2)는

$$\hat{h}(n) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^p \sum_{r=0}^q v(r), \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (19)$$

$$v(n) \in \{+1, 0, -1\}, n=0, 1, \dots, N-1 \quad (20)$$

로 대체되어 적을 수 있으며, $u(n)$ 과 $v(n)$ 의 관계를

$$u(n) = \sum_{r=0}^n v(r), \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (21)$$

로 나타낼 수 있다. 식 (21)이 성립한다는 가정하에, $u(n)$ 에 대한 조건 (14), (15), (16)을 만족시키는 $v(n)$ 에 대한 조건을 구하기 위하여 이중 적분기와 같은 절차를 적용하면

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 \\ v(0) + v(1) &= -\sum_{q=0}^{n-1} \sum_{r=0}^q v(r) \\ v(0) + v(1) + v(2) &= \sum_{r=0}^{n-1} v(r) \\ v(n) &= -v(N+2-n), \quad n=3, 4, \dots, M \end{aligned}$$

이 얻어진다.

N 이 짝수인 경우, $v(k), k=0, 1, \dots, n-1$ 의 값이 결정되어 있고, $v(n)$ 을 구하기 위한 순환적 계산에서, $v(n)$ 의 가능해(feasible solution)가 존재하는 범위가 식 (11)을 만족시키도록 정해져야 한다. 식(11)의 조건은 식 (7)과 (21)및 조건 (20)을 고려하여 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{aligned} |w(n)| &\leq 1/2(M-n-|u(n)|)(M-n-|u(n)|+1), \\ w(n) \times u(n) &\geq 0 \\ |w(n)| &\leq 1/2(M-n)(2|u(n)|+M-n+1), \\ w(n) \times u(n) &< 0 \end{aligned} \quad (22)$$

또한 N 이 홀수인 경우, 식 (12)의 우변 $u(M+1)$ 은 삼중적분기 사용시에는 조건 (2)에 의하여 제한을 받지 않는다. 식 (12)에 식 (7)과 (21)을 대입하면

$$\sum_{n=0}^{M+1} v(n) = -2 \sum_{n=0}^M (M+1-n)v(n)$$

이 되며, 이 식은

$$\sum_{n=0}^{M+1} (2M+3-2n)v(n) = 0$$

과 같이 적을 수 있으므로 조건 (20)을 이용하면 $v(n)$ 의 순환적 계산에 필요한 조건

$$\left| \sum_{k=0}^n (2M+3-2k)v(k) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{M+1} (2M+3-2k) \quad (23)$$

을 얻을 수 있다. 즉 N 이 짝수인 경우, $v(n), n=0, 1, \dots, M$ 이 조건 (22)를 만족시키고, N 이 홀수인 경우,

$v(n), n=0, 1, \dots, M+1$ 이 조건 (23)을 만족시키도록 정해지면, 식 (11)과 (12)를 각각 만족시키게 된다.

2. 다중적분기 선형위상 조건

지금까지 얻어진 선형위상 조건들을 표 1에 종합하였다. 표 1의 이해를 돕기 위하여 예를 들어 설명하면 전제조건 (8)이 성립하는 경우, $h(n)$ 에 대하여 나열된 선형위상이 되기 위한 조건들과 등가의 $w(n)$ 에 대한 조건들은 단일적분기 항목에 적힌 조건들이 된다. 만일 전제조건 (7), (8), (9)이 모두 성립되는 경우이면, 각 항목에 나열된 조건들은 선형위상 필터가 되기 위한 등가의 조건들이다. 표 1을 보면 사중적분기 이상의 경우에도 이와같은 등가조건을 쉽게 유추할 수 있으며, FIR 필터의 조건인 식 (4)를 함께 적용하여 가능해의 범위를 축소시킬 수 있다.

표 1. 다중적분기 사용 필터의 선형위상 등가조건

Table 1. Equivalent conditions for linear phase filters with a multiple integrator.

항 목	전제조건	등 가 조 건
$h(n)$		$\hat{h}(n) = \hat{h}(N-1-n), n=0, 1, \dots, M-1$
단일적분기	식(8)	$w(0) = \sum_{p=0}^{N-1} w(p)$ $w(n) = -w(N-1-n), n=1, 2, \dots, M$
이중적분기 사용필터	식(7)	$u(0) = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{p=0}^q u(p)$ $u(0) + u(1) = -\sum_{q=1}^{N-1} u(q)$ $u(n) = u(N+1-n), n=2, 3, \dots, M$
삼중적분기 사용필터	식(21)	$v(0) = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{q=0}^r \sum_{p=0}^q v(p)$ $v(0) + v(1) = -\sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=0}^r v(q)$ $v(0) + v(1) + v(2) = \sum_{r=2}^{N-1} v(r)$ $v(n) = -v(N+2-n), n=3, 4, \dots, M$

IV. 시뮬레이션을 통한 적용례

제 II 장과 III 장에서 논의된 다중적분기 적용 선형 위상 FIR 필터 설계방식에 따라 정규화된 디지털 주파수로 표시한 통과대역이 0 ~ 0.021이며 전이대역이 0.021 ~ 0.07, 차단대역이 0.07 ~ 0.5인 저역통과 필터를 설계하였다. 먼저 비교를 위하여 단일 적분기를 사용하여 길이 50인 근사필터와 보간상수가 4 이고 보간후의 길이가 197인 근사필터 그리고 보간상수가 6이고 보간후의 길이 295인 근사필터를 기존의 방식⁽⁹⁾에 의거하여 설계하였다. 이들의 시뮬레이

션은 SUN-3 마이크로 컴퓨터를 사용하였으며, equiripple 선형위상 FIR 필터설계방식^[13]에 의하여 얻어진 길이 50, 197 및 295인 필터계수를 각 경우의 원하는 필터계수로 사용하였다. 참고로 길이 197인 근사필터 설계에 소요되는 CPU 시간은 5.4초였으며, 길이 295인 근사필터의 설계에 소요되는 CPU 시간은 11.8초였다. 이들의 보간상수를 고려하여 decimation을 취하면 전체 근사필터의 길이가 50이 되는데, 이들의 주파수 특성을 그림 3 과 그림 4 및 그림 5에 나타내었다. 그림 3에 보인 단일적분기를 사용한 이들 세 종류의 근사필터 크기반응 곡선을 비교하면, 보간 또는 decimation 상수 (DF)가 커질수록 크기 반응이 양호하여짐을 알 수 있다. 또한 그림 4에 DF가 4인 경우 decimation 후의 위상반응 곡선을 보였으며 그림 5에 DF가 6인 경우의 위상반응 곡선을

나타내었는데, 모두 causal 필터가 가지는 선형위상 지연부분을 상쇄시킨 후의 반응만을 표시하였다.

다음으로 제 II 장에서 제시된 이중적분기를 사용한 근사필터의 설계를 위하여 위에서 적용한 길이 50의 equiripple 필터계수^[13]를 원하는 필터계수로 사용하였다. 길이 50인 단일적분기의 사용 경우 설계에 소요되는 CPU 시간이 0.4초였으며 정규화된 필터계수에 의한 최소 자승오차가 0.0312로 나타난 반면⁽⁹⁾ 이중적분기 사용 경우 CPU 시간은 0.6초로 나타났으나 최소 자승오차는 0.00525로 단일 적분기 사용 경우에 비하여 7.74dB가량 개선되었다. 또한 필터의 주파수 특성에서 sidelobe에 의한 효과를 비교할 수 있도록 그림 6에 이중적분기 사용필터의 크기 반응

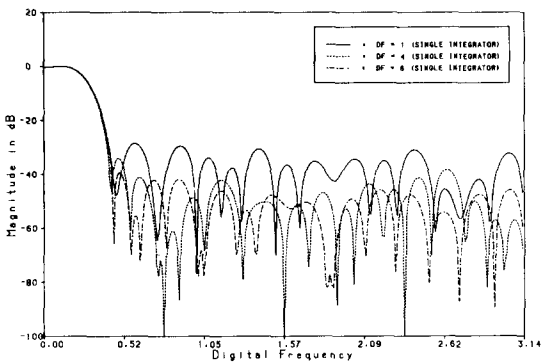


그림 3. 단일적분기 사용 필터들의 크기반응곡선
Fig. 3. Magnitude response curves for filters using a single integrator (SI).

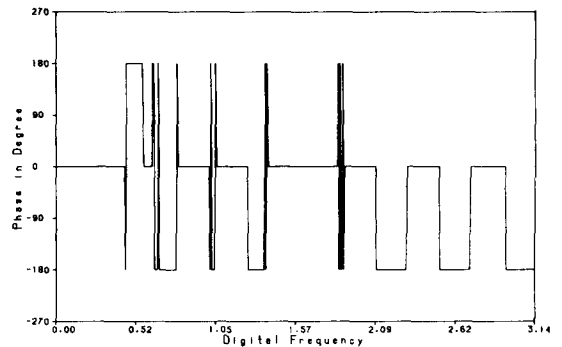


그림 5. DF=6인 경우 단일적분기 사용 필터의 위상반응곡선
Fig. 5. Phase response curve for the filter using a SI with DF=6.

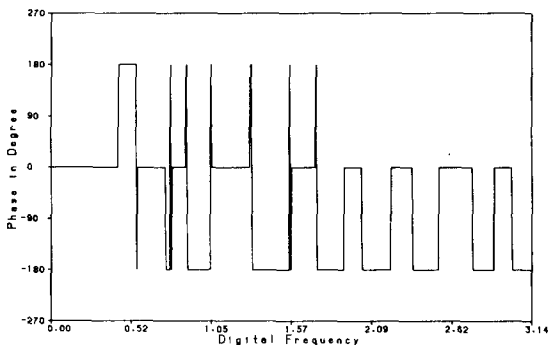


그림 4. DF (Decimation 상수)=4인 경우 단일적분기 사용 필터의 위상반응곡선
Fig. 4. Phase response curve for the filter using a SI with decimation factor (DF) 4.

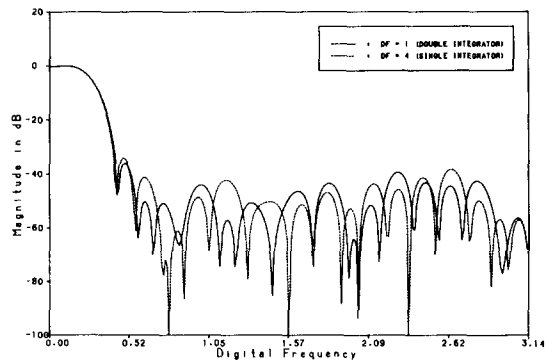


그림 6. 이중적분기 사용 필터와 DF=4인 단일적분기 사용 필터의 크기반응곡선
Fig. 6. Magnitude response curves for filters using a double integrator (DI) and a SI with DF=4.

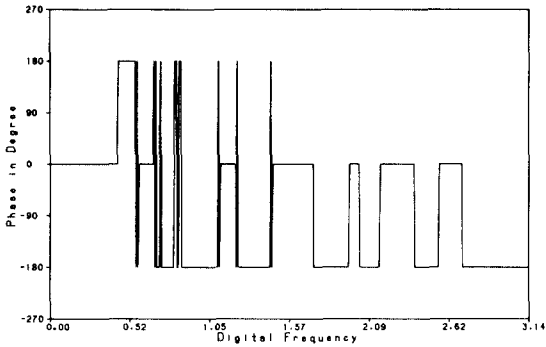


그림 7. 이중적분기 사용 필터의 위상반응곡선
 Fig. 7. Phase response curve for the filter using a DI.

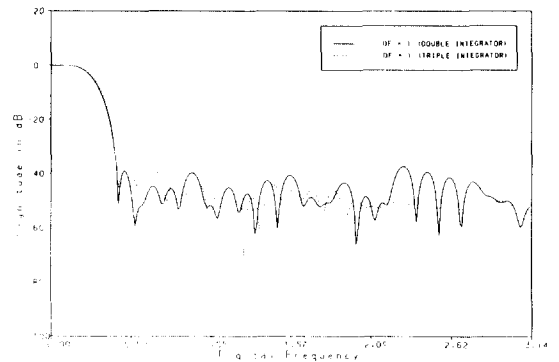


그림 10. 선형위상이 보장되지 않은 경우의 다중적분기 사용 필터의 크기반응곡선
 Fig. 10. Magnitude response curves for filters using multiple integrator with nonlinear phase.

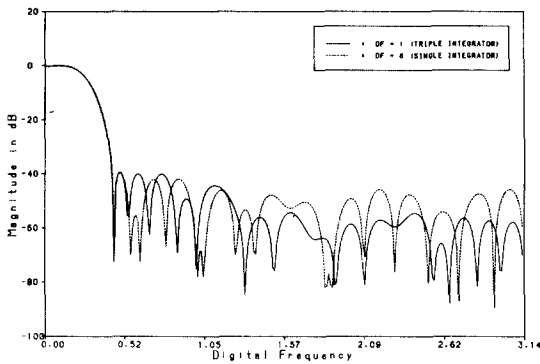


그림 8. 삼중적분기 사용 필터와 DF=6인 단일적분기 사용 필터의 크기반응곡선
 Fig. 8. Magnitude response curves for filters using a triple integrator (TI) and a SI with DF=6.

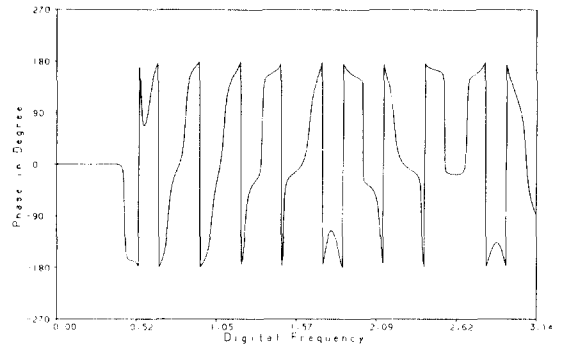


그림 11. 선형위상이 보장되지 않은 경우의 이중적분기 사용 필터의 위상반응곡선
 Fig. 11. Phase response curve for the filter using a DI with nonlinear phase.

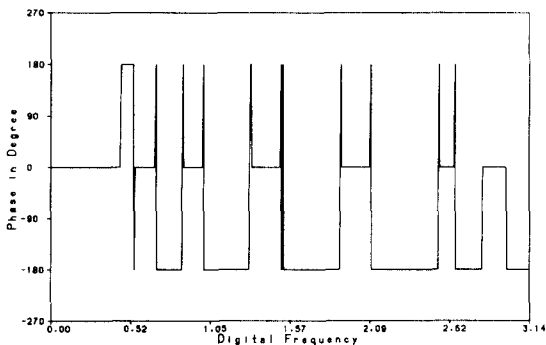


그림 9. 삼중적분기 사용 필터의 위상반응곡선
 Fig. 9. Phase response curve for the filter using a TI.

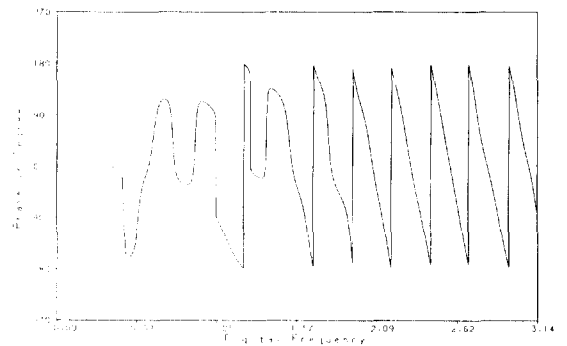


그림 12. 선형위상이 보장되지 않은 경우의 삼중적분기 사용 필터의 위상반응곡선
 Fig. 12. Phase response curve for the filter using a TI with nonlinear phase.

곡선과 단일적분기를 사용하고 DF가 4인 경우의 크기반응곡선을 함께 나타내었다. 그림 6에서 보듯이 후자의 경우 차단대역에서의 최대 sidelobe 크기가 -34.12dB 로 나타났고, 전자의 경우 -35.92dB 로 나타나 이중적분기 사용의 경우가 길이 197로 보간하여 다시 decimation 과정을 필요로 하는 단일적분기 사용의 경우보다 우수함을 알 수 있다. 그림 7에 이중적분기를 사용한 길이 50인 근사필터의 위상반응곡선을 보였다. 동종의 필터에 대하여 선형위상을 강제로 보장하지 않고 이중적분기를 사용한 경우^[6], 다 이내믹 프로그래밍 기법^[8,9]을 적용하여 설계하면, 소요되는 CPU 시간은 2.3초였으며 최소자승오차는 0.00264로 나타났다. 이 필터의 주파수 특성은 그림 10과 11에 보였는데 선형위상을 갖지 않았음을 알 수 있다. 강제로 선형위상을 보장하는 경우에는 이 기존의 방식에 비하여 계산시간이 단축되나 최소자승오차가 약간 증가함을 알 수 있다.

제Ⅲ장에서 논의된 삼중적분기 사용의 예도 길이 50인 근사필터의 설계결과로 나타내었다. 이의 설계에 소요된 CPU 시간은 0.5초였으며, 최소자승 오차는 0.00419로 이중적분기의 경우처럼 큰 개선은 이루어지지 않았으나 단일적분기의 경우보다 8.71dB 개선되었다. 그림 8에 보인바와 같이 최대 sidelobe의 크기는 삼중적분기의 경우, -39.38dB 로 나타났으며, 단일적분기 사용 DF=6인 경우 -39.45dB 로 나타나 삼중적분기를 사용한 길이 50인 필터가 단일적분기를 사용하여 보간 및 decimation 상수 6을 고려하여 얻어진 근사필터에 뒤지지 않는 크기반응을 보임을 알 수 있었다. 삼중적분기를 사용한 경우의 위상반응곡선을 그림 9에 나타내었는데, 이중적분기의 경우와 마찬가지로 선형위상임을 보여준다. 그러나 선형위상을 강제로 보장하지 않고 삼중적분기를 사용하여 설계한 경우 CPU 시간은 2.4초, 최소자승오차는 0.00331로 이중적분기 사용의 경우보다 약간 증가하였다. 이 경우의 필터 특성은 그림 10과 12에 보였는데 선형위상을 갖지 않음을 알 수 있다.

V. 결 론

FIR 필터의 계수가 $+1, 0, -1$ 로 이루어진 선형 위상 필터의 설계방식중 기존의 단일적분기를 다중적분기로 대체하여 선형위상을 유지하면서 필터의 특성을 개선시킬 수 있는 방법에 대하여 살펴보았다. 또한 이중적분기나 삼중적분기를 사용한 선형위상 근사필터의 설계 방식을 제시하였고, 다중적분기를 사용한 경우 근사필터가 만족시켜야 할 선형위상 등가

조건들을 종합하여 제시하였다. 동일한 길이의 필터를 설계하는데 단일적분기를 사용하는 경우보다 다중적분기를 사용하는 경우에 최소자승오차가 감소됨을 시뮬레이션을 통하여 보여주었다. 또한 이중 또는 삼중적분기를 사용한 근사필터의 성능과 비교되는 단일적분기 사용 근사필터는 4~6배의 보간을 필요로 함을 보여주었다. 그러므로 다중적분기를 사용하는 선형위상 필터의 경우, 보간의 필요성이 크지 않아서 확장된 길이의 근사필터 설계에 소요되는 시간을 줄일 수 있고, decimation 과정에서 도입되는 오차를 방지할 수 있음을 장점으로 들 수 있다.

參 考 文 獻

- [1] L.R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [2] Y.C. Lim and S.R. Parker, "FIR filter design over a discrete powers-of-two coefficient space," *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-31, pp. 583-591, June 1983.
- [3] D. Zrilic, A. Mavretic, and M. Freedman, "Arithmetic ternary operations on delta-modulated signals and their application in the realization of digital filters," *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-33, no. 3, pp. 760-764, June, 1985.
- [4] M.R. Bateman and B. Liu, "An approach to programmable CTD filters using coefficients 0, +1, -1," *IEEE Trans. on Circuits and System*, vol. CAS-27, pp. 451-456, June, 1980.
- [5] M.R. Bateman and B. Liu, "Programmable CTD filters using coefficients 0, +1, -1," *IEE Proc.*, vol. 128, Pt. G, pp. 208-212, Aug. 1981.
- [6] N. Benvenuto, L.F. Franks, and F.S. Hill, "Realization of finite impulse response filters using coefficients +1, 0, -1" *IEEE Trans. on Comm.*, vol. COM-33, pp. 1117-1125, Oct. 1985.
- [7] G.B. Lockhart and S.P. Babary, "Binary transversal filters using recirculating shift registers," *Radio Electro. Eng.*, vol. 43, pp. 224-226, March, 1973.
- [8] N. Benvenuto, L.F. Franks, and F.S. Hill, "Dynamic programming methods for desinging FIR filters using coefficients -1, 0, +1," *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-34, pp. 785-792, Aug. 1986.

- [9] 김형명, "선형위상 프로그램형 CTD필터의 설계," 대한전자공학회 논문지, 제26권 제5호, pp. 152-161, 1989년 5월
- [10] N.K. Bose, *Digital Filters: Theory and Applications* North-Holland, New York, 1985.
- [11] A.V. Oppenheim and R.W. Schafter, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [12] S.E. Dreyfus and A.M. Law, *The Art and Theory of Dynamic Programming*, Academic Press, New York, 1977.
- [13] J.H. McClellan, T.W. Parks, and L.R. Rabiner, "A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filter," *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, vol. AU-21, no. 6, pp. 506-526, Dec. 1973.

 著 者 紹 介

金 炯 明 (正會員) 第26卷 第5號 參照
 현재 한국과학기술원 과학기술대학 전기 및 전자공학과
 조교수