

## 천수방정식의 유한차분특성

## Characteristics of Finite Difference Methods for the Shallow Water Equation

이	길	성*
Lee,	Kil	Seong
강	주	환**
Kang,	Ju	Whan

## Abstract

Numerical characteristics for the shallow water equation are analyzed with ADI, Hansen, Heaps, Richtmyer and MacCormack schemes. Stability, CPU time and accuracy are investigated for the linear model which has analytic solutions and circulation is simulated for the nonlinear model. The results show that ADI method has some defects in CPU time and accuracy for the computation of velocity. But ADI method simulates circulation well and has the largest stability region. Richtmyer scheme is the best among the other explicit schemes. Effective viscosity term is found to be essential for numerical experiments of the shallow water equation.

## 요 지

ADI 방법, Hansen 방법, Heaps 방법, Richtmyer 방법, MacCormack 방법 등 5가지 유한차분방법을 사용하여 천수방정식에 대한 수치실험을 행하였다. 해석적 해가 존재하는 선형모형에 적용하여 안정성, CPU시간, 정확성 등을 검토하였고 비선형모형에 적용하여 순환현상을 모의하였다. 그 결과 ADI방법은 CPU시간이 가장 길고 유속에 대한 정확성이 다소 떨어진다는 결점이 있는 반면 순환현상을 가장 잘 모의한다는 것과 안정성에서 큰 장점이 있었다. 양해법 중에선 Richtmyer방법이 비교적 우수한 방법으로 평가되었다. 한편 유효점성항은 천수방정식의 수치해석시 필수적이라는 결론도 얻었다.

## 1. 서 론

컴퓨터의 발전과 함께 이전까지 실험이나 관측에 의존했던 여러가지 수공학과 관련된 문제들이 비교적 저렴한 비용으로도 효율적으로 해결될 수 있게 되었다. 수치기법을 이용한 이러한 문제들의 해결방법은 크게 0차원, 1차원, 2차원 또는 3차원

모형 등으로 나눌 수 있는데<sup>(16)</sup> 본연구에서는 선형 연구인 개수로에서의 1차원 연구<sup>(5)</sup>를 배경으로 2차원 연구를 수행하였다.

외국에서는 이미 10여년 전부터 주로 해안에서의 순환현상문제와 단면이 급격히 변하는 하천흐름 등에 2차원모형이 빈번하게 적용되어지고 있어 Falconer<sup>(16)</sup>가 ADI방법을 이용하여 항만에서의 순

\*정회원 · 서울대학교 공과대학 부교수

\*\*정회원 · 서울대학교 대학원 박사과정

환특성을 검토하였고 Ponce<sup>(21)</sup> 등은 Leendertse 방법으로 이송항에 대한 민감도를 분석하였으며 Praagman<sup>(22)</sup>이 주로 유한요소법에서 사용되는 시간적분법에 대한 여러가지 수치기법의 비교에 관하여 연구하였다. 또한 Benqué<sup>(23)</sup> 등은 개수로에서 ADI방법의 Courant수에 대한 민감도를 분석함으로써 ADI방법의 한계성을 밝히고 이 방법의 개선방안을 제시하였고 Cheng 등<sup>(24)</sup>은 Leendertse방법을 사용하여 Lagrangian관점에서 South San Francisco만에 2차원모형을 적용하였으며 Yeh 등<sup>(25)</sup>은 와류의 분리현상을 Leendertse방법으로 검토하였다.

국내에서도 최병호<sup>(14)</sup>가 Heaps방법의 개량된 형태를 이용하여 경기만의 조석모형을 수립한 바 있고 한건연 등<sup>(8)</sup>이 비선형 이송항을 무시하고 Leendertse방법을 울산만에 적용한 바 있으며 이종태 등<sup>(6)</sup>은 이송항을 적분형의 개념으로 표현하여 Abbott 음해법으로 항내의 장주기파를 해석하였다. 이밖에 서승원 등<sup>(2)</sup>은 Galerkin유한요소법을 사용하여 흐름단면의 급변화에 따른 순환현상을 연구하였고 조용준 등<sup>(3)</sup>도 ADI 방법을 이용해 개수로의 단면축소에 따른 문제점을 검토하였으며 양윤모 등<sup>(4)</sup>이 ADI방법을 적용한 바 있다. 또한 윤세의 등<sup>(4)</sup>은 Abbott의 음해법을 이용하여 만곡수로에서의 흐름특성을 규명하였고 박창언 등<sup>(11)</sup>이 Leendertse방법과 유사한 TIFS방법을 적용한 바 있다.

이와 같이 국내의 연구동향은 대부분이 ADI방법 등 음해법을 사용하고 있으며 양해법의 적용은 희소하다. 특히 양해법 및 음해법의 비교검토를 통한 특성파악에 관한 연구는 Sobey<sup>(26)</sup>를 제외하고는 거의 찾아볼 수 없는 실정이다. 이러한 배경하에 본 연구에서는 가장 널리 쓰이고 있는 ADI<sup>(12)</sup>방법을 비롯하여 Hansen 방법<sup>(15)</sup>, Heaps방법<sup>(13)</sup>, Richtmyer 방법<sup>(23)</sup>, MacCormack 방법<sup>(11)</sup> 등 여러가지 유한차분법을 천수방정식에 적용하여 각 차분법의 특성을 밝히고 이들의 적절한 활용방안을 제시하였다.

## 2. 천수방정식과 유한차분법

### 2.1 천수방정식

3차원 유체운동에 관한 Navier-Stokes식을 다음과 같은 4가지 가정 아래 수심적분하면 식 (1)을 얻을 수 있다.<sup>(21)</sup>: 1) 물은 비압축성이다. 2) 연직방향의 속도와 가속도는 무시할 수 있을만큼 작다.

- 3) 풍력에 의한 마찰항과 Coriolis항은 무시한다.
- 4) 수심에 따라 변하는 제반성질은 수심평균한 값으로 대체한다.

$$\partial\eta/\partial t + \partial(\eta+h)\bar{u}/\partial x + \partial(\eta+h)\bar{v}/\partial y = 0 \quad (1.a)$$

$$\begin{aligned} \partial\bar{u}/\partial t + \bar{u} \partial\bar{u}/\partial x + \bar{v} \partial\bar{u}/\partial y + g \partial\eta/\partial x \\ + 1/\{\rho(\eta+h)\} \cdot \{\tau_{bx} - \partial(hT_{xx})/\partial x \\ - \partial(hT_{xy})/\partial y\} = 0 \end{aligned} \quad (1.b)$$

$$\begin{aligned} \partial\bar{v}/\partial t + \bar{u} \partial\bar{v}/\partial x + \bar{v} \partial\bar{v}/\partial y + g \partial\eta/\partial y \\ + 1/\{\rho(\eta+h)\} \cdot \{\tau_{by} - \partial(hT_{yx})/\partial x \\ - \partial(hT_{yy})/\partial y\} = 0 \end{aligned} \quad (1.c)$$

여기서  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  = 수심평균된 속도성분;  $t$  = 시간;  $x$ ,  $y$  = 공간좌표;  $g$  = 중력가속도;  $\eta$  = 평균수면에서의 수면범위;  $h$  = 평균수면;  $\rho$  = 물의 밀도;  $\tau_{bx}$ ,  $\tau_{by}$  = 바닥마찰응력;  $T_{xx}$ ,  $T_{yy}$ ,  $T_{xy}$ ,  $T_{yx}$  = 유효전단응력으로 다음식 (2)와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} T_{xx} = 1/(\eta+h) \cdot \int_h^{\eta} \{2\rho\bar{u}\partial u/\partial x - \rho u'^2 \\ - \rho(u-\bar{u})^2\} dz \end{aligned} \quad (2.a)$$

$$\begin{aligned} T_{xy} = T_{yx} = 1/(\eta+h) \cdot \int_h^{\eta} \{\rho v(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) \\ - \rho u'v' - \rho(u-\bar{u})(v-\bar{v})\} dz \end{aligned} \quad (2.b)$$

$$\begin{aligned} T_{yy} = 1/(\eta+h) \cdot \int_h^{\eta} \{2\rho\bar{v}\partial v/\partial y - \rho v'^2 \\ - \rho(v-\bar{v})^2\} dz \end{aligned} \quad (2.c)$$

여기서  $\nu$  = 동점성계수이고  $u'$ ,  $v'$  = 난류유속변동량이다.

적분식 안의 세 항은 각각 점성전단응력, Reynolds 응력, 그리고 연직방향으로 불균일한 유속분포에 의해 야기되는 전단응력으로서 식 (1)내의 유효전단응력항을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} 1/\{\rho(\eta+h)\} \cdot \{\partial(hT_{xx})/\partial x + \partial(hT_{xy})/\partial y\} \\ = \epsilon_x(\partial^2\bar{u}/\partial x^2 + \partial^2\bar{u}/\partial y^2) \end{aligned} \quad (3.a)$$

$$\begin{aligned} 1/\{\rho(\eta+h)\} \cdot \{\partial(hT_{yx})/\partial x + \partial(hT_{yy})/\partial y\} \\ = \epsilon_y(\partial^2\bar{v}/\partial x^2 + \partial^2\bar{v}/\partial y^2) \end{aligned} \quad (3.b)$$

여기서  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ 는 유효점성계수이다. 바닥마찰항도 다음식과 같이 통상적인 방법에 의해 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_{bx} = \rho \cdot fr \cdot \bar{u}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2}, \\ \tau_{by} = \rho \cdot fr \cdot \bar{v}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $fr = g/C^2$ 이고  $C$  = Chézy계수이다.

식 (3)과 식 (4)를 식 (1)에 대입하고 식 (1)의 비선형 이송항을 보존법칙의 형태<sup>(27)</sup>로 표현한 후 유속성분의 'bar'를 생략하면 다음식(5)와 같은 천수방정식을 얻을 수 있다.

$$\partial\eta/\partial t + \partial(\eta+h)u/\partial x + \partial(\eta+h)v/\partial y = 0 \quad (5.a)$$

$$\begin{aligned} & \partial u / \partial t + \partial(u^2) / \partial x + \partial(uv) / \partial y + g \partial \eta / \partial x \\ & = -gu(u^2 + v^2)^{1/2} / C^2(\eta + h) \\ & \quad + \epsilon_x (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2) \end{aligned} \quad (5.b)$$

$$\begin{aligned} & \partial v / \partial t + \partial(vu) / \partial x + \partial(v^2) / \partial y + g \partial \eta / \partial y \\ & = -gv(u^2 + v^2)^{1/2} / C^2(\eta + h) \\ & \quad + \epsilon_y (\partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2) \end{aligned} \quad (5.c)$$

## 2.2 유한차분법

### (1) ADI방법

메시간 간격마다  $x, y$  방향 두번의 계산이 이루어지는 방법이다. 즉,  $n\Delta t$ 에서  $(n+1/2)\Delta t$ 까지의 구간에서는  $x$ 방향에 대하여  $u$ 와  $\eta$ 를 포함하는 항을 음해법으로  $v$ 를 포함하는 항을 양해법으로 표현하여 식(5.a)와 (5.b)를 푼다.  $(n+1/2)\Delta t$ 에서  $(n+1)\Delta t$ 까지의 구간에서는  $y$ 방향에 대해서  $v$ 와  $\eta$ 를 음해법,  $u$ 를 양해법으로 표현하여 식(5.a)와 (5.c)를 푼다.

격자망의 구성은 staggered net이고  $n\Delta t$ 에서  $(n+1/2)\Delta t$ 로의 계산과정은 다음과 같다. 먼저 연속방정식 (5.a)에 대하여

$$\partial \eta / \partial t = 2(\eta_{j,k}^{n+1/2} - \eta_{j,k}^n) / \Delta t \quad (6.a)$$

$$\partial \{(\eta + h)u\} / \partial x = (Au_{j+1/2,k}^{n+1/2} - Bu_{j-1/2,k}^{n+1/2}) / \Delta x \quad (6.b)$$

$$A = (\eta_{j+1,k}^n + \eta_{j,k}^n + h_{j+1/2,k+1/2} + h_{j+1/2,k-1/2}) / 2,$$

$$B = (\eta_{j,k}^n + \eta_{j-1,k}^n + h_{j-1/2,k+1/2} + h_{j-1/2,k-1/2}) / 2$$

$$\partial \{(\eta + h)v\} / \partial y = (Cv_{j,k+1/2}^n - Dv_{j,k-1/2}^n) / \Delta y \quad (6.c)$$

$$C = (\eta_{j,k+1}^n + \eta_{j,k}^n + h_{j+1/2,k+1/2} + h_{j-1/2,k+1/2}) / 2,$$

$$D = (\eta_{j,k}^n + \eta_{j,k-1}^n + h_{j+1/2,k-1/2} + h_{j-1/2,k-1/2}) / 2$$

여기서  $A, B, C, D$ 는 유속성분이 계산되는 격자점에서 수면변위와 평균수심이 정의되지 않기 때문에 근방의 값을 평균하여 유속성분과 동일한 격자점에서의 값으로 이들을 대치하기 위하여 도입한 것이다. 또한  $x$ 방향의 운동량방정식 (5.b)에 대하여

$$\partial u / \partial t = (u_{j+1/2,k}^{n+1/2} - u_{j+1/2,k}^{n-1/2}) / \Delta t \quad (6.d)$$

$$\partial (u^2) / \partial x = \{ (u_{j+1/2,k}^{n-1/2})^2 - (u_{j-1/2,k}^{n-1/2})^2 \} / \Delta x \quad (6.e)$$

$$\partial (uv) / \partial y = \{ u_{j+1/2,k+1/2+p}^{n-1/2} (v_{j+1,k+1/2}^n + v_{j,k+1/2}^n) \}$$

$$/ 2 - u_{j+1/2,k-1/2+q}^{n-1/2} (v_{j+1,k-1/2}^n + v_{j,k-1/2}^n) / 2 \} / \Delta y \quad (6.f)$$

$$p = \{ - (v_{j,k+1/2}^n + v_{j+1,k+1/2}^n) / 2 \} /$$

$$\{ 2 | (v_{j,k+1/2}^n + v_{j+1,k+1/2}^n) / 2 | \}$$

$$q = \{ - (v_{j,k-1/2}^n + v_{j+1,k-1/2}^n) / 2 \} /$$

$$\{ 2 | (v_{j,k-1/2}^n + v_{j+1,k-1/2}^n) / 2 | \}$$

여기서  $p, q$ 는 안정성의 증진을 위하여 이송항을 upstream차분화하기 위한 것이다.<sup>(16),(19)</sup>

$$g \partial \eta / \partial x = g(\eta_{j+1,k}^{n+1/2} - \eta_{j,k}^{n+1/2}) / \Delta x \quad (6.g)$$

바닥마찰항은 다음과 같이 음해법으로 처리하였다.

$$u(u^2 + v^2)^{1/2} / (\eta + h) = (u_{j+1/2,k}^{n+1/2} + u_{j+1/2,k}^{n-1/2})$$

$$[ (u_{j+1/2,k}^{n-1/2})^2 + \{ (v_{j,k+1/2}^n + v_{j+1,k+1/2}^n + v_{j,k-1/2}^n$$

$$+ v_{j+1,k-1/2}^n) / 4 \}^2 ]^{1/2} / (\eta_{j,k}^n + \eta_{j+1,k}^n + h_{j+1/2,k+1/2}$$

$$+ h_{j+1/2,k-1/2}) \quad (6.h)$$

즉, 모든 변수의 값을  $u$ 와 동일한 격자점에서 택하였고  $u$ 는 기지와 미지의 두 시간단계의 값을 같은 가중치로 택하였다.  $(n+1/2)\Delta t$ 에서  $(n+1)\Delta t$ 의 계산과정도 이상과 비슷한 차분을 행하였으며 매 시간 단계마다  $x, y$  두 방향으로 각각 연립방정식을 만들 수 있고 이를 Thomas 알고리즘을 이용해 풀었다.

Ponce 등<sup>(21)</sup>은 매시간 단계마다 유효점성항을 포함하지 않는 상태에서 계산되는 수치해를  $\alpha$ 의 가중치를 두고 공간평균함으로써 유효점성항이 존재하는 효과를 갖도록 만들었다. 이때의 유효점성계수는  $\epsilon_x = \epsilon_y = \alpha(\Delta x)^2 / \Delta t$ 가 되는데  $\alpha$ 의 값은 경험적으로 0.1이 가장 적절하다고 알려져 있다. 본 연구에서는 이와같은 방법으로 유효점성항을 처리하지 않고 유효점성항을 명시적으로 나타내어 이를 동시에 중앙차분화하였기 때문에 유효점성계수를 위와 같이 정의하는 것은 다소 무리가 있지만  $\alpha$ 값의 민감도에 관한 연구, 그리고 전술한 유효점성항의 처리방법과의 비교를 위해 유효점성계수  $\epsilon_x, \epsilon_y$ 를 위와 동일한 형태로 선정하였다.

### (2) Hansen 방법

이 방법의 차분형태는 다음과 같이 공간미분항을  $x, y$ 방향에서 각 방향으로만 중앙차분하고 시간미분항도 Leap Frog방법의 형태로 중앙차분한 양해법이다.

$$u_{j,k}^{n+1/2} = (1 - \Delta t \cdot \text{frct}) u_{j,k}^{n-1/2} - g \Delta t / \Delta x \cdot$$

$$(\eta_{j+1/2,k}^n - \eta_{j-1/2,k}^n) - \Delta t (\text{cvt} - \text{atv}) \quad (7.a)$$

여기서  $\text{frct}$ ,  $\text{cvt}$ ,  $\text{atv}$ 는 각각 마찰항, 이송항, 유효점성항을 말하며 이들은 다음과 같이 처리하였으며  $v$ 뿐만 아니라 이하 모든 양해법에서도 동일한 방법으로 처리하였다.

$$\text{frct} = \text{fr} \{ (u_{j,k}^{n-1/2})^2 + (v_{j+1/2,k+1/2}^{n-1/2})^2 \}^{1/2}$$

$$/ (\eta_{j+1/2,k}^n + h_{j+1/2,k})$$

$$\text{cvt} = \{ (u_{j,k}^{n-1/2})^2 - (u_{j-1,k}^{n-1/2})^2 \} / \Delta x + v_{j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}$$

$$(u_{j,k}^{n-1/2} - u_{j,k-1}^{n-1/2}) / \Delta y$$

$$\text{atv} = \epsilon_x (u_{j+1,k}^{n-1/2} - 2u_{j,k}^{n-1/2} + u_{j-1,k}^{n-1/2}) / \Delta x^2$$

$$+ \epsilon_y (u_{j,k+1}^{n-1/2} - 2u_{j,k}^{n-1/2} + u_{j,k-1}^{n-1/2}) / \Delta y^2$$

$$v_{j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = (1 - \Delta t \cdot \text{frct}) v_{j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}$$

$$- g \Delta t / \Delta y \cdot (\eta_{j+1/2,k+1}^n - \eta_{j+1/2,k}^n)$$

$$- \Delta t (\text{cvt} - \text{atv}) \quad (7.b)$$

$$\eta_{j+1/2,k}^{n+1} = \eta_{j+1/2,k}^n - \Delta t / \Delta x \cdot (\eta_{j+1/2,k}^n + h_{j+1/2,k})$$

$$(u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n+1/2}) - \Delta t / \Delta y \cdot (\eta_{j+1/2,k}^n$$

$$+ h_{j+1/2,k}) (v_{j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - v_{j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}) \quad (7.c)$$

### (3) Heaps 방법

Heaps 방법<sup>(5)</sup>은 유속과 수면변위가 각각 상이한 격자점에서 정의되며 공간미분항을  $x-y$  평면 상에서 증양차분한 양해법이다. 유속성분을 양해법으로 먼저 계산한 후 이 값을 이용하여 동일한 시간 단계에서 음해법으로 수면변위를 계산하는 알고리즘을 포함하고 있으며 Hansen 방법을 개량한 것이다.  $\eta$ 항만으로도 경계조건을 줄 수 있는 특징이 있다.

$$u_{j,k}^{n+1} = (1 - \Delta t \cdot \text{frct}) u_{j,k}^n - g \Delta t / (2 \Delta x) \cdot$$

$$(\eta_{j+1/2,k+1/2}^n + \eta_{j+1/2,k-1/2}^n - \eta_{j-1/2,k+1/2}^n - \eta_{j-1/2,k-1/2}^n)$$

$$- \Delta t (\text{cvt} - \text{atv}) \quad (8.a)$$

$$v_{j,k}^{n+1} = (1 - \Delta t \cdot \text{frct}) v_{j,k}^n - g \Delta t / (2 \Delta y) \cdot$$

$$(\eta_{j+1/2,k+1/2}^n + \eta_{j-1/2,k+1/2}^n - \eta_{j+1/2,k-1/2}^n - \eta_{j-1/2,k-1/2}^n)$$

$$- \Delta t (\text{cvt} - \text{atv}) \quad (8.b)$$

$$\eta_{j+1/2,k+1/2}^{n+1} = \eta_{j+1/2,k+1/2}^n - \Delta t / (2 \Delta x) \cdot$$

$$(\eta_{j+1/2,k+1/2}^n + h_{j+1/2,k+1/2}) (u_{j+1,k+1}^{n+1} + u_{j+1,k}^{n+1}$$

$$- u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}) - \Delta t / (2 \Delta y) \cdot (\eta_{j+1/2,k+1/2}^n$$

$$+ h_{j+1/2,k+1/2}) (v_{j+1,k+1}^{n+1} + v_{j,k+1}^{n+1} - v_{j+1,k}^{n+1}$$

$$- v_{j,k}^{n+1}) \quad (8.c)$$

### (4) Richtmyer 방법

매시간 간격에서 두번의 계산이 이루어지는 2단계 방법으로 공간미분항은 증양차분하고 시간미분항은 1단계에서는 전방차분, 2단계에서는 증양차분한 양해법이다. 즉 1단계서는 Lax-Fredrich방법, 2단계에서는 Leap Frog을 사용한 방법이다.

#### 1) 1단계

$$u_{j,k}^{n+1/2} = (1 - \Delta t / 2 \cdot \text{frct}) (u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n$$

$$+ u_{j,k-1}^n) / 4 - g \Delta t / (4 \Delta x) \cdot (\eta_{j+1,k}^n - \eta_{j-1,k}^n)$$

$$- \Delta t (\text{cvt} - \text{atv}) \quad (9.a)$$

$$v_{j,k}^{n+1/2} = (1 - \Delta t / 2 \cdot \text{frct}) (v_{j,k+1}^n + v_{j,k-1}^n + v_{j+1,k}^n$$

$$+ v_{j-1,k}^n) / 4 - g \Delta t / (4 \Delta y) \cdot (\eta_{j,k+1}^n - \eta_{j,k-1}^n)$$

$$- \Delta t (\text{cvt} - \text{atv}) \quad (9.b)$$

$$\eta_{j,k}^{n+1/2} = (\eta_{j+1,k}^n + \eta_{j-1,k}^n + \eta_{j,k+1}^n + \eta_{j,k-1}^n) / 4$$

$$- \Delta t / (4 \Delta x) \cdot (\eta_{j,k}^n + h_{j,k}) (u_{j+1,k}^{n+1/2} - u_{j-1,k}^{n+1/2})$$

$$- \Delta t / (4 \Delta y) \cdot (\eta_{j,k}^n + h_{j,k}) (v_{j,k+1}^{n+1/2} - v_{j,k-1}^{n+1/2}) \quad (9.c)$$

#### 2) 2단계

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^{n+1/2} - \Delta t \cdot \text{frct} u_{j,k}^{n+1/2} - g \Delta t / (2 \Delta x) \cdot$$

$$(\eta_{j+1,k}^{n+1/2} - \eta_{j-1,k}^{n+1/2}) - \Delta t (\text{cvt} - \text{atv}) \quad (9.d)$$

$$v_{j,k}^{n+1} = v_{j,k}^{n+1/2} - \Delta t \cdot \text{frct} v_{j,k}^{n+1/2} - g \Delta t / (2 \Delta y) \cdot$$

$$(\eta_{j,k+1}^{n+1/2} - \eta_{j,k-1}^{n+1/2}) - \Delta t (\text{cvt} - \text{atv}) \quad (9.e)$$

$$\eta_{j,k}^{n+1} = \eta_{j,k}^{n+1/2} - \Delta t / (2 \Delta x) \cdot (\eta_{j,k}^{n+1/2} + h_{j,k}) (u_{j+1,k}^{n+1}$$

$$- u_{j-1,k}^{n+1}) - \Delta t / (2 \Delta y) (\eta_{j,k}^{n+1/2} + h_{j,k})$$

$$(v_{j,k+1}^{n+1} - v_{j,k-1}^{n+1}) \quad (9.f)$$

### (5) MacCormack 방법

Predictor-Corrector 방법으로 공간미분항은 Predictor, Corrector 각 단계에서 유속과 수면변위 각

각에 대한 전방차분, 후방차분을 교대로 하고 시간 미분항은 Predictor 단계, Corrector 단계 모두 전방차분한 양해법으로 Lax-Wendroff 방법을 개량한 방법이다.

1) Predictor

$$u_{j,k}^{n+1} = (1 - \Delta t \cdot \text{frct}) u_{j,k}^n - g \Delta t / \Delta x \cdot (\eta_{j,k}^n - \eta_{j-1,k}^n) - \Delta t (cvt - atv) \quad (10.a)$$

$$v_{j,k}^{n+1} = (1 - \Delta t \cdot \text{frct}) v_{j,k}^n - g \Delta t / \Delta y \cdot (\eta_{j,k}^n - \eta_{j,k-1}^n) - \Delta t (cvt - atv) \quad (10.b)$$

$$\eta_{j,k}^{n+1} = \eta_{j,k}^n - \Delta t / \Delta x \cdot (\eta_{j,k}^n + h_{j,k}) (u_{j+1,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}) - \Delta t / \Delta y \cdot (\eta_{j,k}^n + h_{j,k}) (v_{j,k+1}^{n+1} - v_{j,k}^{n+1}) \quad (10.c)$$

2) Corrector

$$u_{j,k}^{n+1} = \{ (1 - \Delta t \cdot \text{frct}) (u_{j,k}^n + \bar{u}_{j,k}^{n+1}) - g \Delta t / \Delta x \cdot (\eta_{j+1,k}^{n+1} - \eta_{j,k}^{n+1}) - \Delta t (cvt - atv) \} / 2 \quad (10.d)$$

$$v_{j,k}^{n+1} = \{ (1 - \Delta t \cdot \text{frct}) (v_{j,k}^n + \bar{v}_{j,k}^{n+1}) - g \Delta t / \Delta y \cdot (\eta_{j,k+1}^{n+1} - \eta_{j,k}^{n+1}) - \Delta t (cvt - atv) \} / 2 \quad (10.e)$$

$$\eta_{j,k}^{n+1} = \{ \eta_{j,k}^n + \bar{\eta}_{j,k}^{n+1} - \Delta t / \Delta x \cdot (\eta_{j,k}^{n+1} + h_{j,k}) (u_{j,k}^{n+1} - u_{j-1,k}^{n+1}) - \Delta t / \Delta y \cdot (\eta_{j,k}^{n+1} + h_{j,k}) (v_{j,k-1}^{n+1} - v_{j,k}^{n+1}) \} / 2 \quad (10.f)$$

3. 적용 대상수역 및 해석적 해

적용 대상수역의 형상은 그림 1과 같고 본 연구에서는 해석적 해가 존재하는 선형모형에 대하여 세가지 경우를, 그리고 순환현상이 야기되는 비선형모형에 대하여 한가지 경우를 각각 해석하였다.

3.1 선형모형과 해석적 해

식 (5)에서  $h$ 에 비해  $\eta$ 가 상당히 작다는 가정 하에 비선형 마찰항을 선형화 시키고 이송항과 유효점성항을 무시하면 식 (11)과 같은 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\partial \eta / \partial t + \partial(hu) / \partial x + \partial(hv) / \partial y = 0 \quad (11.a)$$

$$\partial u / \partial t + g \partial \eta / \partial x + \tau u = 0 \quad (11.b)$$

$$\partial v / \partial t + g \partial \eta / \partial y + \tau v = 0 \quad (11.c)$$

여기서  $\tau$ 는 상수로서 선형화된 바닥 마찰계수이며 바닥 마찰항은 모든 차분법에서 양해법으로 처리하였다.

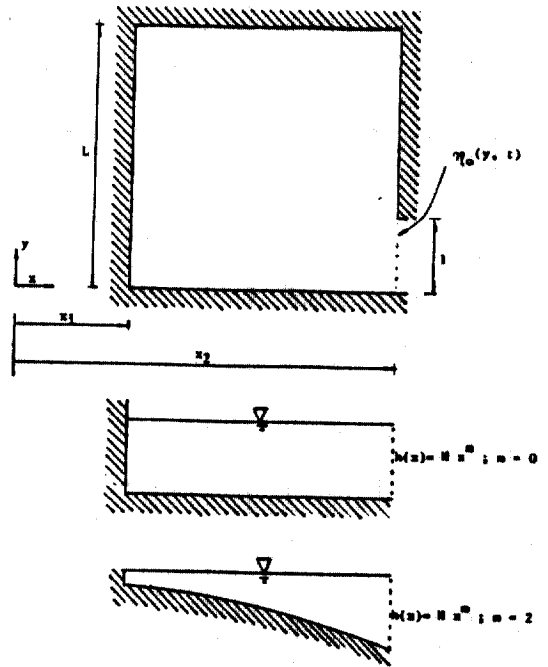


그림 1. 적용수역의 형상

그림 1에서  $1=L$ 일 때 다음과 같이  $\omega$ 의 주파수를 갖는 파가 유입되는 세가지 경우에 대하여 식 (11)에 대한 해석적 해가 존재한다.<sup>(20)</sup>

경우 1 :  $h = H(\text{const.})$ ,  $\eta_0(y, t) = \cos at$

경우 2 :  $h = H(\text{const.})$ ,  $\eta_0(y, t) = y/L \cdot \cos at$

경우 3 :  $h = 10^{-7} Hx^2$ ,  $\eta_0(y, t) = \cos at$

경우 1과 경우 3은  $y$ 방향의 유속과 수면변위의 변화가 전혀 없는 1차원문제이고 경우 2는  $h$ 가 일정하지만  $y$ 방향으로 유속과 수면변위가 변화하는 2차원문제로서 이들의 해석적 해는 다음과 같다.

$$\eta(x, y; t) = \text{Re} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (a_j \xi_{1j} + b_j \xi_{2j}) \cos(k_j y) \exp(iat) \right\} \quad (12)$$

여기서  $k_j = j\pi/L$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ )이고

$$a_j = H \xi'_{2j}(x_1) / \{ \xi'_{2j}(x_1) \xi_{1j}(x_2) - \xi_{2j}(x_2) \xi'_{1j}(x_1) \}$$

$$b_j = -H \xi'_{1j}(x_1) / \{ \xi'_{2j}(x_1) \xi_{1j}(x_2) - \xi_{2j}(x_2) \xi'_{1j}(x_1) \}$$

이며  $\xi_{1j}, \xi_{2j}$ 에 따라 세가지 경우가 결정되어진다. 이로부터 구한 경우 1과 경우 3의 해석적 해는 각각 식(13), 식(15)와 같고 경우 2의 해석적 해는 식(14)를 식(12)에 대입한 후 이 식이 거의 수렴하는  $j=30$ 까지의 합을 계산함으로써 얻을 수 있다.

$$\eta = \text{Re} [ \exp(iat) \cos\{\beta(x-x_1)\} / \cos\{\beta(x_2-x_1)\} ] \quad (13.a)$$

$$u = \text{Re}[-i\alpha \exp(i\alpha t) \sin\{\beta(x-x_1)\} / \beta H \cos\{\beta(x_2-x_1)\}] \quad (13.b)$$

$$\xi_1(x) = \cos\{[(j\pi/L)^2 - \beta]x\},$$

$$\xi_2(x) = \sin\{[(j\pi/L)^2 - \beta]x\} \quad (14)$$

$$\eta = \text{Re}\{(Ax^{S_1} + Bx^{S_2}) \exp(i\alpha t)\} \quad (15.a)$$

$$u = \text{Re}\{(As_1 x^{S_1-1} + Bs_2 x^{S_2-1}) i\alpha \exp(i\alpha t) / (\beta H)\} \quad (15.b)$$

여기서  $\beta = (\omega - i\alpha) / gH$ ,

$$A = Hs_2 x_1^{S_2} / (s_2 x_1^{S_2} x_2^{S_2} - s_1 x_1^{S_1} x_2^{S_2}),$$

$$B = Hs_1 x_1^{S_1} / (s_1 x_1^{S_1} x_2^{S_2} - s_2 x_1^{S_2} x_2^{S_1})$$

$$s_1 = -0.5 + (0.25 - \beta^2)^{1/2}, \quad s_2 = -0.5 - (0.25 - \beta^2)^{1/2}$$

### 32 비선형모형과 순환현상

그림 1에서 1이 L보다 매우 작은 경우  $\omega$ 의 주파수를 갖는 파가 유입되면 대상수역 내에 순환현상이 야기되어진다<sup>(16)</sup>. 수치적 방법에 의해 이러한 순환현상을 보이기 위해서는 식(5)의 이송항 또는 유효점성항의 존재가 필수적이라고 알려져 있는데<sup>(21)</sup> 본 연구에서는 식(5)를 지배방정식으로 하여 전술한 5가지 차분법을 이용해 이 현상을 모의하였다.

### 4. 수치 안정성분석

천수방정식의 수치해석시 불안정한 결과가 야기되어지는 원인은 시간간격을 CFL 조건보다 큰 값으로 선택하였을 때 발생하는 경우와 이송항과 마찰항 등 비선형항의 부적절한 공간 유한차분에 의한 경우가 있는데 공간적 불안정성은 일반적으로 유효점성항의 도입으로 다소 극복될수 있다<sup>(16, 20)</sup>. 이송항과 마찰항을 모두 생략한 경우 시간에 따른 불안정성(CFL 조건)만 발생되며 이때 음해법은 무조건 안정하지만 1차원의 경우 양해법은 Courant 수( $\equiv \Delta t / \Delta x \cdot (gh)^{1/2}$ )가 1보다 작아야 안정하게 된다. 2차원의 경우 식(16.a)와 같이 정의되는<sup>(12)</sup> Courant 수에 의해 앞에서 언급된 양해법 모두가 안정성의 제약을 받는다.

$$Cr = \Delta t \{gh(1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2)\}^{1/2} \quad (16.a)$$

$\Delta x = \Delta y$  이면 식 (16.a)는 식 (16.b)가 된다.

$$Cr = \Delta t / \Delta x \cdot (2gh)^{1/2} \quad (16.b)$$

ADI 방법의 정확성 한계는 경험적으로  $Cr < 3-5$ , 일반 양해법의 안정성 한계는  $Cr < 1$ 으로 알려져 있는데<sup>(12)</sup> 본 연구에서 취급한 차분법의 안정성 한계로 각 차분법 내부에서 사용된 차분방법의 안정조

건을 다음과 같이 유도하였다. 식(11)에서  $\tau=0$ 인 경우를 분석대상으로 택해 이를 행렬식으로 표현하면 다음식 (17)과 같이 된다.

$$\partial V / \partial t = A \partial V / \partial x + B \partial V / \partial y \quad (17)$$

여기서

$$V = \begin{bmatrix} \eta \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -h & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 1) Leap Frog 방법

$$V_{j,k}^{n+1} = V_{j,k}^{n-1} + \Delta t / \Delta x \cdot A (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) + \Delta t / \Delta y \cdot B (V_{j,k+1}^n - V_{j,k-1}^n)$$

이에 대한 확대행렬 (amplification matrix)  $G$ 는 다음과 같다.

$$G = \pm \{ [I - (\Delta t / \Delta x \cdot \sin \xi \cdot A + \Delta t / \Delta y \cdot \sin \eta \cdot B)]^T (\Delta t / \Delta x \cdot \sin \xi \cdot A + \Delta t / \Delta y \cdot \sin \eta \cdot B)^{1/2} + i (\Delta t / \Delta x \cdot \sin \xi \cdot A + \Delta t / \Delta y \cdot \sin \eta \cdot B) \}$$

여기서  $I$ 는 identity 매트릭스이며  $\xi = d\Delta x$ ,  $\eta = e\Delta y$  ( $d, e$ 는 파수(wave number<sup>(10)</sup>)이고  $i = (-1)^{1/2}$ )이다.  $G$ 의 numerical radius ( $r(G) = \max_{|x|=1} |(Gx, x)| \leq 1$ ) 이면  $|G^n| \leq 2$  이된다. 이를 위해서는  $\Delta t / \Delta x \cdot \rho(A) + \Delta t / \Delta y \cdot \rho(B) \leq 1$  또는  $\rho(A) + \rho(B) \leq 1$ 이어야 하고  $\Delta x = \Delta y$  이면  $\Delta t \leq \Delta x / (4gh)^{1/2}$  또는  $Cr \leq 1/2^{1/2}$  이라는 안정 조건이 성립된다.

여기서  $\rho(\cdot)$ 는 spectral radius이고  $\tilde{A} = \Delta t / \Delta x \cdot A$ ,  $\tilde{B} = \Delta t / \Delta y \cdot B$ 이다.

### 2) Lax-Fredrich 방법

$$V_{j,k}^{n+1} = (V_{j+1,k}^n + V_{j-1,k}^n + V_{j,k+1}^n + V_{j,k-1}^n) / 4 + \Delta t / (2\Delta x) \cdot A (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) + \Delta t / (2\Delta y) \cdot B (V_{j,k+1}^n - V_{j,k-1}^n)$$

$$G = (\cos \xi + \cos \eta) 1/2 + i (\Delta t / \Delta x \cdot \sin \xi \cdot A + \Delta t /$$

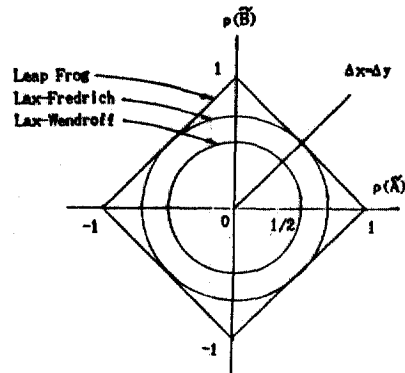


그림 2 내부차분법의 안정영역

$$\Delta y \cdot \sin \eta \cdot B)$$

이에 대한 안정조건은  $\{\Delta t/\Delta x \cdot \rho(A)\}^2 + \{\Delta t/\Delta y \cdot \rho(B)\}^2 \leq 1/2$  또는  $\rho(\tilde{A}) + \rho(\tilde{B}) \leq 1/2$  이고  $\Delta x = \Delta y$  이면  $\Delta t \leq \Delta x / (4gh)^{1/2}$  또는  $Cr \leq 1/2^{1/2}$  이다.

### 3) Lax-Wendroff 방법

$$V_{j,k}^{n+1} = V_{j,k}^n + \Delta t / (2\Delta x) \cdot A (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) + \Delta t / (2\Delta y) \cdot$$

$$B (V_{j,k+1}^n - V_{j,k-1}^n) + (\Delta t / \Delta x)^2 A^T A (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n) / 2 + (\Delta t /$$

$$\Delta y)^2 B^T B (V_{j,k+1}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j,k-1}^n) / 2$$

$$+ (\Delta t^2 / \Delta x \Delta y) (AB + BA) (V_{j+1,k+1}^n - V_{j+1,k-1}^n - V_{j-1,k+1}^n + V_{j-1,k-1}^n) / 8$$

$$G = I - \{(\Delta t / \Delta x)^2 (1 - \cos \xi) A^T A + (\Delta t / \Delta y)^2 (1 - \cos \eta) B^T B + (\Delta t^2 / \Delta x \Delta y) \sin \xi \sin \eta$$

$$(AB + BA) / 2\} + i(\Delta t / \Delta x \cdot \sin \xi \cdot A + \Delta t /$$

$$\Delta y \cdot \sin \eta \cdot B)$$

안정조건은  $\{\Delta t/\Delta x \cdot \rho(A)\}^2 + \{\Delta t/\Delta y \cdot \rho(B)\}^2 \leq 1/4$  또는  $\rho(\tilde{A}) + \rho(\tilde{B}) \leq 1/4$  이고  $\Delta x = \Delta y$  이면  $\Delta t \leq \Delta x / 2(2gh)^{1/2}$  또는  $Cr \leq 1/2$  이다.

이상과 같은 결과를 도시한 그림 2로 미루어 Lax-Wendroff 방법과 유사한 MacCormack 방법은 5 가지 차분법 중 가장 열등한 안정조건을 갖게 된다는 사실은 특기할만 하다.

### 5. 수치 실험 결과

#### 5.1 선형 모형 실험

식 (11)을 지배방정식으로 하고 다음식(18)과 같은 경계조건과 초기값을 모두 0으로 하는 조건(cold start) 하에서 전술한 세가지 경우에 대하여 수치 실험을 실시하였다.

表 1. 경우1의 RMS 오차와 CPU시간(수면변위(m), 유속(m/sec), CPU시간(msec) 순)

연번	$\Delta x$	$\Delta t$	H	Cr	ADI	Hansen	Heaps	Ricth	MacCo.
1	500	7.855	10	0.22	0.023 0.085 40380	0.038 0.065 5523	0.038 0.065 7146	0.039 0.056 28450	0.036 0.059 30442
2	250	7.855	10	0.44	0.017 0.045 152841	0.034 0.025 20106	0.034 0.025 25967	0.022 0.016 115080	불안정
3	500	15.710	10	0.44	0.033 0.090 19443	0.064 0.051 3275	0.064 0.056 4076	0.049 0.056 14598	0.046 0.049 15503
4	250	15.710	10	0.88	0.027 0.052 78005	0.064 0.016 11377	0.064 0.016 14533	0.042 0.024 59564	불안정
5	500	31.420	10	0.88	0.052 0.100 10358	0.119 0.035 2141	0.119 0.035 2564	0.079 0.060 7770	불안정
6	500	15.710	40	0.88	0.076 0.033 19706	0.092 0.004 3270	0.092 0.004 4083	0.050 0.008 14642	불안정
7	500	47.130	10	1.32	0.071 0.109 7223	불안정	불안정	0.112 0.071 5548	불안정
8	500	62.830	10	1.76	0.087 0.118 5767	불안정	불안정	0.144 0.090 4466	불안정
9	500	157.10	10	4.40	0.172 0.150 2835	불안정	불안정	불안정	불안정
10	500	235.60	10	6.60	0.259 0.170 1872	불안정	불안정	불안정	불안정

$$x = x_1; \partial\eta/\partial x = 0, u = 0 \quad (18. a)$$

$$x = x_2; \eta(x_2, y, t) = \text{Re}\{\eta_0(y)\exp(iat)\} \quad (18. b)$$

$$y = 0, L; \partial\eta/\partial y = 0, v = 0 \quad (18. c)$$

$\tau = 0.01, \omega = 0.01(\text{rad/sec}), x_1 = 5000\text{m}, x_2 = 10000\text{m}, L = 5000\text{m}$ 인 상태에서 초기조건의 영향이 거의 소멸되는 세주기 후 ( $t = 3 * 628.4 = 1885.2\text{초}$ )에서 실험결과와 해석적 해를 비교하였다.

개정계에서의 수심  $H$ 와  $\Delta x, \Delta t$ 등을 변화시켜가며 식 (19)와 같이 정의되는 유속에 수면변위의 RMS (Root Mean Square) 오차와 CPU 시간을 경우 1에 대하여 표 1에 나타내었다.

$$\text{RMS오차} \equiv \{1/K \cdot \sum_{k=1}^k (A_k - N_k)^2\}^{1/2} \quad (19)$$

여기서  $A_k$ 는 해석적 해이고  $N_k$ 는 수치해이며  $K$ 는 격자점의 갯수이다.

적용차분법과 내부 차분방법의 불일치와 마찰항의 영향 등을 감안한다면 각 차분법에 관한 안정성 범위는 앞에서 유도한 범위와 비교적 근사한 결과를 보이고 있다. 즉 각 차분법의 안정성 한계는 대략 Hansen 방법과 Heaps 방법이  $Cr < 1.0 - 1.2$ , Richtmyer 방법이  $Cr < 1.8 - 2.0$ , MacCormack 방법이  $Cr < 0.4 - 0.5$  등으로 음해법인 ADI방법이 무조건 안정하지만 정확성의 보장을 위해서는  $Cr < 5$  이어야 하고 양해법 중에는 Richtmyer방법의 안정범위가 가장 넓으며 MacCormack 방법이 가장 좁다. CPU 시간은 행렬식의 계산이 포함된 ADI 방법이 가장 길고 2단계 양해법인 MacCormack 방법과 Richtmyer 방법이 긴 편이며 Hansen 방법과 Heaps 방법이 가장 짧다. 수면변위에 관한 정확성은 ADI방법이 가장 높고 나머지 방법은 비슷한 반면 유속에 관한 정확성은 오히려 ADI방법이 가장 낮고 나머지 방법

은 비슷하다.

그림 3과 그림 4는 표 1에서  $\Delta x = \Delta y = 500\text{m}$ 일 때  $\Delta t$ 를 변화시켜 가며 MacCormack방법을 제외한 각 차분법의 수면변위와 유속에 관한 RMS 오차의 민감도를 각각 도시한 것이다. 이를 보면 수면변위에 대한 오차는 Cr 수에 비례하여 커지는 반면 유

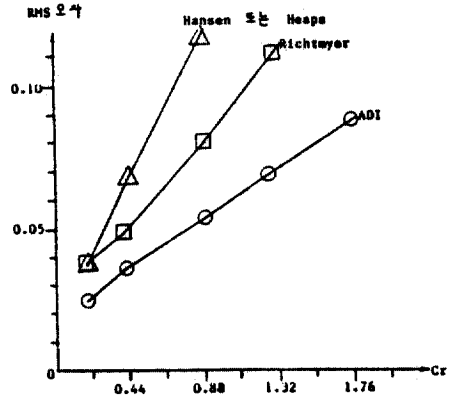


그림 3. Cr수에 따른 수면변위의 RMS오차 ( $\Delta x = \Delta y = 500\text{m}$ )

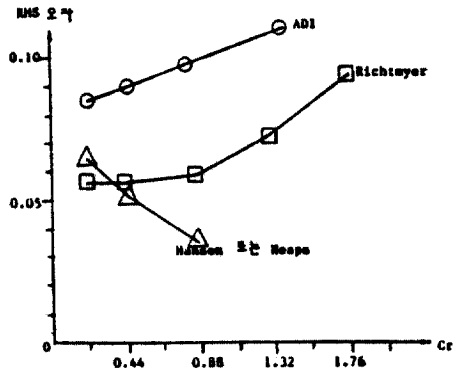


그림 4. Cr수에 따른 유속의 RMS오차( $\Delta x = \Delta y = 500\text{m}$ )

표 2 경우 2의 수면변위(m)에 관한 RMS 오차

연번	$\Delta x$	$\Delta t$	H	Cr	ADI	Hansen	Heaps	Richt.	MacCo.
1	500	7.855	10	0.22	0.034	0.038	0.037	0.036	0.035
2	250	7.855	10	0.44	0.034	0.039	0.039	0.033	불안정
3	500	15.710	10	0.44	0.36	0.052	0.050	0.041	0.043
4	250	15.710	10	0.88	0.036	0.053	0.053	0.040	불안정
5	500	31.420	10	0.88	0.044	0.082	0.079	0.056	불안정
6	500	15.710	40	0.088	0.097	0.125	0.116	0.102	불안정
7	500	47.130	10	1.32	0.052	불안정	불안정	0.073	불안정

\*유속에 관한 오차계산은 생략하였음



속에 관한 오차는 Richtmyer방법에서  $Cr=0.88$  을 전후로  $Cr$  수가 작아지더라도 오차 감소상태가 상당히 둔해지며 Hansen 방법과 Heaps 방법에서는 오히려  $Cr$  수에 비례하여 오차가 작아지고 있다. 즉 수면변위의 정확성은  $Cr$ 수에 관계없이  $\Delta t$ 를 작게 선택할수록 그에 비례하여 증진되지만 유속에 관해서는  $\Delta t$ 를 어느 한도 이상 감소시키게 되면 수치적 파속이 해석적 파속에 비해 너무 커지게 되어 차분법에 따라 비효율적이 되거나 오히려 부정확한 결과를 얻을 수도 있다. 경우 2의 실험결과인 표 2와 경우 3의 실험결과인 표 3을 분석하면 이러한 사실들을 재확인할 수 있다. 한편 2차원 현상을 검토한 표 2를 보면 Hansen 방법을 개선한 Heaps 방법이 약간 더 정확한 결과를 보이고 있다.

질량보존을 위해서는 각 지점에서 유속과 수면

변위의 곱을 누적시켜 더한 값이 매주기마다 0이 되어야 하는데 3가지 각 경우의 연번 (1)에 대하여 정중앙 지점에서 3주기부터 4주기까지 각 차분법에 대한 이 값을 계산해 표 4에 나타내었다. 5가지 차분법 모두 이러한 질량 보존현상을 대체적으로 잘 만족시키고 있는데 이는 지배방정식이 보존법칙의 형태<sup>(9)</sup>를 띠고 있기 때문인 것으로 사료된다. 일반적으로 보존법칙의 형태에서 두 항으로 분리시키는 것은 오차발생의 원인이 된다고 알려져 있다.<sup>9)</sup> 1차원의 경우는 MacCormack 방법이 다소 우수하지만 2차원의 경우는 가장 열등하고 ADI방법이 가장 우수하다.

### 5. 2 비선형 모형실험

$x_1=80cm, x_2=160cm, L=80cm, I=16cm, H=13.74cm$  인 수조에 파고가  $3.08cm$ 이고  $\omega=0.01(rad/sec)$ 인

表 3 경우 3의 수면변위(m)와 유속(m/sec)에 관한 RMS 오차

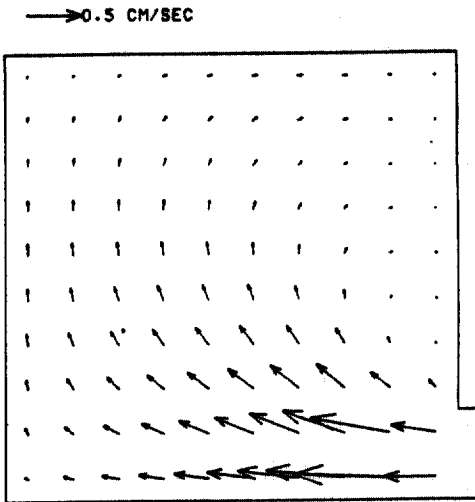
연번	$\Delta x$	$\Delta t$	Cr	ADI	Hansen	Heaps	Richt.	MacCo.
1	500	7.855	0.22	0.018	0.046	0.046	0.065	0.063
				0.088	0.110	0.110	0.109	0.110
2	250	7.855	0.44	0.014	0.046	0.046	0.048	0.086
				0.046	0.070	0.070	0.063	0.144
3	500	15.710	0.44	0.027	0.061	0.061	0.067	0.062
				0.094	0.097	0.097	0.108	0.100
4	250	15.710	0.88	0.024	0.063	0.063	0.056	불안정
				0.053	0.063	0.063	0.069	
5	500	31.420	0.88	0.045	0.101	0.101	0.080	0.073
				0.105	0.080	0.080	0.110	0.100
6	500	47.130	1.32	0.062	0.142	0.142	0.099	불안정
				0.116	0.079	0.079	0.115	
7	500	62.830	1.76	0.077	불안정	불안정	0.122	불안정
				0.127			0.126	
8	500	157.10	4.40	0.163	불안정	불안정	불안정	불안정
				0.170				
9	500	235.60	6.60	0.225	불안정	불안정	불안정	불안정
				0.198				

表 4 질량 보존 오차(%)

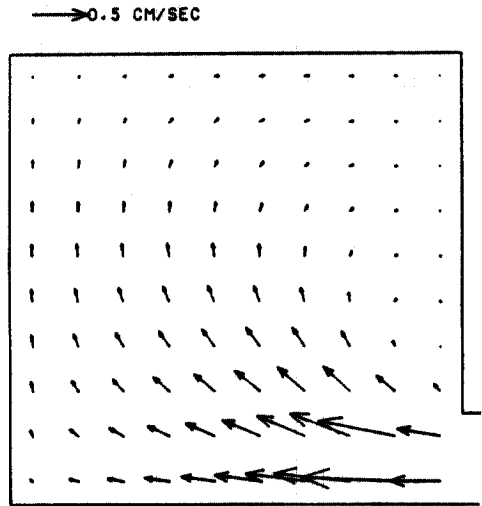
경 우	ADI	Hansen	Heaps	Richtmyer	MacCormack
1	-0.00537	-0.00593	-0.000682	-0.00543	-0.00453
2	-0.00032	-0.00176	-0.00173	-0.00164	-0.00490
3	-0.00660	-0.00574	-0.00620	-0.00509	-0.00454

cosine 함수의 형태로 파가 유입되면 수조내에 순환현상이<sup>(6)</sup> 발생되는데 이때의 순환현상은 Abbott 가 지적한 바 있는 적절치 못한 격자망의 구성으로 인한 위조순환<sup>(9)</sup>(spurious circulation)과는 달리 실제로 발생되야 하는 것으로서 이를 수치적 방법에 의해 나타내기 위하여 이에 대한 수치실험을 수행하였다.  $\Delta x = \Delta y = 8\text{cm}$ ,  $\Delta t = 0.05\text{sec}$  (ADI;  $Cr = 1.03$ ),  $\Delta t = 0.01\text{sec}$  (양해법;  $Cr = 0.21$ ),  $C = 405(\text{cm}^{1/2}/$

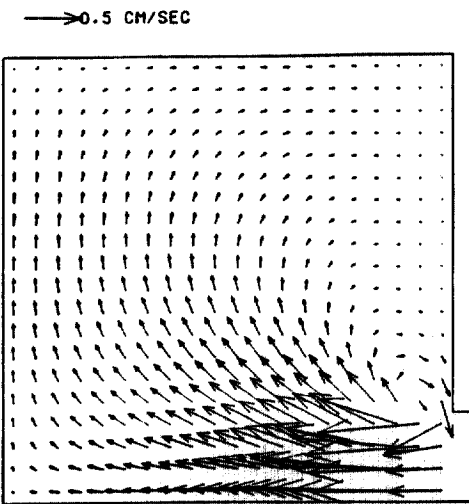
$\text{sec})$ ,  $\alpha = 0.1$ 인 상태에서  $t = 475\text{sec}$  (약 3/4주기)까지 계산을 하였는데 양해법의 5배인 시간간격에도 불구하고 ADI 방법에서 그림 5와 같이 뚜렷한 순환현상이 나타나고 있으며 다른 방법에서는 순환현상이 잘 나타나지 않았다. ADI방법의 공간 격자간격을 반으로 감소시킨 결과( $Cr = 2.06$ ) 그림 6을 얻을 수 있었는데 그림 5와 비교해 보면 수역내에서의 흐름방향은 거의 일치하지만 수역 입구부근에



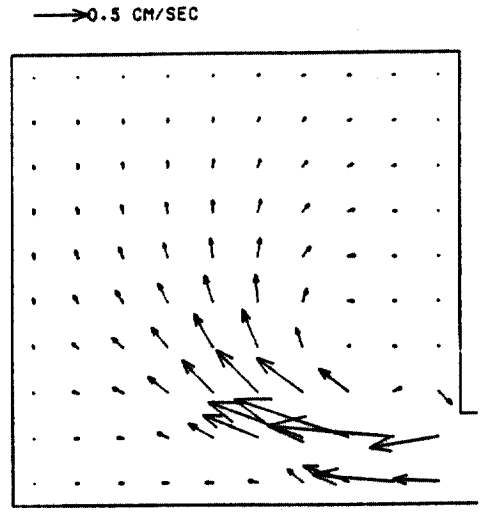
TIME = 475.00 SEC. DELTA T = 0.05 SEC  
그림 6. ADI방법의 수치실험결과( $\Delta x = \Delta y = 4\text{cm}$ )



TIME = 475.00 SEC. DELTA T = 0.05 SEC  
그림 7. ADI방법의 수치실험결과(이송항을 무시한 경우)



TIME = 475.00 SEC. DELTA T = 0.05 SEC  
그림 5. ADI방법의 수치실험결과( $\Delta x = \Delta y = 8\text{cm}$ )



TIME = 475.00 SEC. DELTA T = 0.05 SEC  
그림 8. ADI방법의 수치실험결과(유효점 성향을 무시한 경우)

서의 순환현상을 더 잘 나타내고 있다.

이송항을 생략한 경우 ADI방법을 이용한 결과 인 그림 7은 그림 5와 거의 일치하였고 공간 격자 간격을 반으로 줄여도 마찬가지로 결과를 보였다. 즉 본 연구에서 취급한 문제는 이송항의 영향을 거의 받지않고 있으며 이송항이 결여된 경우에도 유효점성항이 존재하면 ADI방법에서 순환현상이 나타나고 있다. 유효점성항에 대한 민감도 분석을 위하여 유효점성항을 무시한 경우에 대한 수치실험을 하였는데 양해법은 모두 불안정한 결과를 보이고 있으며 ADI방법도 그림 8과 같이 만족스럽지 못한 결과를 보이고 있다. 이런점에서 2차원 현상의 수치해석시 Vreugdenhil 등<sup>(6)</sup>이 지적한 바와 같이 유효점성항의 존재는 필수적이라 할 수 있겠다.

## 6. 결 론

이상과 같은 연구결과 다음과 같은 결론을 도출할 수 있었다.

1) 선형모형에 대한 안정조건은 ADI 방법이 무조건 안정하지만 정확성의 보장을 위해서는  $Cr < 5$  이어야 하고 Hansen 방법과 Heaps 방법이  $Cr < 1.0 - 1.2$ , Richtmyer 방법이  $Cr < 1.8 - 2.0$ , MacCormack 방법이  $Cr < 0.4 - 0.5$ 로 ADI 방법이 가장 우수하며 2단계 방법인 Richtmyer 방법이 1단계 방법의 2배 정도인데 비해 2단계 방법의 일종인 MacCormack 방법은 1단계 방법의 절반도 채 안되는 정도로 매우 열등한 안정조건을 갖고 있다.

2) 각 방법의 CPU시간은 ADI 방법에 대한 비율이 ADI : Hansen : Heaps : Richtmyer : MacCormack = 1.00 : 0.14 : 0.18 : 0.71 : 0.75 정도로 Hansen 방법과 Heaps 방법이 비교적 경제적이며 격자수가 많아질수록 행렬식의 계산을 포함한 ADI 방법이 양해법에 비해 더욱 더 비경제적일 것이다.

3) 선형모형의 수치실험 결과 수면변위는 ADI 방법이 가장 정확하게 계산해 낸 반면 유속의 계산은 다소 부정확하였고 나머지 양해법은 서로 비슷하였다.

4) 유속이 주된 관심사일 경우 Cr수가 1보다 상당히 작게 시간 격자간격과 공간격자간격을 선택하는 것은 비효율적일 수 있다.

5) 적용된 차분법 모두 질량 보존법칙을 잘 만족한다.

6) 비선형모형의 수치실험 결과 ADI 방법이 다른 방법에 비해 순환현상을 가장 잘 보여주고 있다.

7) 이송항이 없는 경우에도 ADI 방법에서는 순환현상을 볼 수 있는 반면 유효점성항이 없으면 양해법은 매우 불안정하게 되고 ADI 방법도 불만족스런 결과가 나타나는 등 천수방정식의 수치해석시 유효점성항은 매우 중요한 역할을 한다.

## 감사의 말

본 논문은 1986년도 문교부 자유과제 2차년도 학술연구조성비에 의한 연구결과로서 재정적 지원에 사의를 표합니다.

## 參 考 文 獻

1. 박창인, 박승우, "수심평균 2차원 수학적 모형(TIFS)을 이용한 금강 하구 및 연해의 조석 계산", 한국농공학회지, 제28권 제1호, 1986년 3월
2. 서승원, 박정용, 윤태훈, "흐름단면의 급변화에 의한 순환의 수치모형", 대한토목학회 논문집, 제3권 제4호, 1983년 12월
3. 양운모, 이문찬, "하구역에 설치된 이안제에 의한 하구지형변화에 관한 연구", 한국수문학회지, 제18권 제4호, 1985년 12월
4. 윤세의, 이종태, 이원환, "만곡수로에서 2차원흐름 해석", 대한토목학회 논문집, 제6권 제1호, 1986년 3월
5. 이상호, 이길성, "St. Venant식에 관한 유한차분법의 비교분석", 한국수문학회지, 제21권 제2호, 1988년 6월
6. 이종태, 이원환, "항내의 장주기파 해석을 위한 2차원 부정류의 수학적 모형", 대한토목학회 논문집, 제3권 제1호, 1983년 3월
7. 조용준, 차영기, 윤태훈, "개수로의 단면축소로 인한 수면변화", 한국수문학회지, 제18권 제4호, 1985년 12월
8. 한진연, 김정옥, "수치모델에 의한 만내의 2차원 동수역학 해석", 한국수문학회지, 제15권 제4호, 1985년 12월
9. Abbott, M.B., "Computational Hydraulics : A Short Pathology", *J. of Hydraulic Research*, Vol.14, No. 4, 1976

10. Abbott, M. B., *Computational Hydraulics*, Pitman, 1980
11. Anderson, D. A., J. C. Tannehill and R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, 1984
12. Benque, J. P. and J. A. Cunge, "New Method for Tidal Current Computation", *Proc. of ASCE*, Vol. 108, No. WW3, Aug. 1982
13. Cheng, R.T. and V. Casulli, "On Lagrangian Residual Currents with Applications in South San Francisco Bay, California", *W. R. R.*, Vol. 18, No.6, Dec. 1982
14. Choi, B.H., "A Tide and Surge Computation for Kyonggi Bay", *Bulletin of KORDI*, Vol. 3, No. 1, 1981
15. Dronkers, J. J., *Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters*, Inter-Science Publishers, N. Y., 1964
16. Falconer, R. A., "Numerical Modeling of Tidal Circulation in Harbors", *Proc. of ASCE*, Vol. 106, WW1, Feb. 1980
17. Grubert, J. P., "Numerical Computation of Two-Dimensional Flows", *Proc. of ASCE*, Vol. 102, No. WW1, Feb. 1976
18. Hinwood, J. B. and I. G. Wallis, "Review of Models of Tidal Waters", *Proc. of ASCE*, Vol. 101, No. HY11, Nov. 1975
19. Lam, D. C. L., C. R. Murthy and R. B. Simpson, *Effluent Transport and Diffusion Models for the Coastal Zone*, Springer-Verlag, pp. 91-96. 1984
20. Lynch, D. R. and W. G. Gray, "Analytic Solutions for Computer Flow Model Testing", *Proc. of ASCE*, Vol. 104, No. HY10, Oct. 1978
21. Ponce, V. M. and S. B. Yabusaki, "Modeling Circulation in Depth-Averaged Flow", *Proc. of ASCE*, Vol. 107, No. HY11, Nov. 1981
22. Praagman, N., "A Comparison of Discretization Methods for the Shallow Water Equations", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 1982
23. Richtmyer, R. D. and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problem*, Interscience Publishers, 1967
24. Sobey, R. J., "Finite Difference Schemes Compared For Wave-Deformation Characteristics etc.", *Tech. Memor. No. 32*, US Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Washington, DC, 1970
25. Vreugdenhil, C. B. and J. H. A. Wjibenga, "Computation of Flow Patterns in Rivers", *Proc. of ASCE*, Vol. 108, No. HY11, Nov. 1982
26. Weare, T. J., "Instability in Tidal Flow Computational Schemes", *Proc. of ASCE*, Vol. 102, No. HY5, May 1976
27. Yeh, H. H., W. - S. Chu and O. Dahlberg, "Numerical Modeling of Separation Eddies in Shallow Water", *W. R. R.*, Vol. 24, No. 4, Apr. 1988

(接受：1988. 12. 8)