

순수 휨모멘트를 받는 아치의 횡좌굴에 관한 연구

A Study on Lateral Torsional Buckling of Arch Subjected to Pure Bending Moment

김 생 빈* · 유 재 홍** · 이 성 철***
 Kim, Saeng Bin · Yoo, Chai Hong · Lee, Sung Chul

Abstract

A system of coupled differential equations governing the lateral-torsional buckling of thin-walled arches subjected to pure bending moment is presented.

The governing differential equations are derived using incremental form of principle of virtual displacement based on updated Lagrangian procedure.

The differential equations are solved for the critical end moments of arches with I section, and then comparative studies are made with existing solutions

要 旨

박판으로 이루어진 아치가 양단에서 휨모멘트를 받을때 발생하는 횡좌굴에 대한 지배 미분방정식이 제시되었다. 미분방정식은 updated Lagrangian 방법에 따른 증분형태의 가상일의 원리에 의하여 유도되었다. 본 연구에서 구한 임계모멘트 값들을 다른 결과들과 비교함으로써 본 연구의 타당성을 검토하여 보았다.

1. 서 론

여로부터 아치형식은 미관상 아름다움 때문에 많은 구조물(교량, 지붕구조물 등)에 응용되어 왔다. 최근에 들어와서는 재료의 효용을 높이고 또한 구조물의 현대적 감각을 살리기 위해 구조물들을 가늘고 길게 설계하는 경향이 두드러지고 있다. 이와 같은 새장비가 큰 아치를 설계할때 가장 중요한 고려사항중 하나가 안정성 즉, "아치에서 발생하는 최대응력이 허용설계응력에 도달하기 전에

좌굴에 의한 파괴가 일어날 가능성이 있는가"를 검사하는 일이다. 왜냐 하면 기둥의 좌굴파괴와 마찬가지로 아치구조물의 좌굴파괴가 예고없이 급작스럽게 일어남으로 인하여 많은 인명과 재산피해를 초래할우려가 있기 때문이다.

1960년대 초반부터 Vlasov와 Timoshenko에 의해서 아치의 안정성(stability)에 관한 연구가 시작된 이후로, 현재까지 아치나 일반적인 곡선부재의 선형탄성좌굴에 관한 여러 편의 연구논문들이 발표되어 왔다. 이중에서, Vlasov(1961)는 직선부재의 일반화된 변형(the generalized strain)에 곡률($1/R$)을 포함하는 항을 추가시켜 곡선부재의 일반화된 변형을 얻은 다음, 이들을 직선부재의 방정식에

*정회원 · 동국대학교 공과대학 교수, 토목공학과

**미국 Auburn University교수

***정회원 · 동국대학교 공과대학 조교수, 토목공학과

단순히 대입하므로써 곡선부재의 좌굴에 관한 지배 미분방정식을 얻었다.

Timoshenko와 Gere (1961)는 부재의 뒹강성(warping rigidity)을 무시하고 Vlasov와 같은 방법으로 방정식을 유도했다. 따라서, 뒹 상수(warping constant) L_w 가 0인 곡선부재의 경우, Vlasov와 Timoshenko의 결과는 일치한다.

Yoo (1983)는 Vlasov가 구한 곡선부재의 일반화된 변형을 직선부재의 에너지함수에 대입한 다음 변분원리(variational principle)를 이용하여 지배 미분방정식을 얻었고, 이 방정식을 유한요소법을 사용하여 풀었다.

Papangelis와 Trahair (1986)는 곡선부재의 축 변형도와 전단변형도에 관한 비선형 방정식을 구해서, 이를 Langharr(1962)의 곡선부재에 관한 에너지 functional에 대입하므로써 방정식을 유도했다. 이들은 Vlasov와 Yoo는 직선부재에 관련된 식들을 이용을 했지만, 자기들은 전혀 직선부재에 관한 식들을 참조하지 않았기 때문에 ("no reference is made to straight beam equations") 그들의 결과가 옳다고 주장하고 있다.

한편, Yang과 Kuo(1986)는 원통 좌표계에 의거한 Green-Lagrange strains을 가지고 Lagrangian 방법에 따른 가상변위의 원리에 의하여 방정식을 유도했다. Yang과 Kuo는 이 논문에서 곡률의 효과가 Green-Lagrange strains에 정확히 반영이 되었기 때문에 그들의 결과가 Vlasov나 Yoo의 결과에 비해 가장 합리적이라고 주장을 하고 있지만, 미분방정식을 유도하는 과정에서 발생한 오류들로 인하여 신뢰성이 없다고 판단된다⁽¹²⁾.

위에서 언급한 연구들의 결과를 비교해 보면 상대적으로 정도의 좌굴의 형태(buckling mode)에 따라 다름을 알 수 있다. 아치의 여러 좌굴형태 중에서, 단순지지 아치가 양단에서 휨모멘트를 받을 때 발생하는 횡좌굴(lateral-torsional-buckling)의 경우 임계모멘트(critical moment) 값들이 논문마다 상당한 차이를 보이고 있는 실정이다. 특히 내각이 180°인 단순지지 아치의 경우, out-of-plane에서의 회전(z방향)에 대한 기하학적인 불안정성으로 인하여 임계모멘트값이 모멘트의 방향(그림 1. 참조)에 관계없이 0이 되어야 함에도 불구하고 (-) 모멘트의 경우 아주 큰 임계모멘트값을 얻은

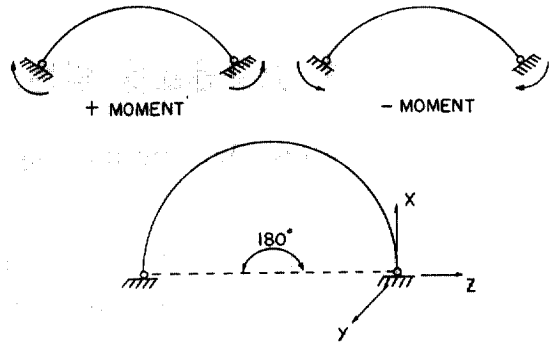


그림 1. 순수 휨을 받는 아치

논문들도 있는 형편이다.

본 논문에서는 박판으로 이루어진 단순지지 아치가 양단에서 휨모멘트를 받을 때 발생하는 횡좌굴에 대한 지배 미분방정식을 updated-Lagrangian 방법에 따른 증분형태의 가상일의 원리를 이용하여 유도하였다. 그리고 본 논문에서 구한 임계모멘트를 다른 결과들과 비교 검토하여 보았다.

2. 지배 미분방정식의 유도

2.1 가상변위의 원리

3차원 연속체의 평형방정식을 updated Lagrangian 방법에 따른 증분형태의 가상변위의 원리에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int_{V^n} \Delta \tau_{ij} \delta \Delta e_{ij} dV + \int_{V^n} \tau_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} dV = \int_A T_i \delta \Delta U_i dA + \int_V B_i \delta \Delta U_i dV - \int_V f_{ij} \delta \Delta e_{ij} dV \quad (1)$$

여기서, 첨자 n 은 n 번째 하중단계임을 뜻한다.

그리고

Δe_{ij} ; the incremental linear Green-Lagrange Strain tensor

$\Delta \eta_{ij}$; the incremental nonlinear Green-Lagrange Strain tensor

τ_{ij} ; Cauchy(true) Stress tensor

ΔU_i ; the incremental displacement vector

T_i ; the surface traction vector

B_i ; the body force vector

본 연구에서는 아치의 좌굴해석을 위해 다음과

같은 가정을 두었다.

1. 재료는 Hooke의 법칙을 따른다.
2. 아치는 보존력계 (conservative force system) 을 받는다.
3. 구조물내의 변위와 응력은 외력에 비례한다.
4. 좌굴이전의 변형 (pre-buckling deformations) 은 무시한다.

이와 같은 가정하에 좌굴해석을 할때 이를 선형 좌굴해석 (linear buckling analysis) 또는 초기 안정해석 (initial stability analysis) 라 한다. 선형 좌굴해석 이론에 따른 임계점 (bifurcation point) 에서의 평형방정식은 식 (1)로부터 불평형하중에 해당하는 오른쪽 항을 0 으로 놓음으로써 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_V \Delta \tau_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \tau_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} dV = 0 \quad (2)$$

여기서, V 는 변형전의 체적이며 τ_{ij} 는 좌굴이 일어나기 직전의 응력을 뜻한다.

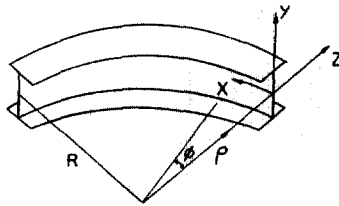


그림 2. I 형 아치

그림 2에 보인 바와 같은 박판으로 이루어진 곡선부재의 경우, 변형도 $\epsilon_y = e_y + \eta_y$, $\epsilon_z = e_z + \eta_z$ 및 $\epsilon_{yz} = e_{yz} + \eta_{yz}$ 는 다른 변형도 (ϵ_x , ϵ_{xy} , ϵ_{xz})에 비해 작아서 무시할 수 있다. 따라서 식 (2)를 아래와 같이 풀어 쓸 수 있다.

$$\int_V E e_x \delta e_x dV + \int_V G (r_{xy} \delta r_{xy} + r_{xz} \delta r_{xz}) dV + \int_V \sigma_x \delta \eta_x dV + \int_V 2(\tau_{xy} \delta \eta_{xy} + \tau_{xz} \delta \eta_{xz}) dV = 0 \quad (3)$$

여기서, E 는 탄성계수, G 는 전단 탄성계수이고 $r_{xy} = 2e_{xy}$, $r_{xz} = 2e_{xz}$ 이다. 그리고 증분을 뜻하는 Δ 는 생략되었다.

본 논문에서는 아치가 양단에서 휨모멘트만을 받을때 일어나는 횡좌굴만을 고려하므로, 좌굴이 일어나기 직전 아치 내부에 존재하는 응력은 σ_x 뿐이다. 따라서 식 (3)에서 전단응력 τ_{xy} 와 τ_{xz} 를 0으

로 놓으면 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\int_V E e_x \delta e_x dV + \int_V G (r_{xy} \delta r_{xy} + r_{xz} \delta r_{xz}) dV + \int_V \sigma_x \delta \eta_x dV = 0 \quad (4)$$

2. 2 변위와 변형도와의 관계

그림 2와 같은 원통 좌표계 (cylinder coordinate system) 에서 선형 및 비선형 변형도는 다음과 같이 주어진다⁽⁷⁾.

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\rho \partial \phi} + \frac{w}{\rho} \\ r_{xy} = 2e_{xy} &= \frac{2v}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ r_{xz} = 2e_{xz} &= \left(\frac{\partial w}{\rho \partial \phi} + \frac{u}{\rho} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \eta_x &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\rho \partial \phi} + \frac{w}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\rho \partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\rho \partial \phi} - \frac{u}{\rho} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, u, v, w 는 x, y, z 방향으로의 변위이고, ρ 는 곡률중심으로부터 임의점까지의 직선거리이다. 그런데 $\phi = \frac{x}{R}$, $\rho = R+z$ 이므로, 위 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} e_x &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right) \frac{R}{R+z} \\ r_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{R}{R+z} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \\ r_{xz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R} \right) \left(\frac{R}{R+z} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \eta_x &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{R}{R+z} \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

변위 u, v, w 는 단면 자체의 변형을 무시할 경우 다음과 같이 주어진다⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned} u &= u_0 - y v_0' - z \left(w_0' - \frac{u_0}{R} \right) - \omega \left(\theta' + \frac{v_0'}{R} \right) \\ v &= v_0 - z \theta \\ \omega &= \omega_0 + y \theta \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, u_0, v_0, w_0 는 전단 중심에서의 변위이고 '은 x 에 관한 미분을 뜻하며 ω 는 normalized sectorial area 이다. 그림 2에서 보인 I 형 단면의 경우 ω 는 다음과 같다.

$$\omega = yz \quad (8)$$

2.3 지배 미분 방정식

식 (7)을 (6)에 대입하면 다음과 같은 선형 변형도를 얻는다.

$$e_x = \left[\left(u_0' + \frac{w_0}{R} \right) - y \left(v_0'' - \frac{\theta}{R} \right) - z \left(w_0'' - \frac{u_0'}{R} \right) - \omega \left(\theta'' + \frac{v_0''}{R} \right) \right] \left(\frac{R}{R+z} \right) \quad (9.1)$$

$$r_{xy} = \left(\frac{Rz}{R+z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \left(\theta' + \frac{v_0'}{R} \right) \quad (9.2)$$

$$r_{xz} = \left[\left(y + \frac{\omega}{R} \right) \left(\frac{R}{R+z} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \left(\theta' + \frac{v_0'}{R} \right) \quad (9.3)$$

식 (9.1)을 식 (4)의 첫째 항에 대입하면

$$\int_V E e_x \delta e_x dV = \frac{1}{2} E \int_0^L \delta \int_A \left[\left(u_0' + \frac{w_0}{R} \right) - y \left(v_0'' - \frac{\theta}{R} \right) - z \left(w_0'' - \frac{u_0'}{R} \right) - \omega \left[\left(\theta'' + \frac{v_0''}{R} \right)^2 \left(\frac{R}{R+z} \right)^2 \right] dA dx \quad (10)$$

R 이 $|z|$ 에 비해 매우 클 경우, $\left(\frac{R}{R+z} \right)^2$ 은 binomial series를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{R+z} \right)^2 &= \left(\frac{1}{1 + \frac{z}{R}} \right)^2 \\ &= 1 - 2 \frac{z}{R} + 3 \left(\frac{z}{R} \right)^2 - 4 \left(\frac{z}{R} \right)^3 + \dots \\ &\cong 1 - 2 \frac{z}{R} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)을 (10)에 대입하고 면적적분을 하면,

$$\begin{aligned} \int_V E e_x \delta e_x dV &= \frac{1}{2} E \int_0^L \delta \left[A \left(u_0' + \frac{w_0}{R} \right)^2 + I_x \left(v_0'' - \frac{\theta}{R} \right)^2 \right. \\ &+ 4 \frac{I_x}{R} \left(u_0' + \frac{w_0}{R} \right) \left(w_0'' - \frac{u_0'}{R} \right) + I_y \left(w_0'' - \frac{u_0'}{R} \right)^2 \\ &\left. + I_\omega \left(\theta'' + \frac{v_0''}{R} \right)^2 - 4 \frac{I_\omega}{R} \left(v_0'' - \frac{\theta}{R} \right) \left(\theta'' + \frac{v_0''}{R} \right) \right] dx \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA \\ I_x &= \int_A y^2 dA \\ I_y &= \int_A z^2 dA \\ I_\omega &= \int_A \omega^2 dA \text{ 이고,} \end{aligned}$$

y, z 는 단면의 主軸 (principal coordinates) 이므로 다음과 같은 성질이 이용되었다.

$$\begin{aligned} \int_A y dA &= \int_A z dA = \int_A \omega dA = 0 \\ \int_A y z dA &= \int_A y \omega dA = \int_A z \omega dA = \int_A z^2 \omega dA = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

식 (9.2)와 (9.3)을 식 (4)의 두번째 항에 대입하면,

$$\begin{aligned} \int_V G (r_{xy} \delta r_{xy} + r_{xz} \delta r_{xz}) dV &= \frac{1}{2} \int_0^L G J \delta \left(\theta + \frac{v_0'}{R} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (14)$$

여기서

$$J = \int_A \left[\left(\frac{Rz}{R+z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\left(y + \frac{\omega}{R} \right) \left(\frac{R}{R+z} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] dA \text{ 이다.}$$

비선형변형도 η_x 는 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\omega}{R} \right)^2$ 항을 무시할 경우 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{R}{R+z} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(v_0' - z \theta' \right)^2 + \left(\left(1 + \frac{z}{R} \right) \left(w_0' - \frac{u_0}{R} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(y + \frac{\omega}{R} \right) \left(\theta' + \frac{v_0'}{R} \right) \right)^2 \right] \left(1 - 2 \frac{z}{R} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

본 연구에서는 아치가 y 축 방향의 힘 모멘트 M , 만 받을 경우를 고려한다. 그리고 곡률반경 R 이 보의 깊이 d 보다 매우 클 경우 z 축 방향의 수직응력 σ_x 는 다음의 직선보 공식을 사용할 수 있다.

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} \quad (16)$$

참고문헌 9.에서는 $R=5d$ 일 경우 식 (16)에서 얻은 값과 탄성론으로부터 구한 값의 차가 약 7% 임을 보여 주고 있다. 본 논문 수치계산 예에서 다를 I형 단면을 갖는 아치의 경우 R/d 의 최소값 (내각이 180° 일 때)은 각각 128 및 8.5이다. 따라서 식 (16)을 사용할 때 생기는 오차는 무시할 정도로 적다고 생각된다.

식 (15), (16)을 식 (4)의 마지막 항에 대입하고 식 (13)의 성질을 이용하면,

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_x \delta \eta_x dV &= \frac{1}{2} \int_0^L \delta \int_A \frac{M_y \cdot z}{I_y} \left[\left(v_0'^2 - 2z v_0' \theta' + z^2 \theta'^2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + \frac{2z}{R} + \frac{z^2}{R^2}\right) \left(w_0' - \frac{u_0'}{R}\right)^2 \\
& + 2 \left(y + \frac{\omega}{R} + \frac{zy}{R} + \frac{zw}{R^2}\right) \left(w_0' - \frac{u_0'}{R}\right) \left(\theta' + \frac{v_0'}{R}\right) \\
& + \left(y^2 + \frac{2y\omega}{R} + \frac{\omega^2}{R^2}\right) \left(\theta' + \frac{v_0'}{R}\right)^2 \left(1 - 2\frac{z}{R}\right) dA dx \\
& = \frac{1}{2} \int_0^L \delta \left(-\frac{2}{R} M_y v_0'^2 - 2M_y v_0' \theta' \right. \\
& \left. - \frac{2}{R} \frac{K_z}{I_y} M_y \theta'^2 \right) dx \quad (17)
\end{aligned}$$

여기서 $K_z = \int_A z^2 dA$ 이고, $\frac{1}{R^3}$ 을 갖는 항은 무시되었다.

식 (12), (14) 및 (17) 을 식 (4) 에 대입하고 변위 v_0 및 θ 에 관해 1차 변분을 취하며 지배 미분 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
& EI_z \left(v_0'''' - \frac{\theta''}{R} \right) + EI_\omega \frac{1}{R} \left(\theta'''' + \frac{v_0''''}{R} \right) \\
& - EI_\omega \left(\frac{4}{R^2} v_0'''' + \frac{2}{R} \left(\theta'''' - \frac{\theta''}{R^2} \right) \right) \\
& - GJ \frac{1}{R} \left(\theta'' + \frac{v_0''}{R} \right) + \frac{2}{R} M_y v_0'' + M_y \theta'' = 0 \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_z \frac{1}{R} \left(v_0'' - \frac{\theta''}{R} \right) + EI_\omega \left(\theta'''' + \frac{v_0''''}{R} \right) \\
& - EI_\omega \left(\frac{2}{R} v_0'''' - \frac{4}{R^2} \theta'' - \frac{2}{R^3} v_0'' \right) \\
& - GJ \left(\theta'' + \frac{v_0''}{R} \right) + M_y v_0'' + \frac{2}{R} \frac{K_E}{I_y} M_y \theta'' = 0 \quad (19)
\end{aligned}$$

$v_0 = A \sin \lambda x$, $\theta = B \sin \lambda x$, $\lambda = \frac{\pi}{L}$ 이라 놓고

식 (18), (19) 에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
K_{11} &= EI_z \lambda^4 - 3EI_\omega \frac{\lambda^4}{R^2} + GJ \frac{\lambda^2}{R^2} - 2M_y \frac{\lambda^2}{R} \\
K_{12} &= K_{21} = EI_z \frac{\lambda^2}{R} - EI_\omega \left(\frac{\lambda^4}{R} + \frac{2}{R^3} \lambda^2 \right) + GJ \frac{\lambda^2}{R} - M_y \lambda^2 \\
K_{22} &= EI_z \frac{1}{R^2} + EI_\omega \left(\lambda^4 - \frac{4}{R^2} \lambda^2 \right) + GJ \lambda^2 - \frac{2K_E}{I_y} M_y \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

$[K]_{22}$ 의 行列式 (determinant) 을 0으로 놓고 M_y 에 관해 풀면 임계 좌굴모멘트 M_c 을 얻는다.

$R = \infty$ 인 직선보의 경우 위의 Matrix 방정식은 다음과 같이 간단히 된다.

$$\begin{bmatrix} EI_z \lambda^4 & -M_y \lambda^2 \\ -M_y \lambda^2 & EI_\omega \lambda^4 + GJ \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

윗 식을 풀면 순수 휨을 받는 직선보의 휨 좌굴에 대한 임계 모멘트를 얻는다.

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z \left(EI_\omega \frac{\pi^2}{L^2} + GJ \right)} \quad (22)$$

이 결과는 참고문헌 (2)와 일치함을 알 수 있다.

3. 수치 계산의 예

본 연구에서는 다음과 같은 성질을 갖는 I 형 아치를 해석 하였다.

(1) $I_x = 11363 \text{cm}^4$	$I_y = 3871 \text{cm}^4$
$L_\omega = 55586 \text{cm}^6$	$J = 59 \text{cm}^4$
$E = 2043186 \text{kg/cm}^2$	$L = 1025 \text{cm}$
$G = 789092 \text{kg/cm}^2$	
(2) $I_x = 88.78 \text{cm}^4$	$I_y = 22.19 \text{cm}^4$
$L_\omega = 5156 \text{cm}^6$	$J = 1.55 \text{cm}^4$
$L = 406.4 \text{cm}$	

그림 3~6에서 본 해석의 결과와 다른 값들이 비교되어 있다. 그림 3, 4에서는 M_{cr} 값이 도시되어 있고, 그림 5, 6에서는 M_{cr} 값과 직선보의 M_{cr} 값이 비 ($M_{cr} \text{ cv} / M_{cr} \text{ st}$) 가 도시되어 있다. 앞에서 이미

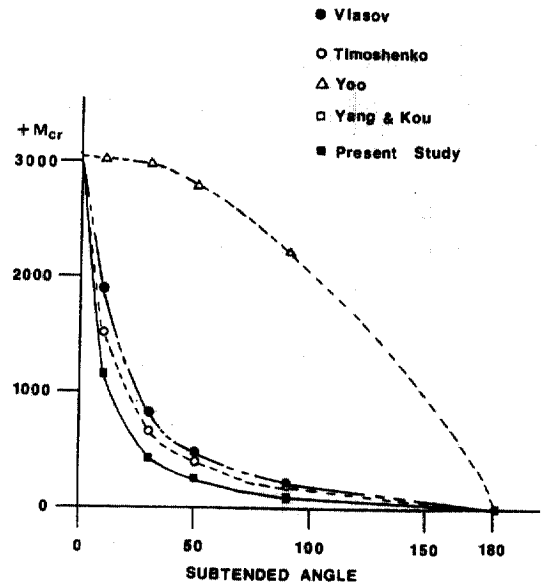


그림 3. 임계 모멘트(正 M_{cr}): (1) 단면

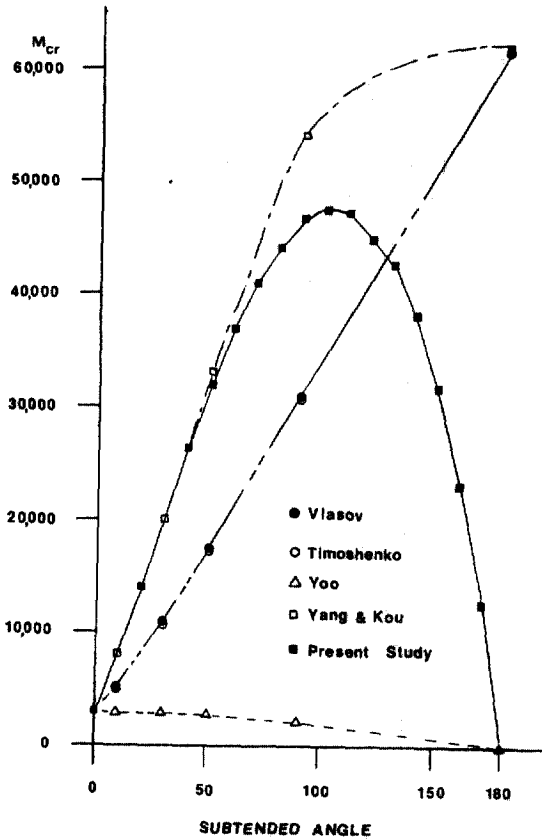


그림 4. 임계 모멘트(負 M_{cr}): (1) 단면

언급한 단순지지 아치는 z 축방향의 회전에 대한 구속이 없기 때문에 기하학적으로 불안정(geometrically unstable)하다. 따라서 이 경우 M_{cr} 은 휨모멘트의 방향(正 또는 負)에 관계없이 항상 0이 되어야 한다.

正모멘트가 작용할 경우 비록 모든 결과가 내각이 0° (직선보)일때와 180° ($M_{cr}=0$)일때 일치하였지만, 중간영역에서는 적지 않은 차이를 보임을 알 수 있다. 負모멘트가 작용할 경우 본 연구와 Yoo의 논문⁽⁴⁾만 180° 에서 $M_{cr}=0$ 을 얻었다. 그러나 두 결과들이 중간영역에서는 서로 많은 차이를 나타내고 있다.

4. 결 론

박판으로 이루어진 아치가 양단에서 휨모멘트를 받을때 일어날 수 있는 횡좌굴에 대한 지배 미분방정식을 updated Lagrangian 방법에 따른 중분

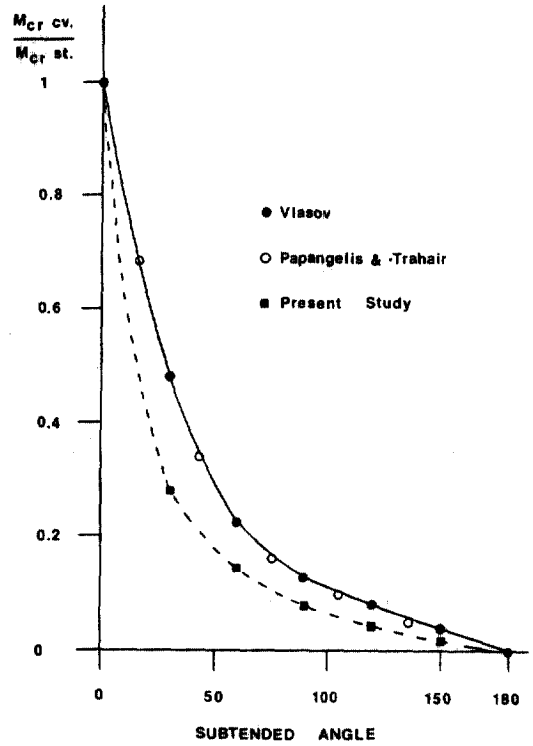


그림 5. 임계 모멘트(正 M_{cr}): (2) 단면

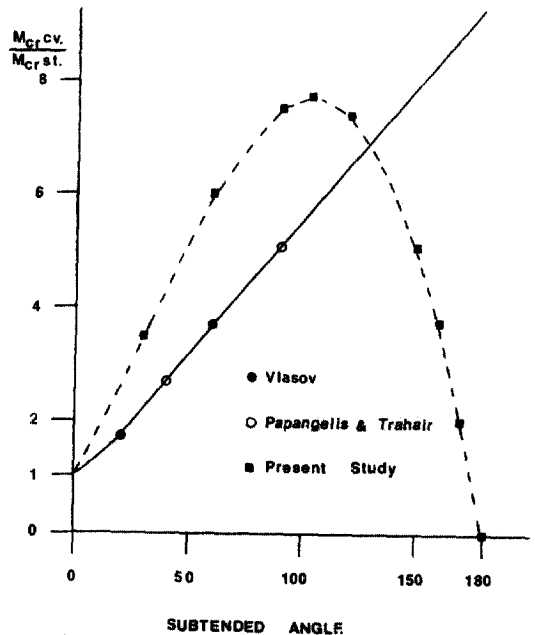


그림 6. 임계 모멘트(負 M_{cr}): (2) 단면

형태의 가상일의 원리에 의하여 유도하였다. 본 연구에서 구한 임계모멘트(M_{cr})를 다른 값들과 비교해본 결과 본 연구와 Yoo⁽⁴⁾ 만이 내각이 180° 기하학적 불안정)일때 모멘트의 방향에 관계없이 $M_{cr}=0$ 을 얻음을 알 수 있다. 하지만, 0° 와 180° 사이에는 Yoo 와 본 연구의 결과가 많은 차이를 보여주고 있다. 비록 중간영역에서 본 연구의 결과가 Yoo의 결과보다 그 밖의 다른 값들에 더 가깝다고는 하지만, 아직 본 연구결과가 Yoo의 결과에 비해 더 타당하다고 말하기는 아직 이르다. 왜냐 하면 다른 연구결과(본 연구와 Yoo를 제외한)들은 180° 에서 영이 아닌 M_{cr} 을 얻었으므로 중간 영역에서의 값들이 비교의 대상이 될 만큼 타당한지의 여부를 알 수 없기 때문이다. 따라서 어떤 결과가 더 정확한지를 판단하기 위해서는 유한요소법과 같은 수치해석적인 방법이나 실험이 반드시 수반되어야 한다고 생각된다.

감사의 말씀

본 연구는 1988년도 문교부 학술연구 조성비에서 지원 받았기에 이에 감사의 말씀을 드립니다.

참 고 문 헌

1. Bleich, F., "Buckling Strength of Metal Structures," McGraw-Hill Co., New York, 1964
2. Timoshenko, S. and Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability," 2nd Ed., McGraw-Hill Co., New York, 1961
3. Vlasov, V.Z., "Thin Walled Elastic Beams," 2nd Ed., National Science Foundation, Washington, D.C. 1961.

4. Yoo, C.H., "Flexural-Torsional Stability of Curved Beams," *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 108, No. 6, Dec. 1982, pp 1351-1369.
5. Yoo, C.H. and Pfeiffer, P.A. "Elastic Stability of Curved Members," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 109, No. 12, Dec. 1983, pp 2922-2940.
6. Yoo, C. H. and Pfeiffer, P. A., "Buckling of Curved Beams with In-plane Deformation", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 100, No. 2, Feb. 1984., pp 291-300.
7. Yang, Y. B. and Kuo, S. R. "Static Stability of Curved Thin-Walled Beams", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 112, No. 8, Aug. 1986, pp 821-841.
8. Papangelis, J. P. and Trahair, N. S., "Flexural-Torsional Buckling of Arches", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 112, No. 11, Nov. 1986, pp 2494-2511.
9. Boresi, Sidebottom, Seely and Smith "Advanced Mechanics of Materials", 3rd Ed., Wiley Co., 1978.
10. Bathe, K. L., Ramm, E. and Wilson, E. L., "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamics Analysis", *Int. J. Num. Meths. Eng.*, Vol. 9, pp 353-386, 1975.
11. Langhaar, H. L., "Energy Methods in Applied Mechanics", John Wiley & Sons, Inc., NEW YORK, N. Y., 1962
12. S. Rajasekaran, T. Sundararajan, and K. Srinivasa Rao, Discussion of "Static Stability of Curved Thin Walled Beams" by Yang, Y. B and Kuo, S. R. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* Vol. 114, No. 5, 1988.

(接受: 1989. 3. 16)