

불규칙한 路面을 주행하는 이동하중에 의한 연속교의 동적거동에 관한 이론 및 실험적 연구

Theoretical and Experimental Study on the Dynamic Behavior of Continuous Bridge having Irregular Surface under Moving Load

장 승 필* · 임 성 순** · 조 서 경***
Chang, Sung Pil · Yhim, Sung Soon · Jo, Sir Kyung

Abstract

In this study, the dynamic behavior of a continuous bridge under moving load is studied considering roughness of the road surface.

Vehicle model includes the spring effects of axes, and due to these effects, equations of motions for the vehicle and bridge are derived in coupled form. And then iteration method is used to solve the equations.

In experimental study a bridge model is constructed considering the similarity rule in order that the model exhibits dynamic behavior similar to that of prototype.

Three types of roughness such as uneven random roughness, uplift on the approach and piece-wise constant roughness are used to describe road roughness.

Through the numerical analysis and experiments, the effects of surface roughness, sprung mass, and velocity on the dynamic behavior of the bridge are examined.

요 지

본 연구에서는 유한요소법과 실험적인 방법으로 이동하중을 받는 불규칙한 노면을 갖는 연속교의 동적거동을 연구하였다.

차량하중은 차축의 스프링효과를 포함하였으며 이로 인해 교량과 차량의 운동방정식은 결합된 미분방정식으로 표현되었고 이를 반복시산법으로 해결하였다.

실험적인 방법에서는 상사율을 고려하여 원형과 모형에서 동일한 동적거동이 나타나도록 모델을 제작하였고 이러한 교량 불규칙조건면, 진입부 단차면, 연속 단차면을 주어 실험하였다.

*정회원 · 서울대학교 공과대학 교수 토목공학과

**정회원 · 단국대학교 공과대학 강사 토목공학과

***정회원 · 서울대학교 대학원 박사과정 토목공학과

속도의 분포와 조도면의 양상 및 차량의 진동에 따른 교량의 동적거동을 이론 및 실험적인 방법으로 비교, 분석하였다.

1. 서 론

운송수단의 대형화와 교통량의 증가추세는 교량의 진동문제를 심각하게 야기시키며 특히, 노면의 파손, 시공의 불량, 진입부의 침하 등으로 생기는 조도나 단차 등의 불규칙한 노면현상은 교량을 주행하는 차량의 동적하중을 증가시키는 중요한 요인이 된다.

Biggs⁽¹⁾, Velesztos와 Huang⁽²⁾ 등에 의해 이동 하중문제에 대한 기본 연구들이 정립된 이래 여러가지 측면에서 연구가 진행되어 왔다. 1962년이래 ASSHO의 ROAD TEST⁽³⁾에서는 이동하중에 관한 전반적인 실험이 행하여져 왔다.

국내에서는 근래에 들어 이동하중에 관한 연구가 활발히 진행되고 있으며 특히 노면의 불규칙성을 고려하는 경우까지의 연구^(4~6)가 진행되어 왔다. 그러나 아직 프로그램의 일반화 및 실험을 병용한 연구는 미흡한 상태이다.

본 연구에서는, 노면조도에 의한 진동의 효과를 규명하기 위해 이론적인 해석방법을 정립하고 모형을 통한 실험을 하여 그 결과를 비교, 분석함으로써 노면조도가 교량의 진동에 미치는 영향을 규명하고자 한다.

실제 교량에서의 동적거동과 동일한 효과를 나타내기 위하여 상사율⁽⁷⁾을 적용한 실험모델을 제작하였으며 총 경간이 100m인 3경간 연속교를 원형으로 하여 1/10로 축소된 모형을 선택하였다.

노면의 조도는 고속도로 교량의 노면 조도에 관한 실측자료를 확률론적인 해석방법^(12,13)을 도입하여 구한 조도함수^(4,5)를 이용하였다.

이론적인 해석방법은 보다 다양한 교량의 형태에 적용하기 위하여 유한요소법⁽⁸⁾을 이용하였다. 특히 기존의 범용 프로그램들은 이동하중을 매 시간 증분마다 각각의 절점위에서 정의되는 시간함수⁽⁹⁾(time function)로 취급하여 하중의 이동에 따라 매 시간마다 하중을 입력시켜야 하고 이동하중은 항상 절점위에 위치하므로 통과속도가 변하면 절점수도 변해야 하는 단점을 갖고 있다. 이때 이동

하중의 자체진동에 대한 고려가 없으므로 조도의 영향을 계산하기가 불가능하다. 그러므로 본 연구에서는 이동하중을 형상함수를 이용하여 절점하중으로 환산하는 연산과정을 도입하였고 차량의 진동을 해석하기 위하여 형상함수를 이용하여 절점 변위로부터 이동하중 작용지점의 변위를 도출하였다.

이동하중은 차량의 스프링효과를 고려하여 실제로 가깝게 모델화하였고 결합된(coupled) 미분방정식을 해석하기 위하여 반복시산법에 의해 값을 수렴시켰다.

2. 이론적 연구

본 연구에서는 불규칙한 노면을 주행하는 이동하중에 의한 교량의 진동해석을 위하여 다음과 같은 가정을 하였다.

○교량은 평면 들보 요소로 이상화시켰고 모든 부재에 발생하는 응력은 탄성한계내에 있다.

○이동하중은 차축의 스프링효과도 고려된 2축 차량이며 이동하중의 속도는 일정하다.

○이동하중은 조도면을 따라 움직이며 항상 조도면과 접촉한다.

○차량 및 교량의 초기 진동은 없다.

2.1 교량의 운동방정식

일반적인 유한요소법^(8,10)에서 알 수 있듯이 평면 들보 요소는 그림 ①과 같이 요소당 4개의 자유도를 갖으며 요소 절점변위벡터 $\{d_e\}$ 는 식(1)과같다.

$$\{d_e\} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

요소내 임의의 점에 대한 변위 ω 는 요소 절점 변위벡터 $\{d_e\}$ 와 3차 Hermite Interpolation function으로 구성되는 변위형상 함수(N)로 표시되며 식(2)와 같은 매트릭스식이 성립된다.

$$\omega = [N]\{d_e\} \quad (2)$$

한 요소에 대해 Hamilton 원리를 적용하여 운동방정식⁽¹⁰⁾을 정리하면 다음과 같다.

$$[M_e]\{\ddot{d}_e\} + [C_e]\{\dot{d}_e\} + [K_e]\{d_e\} = \{F_e\} \quad (3, a)$$

여기서 $[M_e]$, $[C_e]$, $[K_e]$ 는 요소 질량, 감쇠, 강도 매트릭스이며 $\{F_e\}$ 는 요소 절점하중벡터, $\{d_e\}$, $\{\dot{d}_e\}$, $\{\ddot{d}_e\}$ 는 각각 요소 절점변위, 속도, 가속도 벡터를 나타내며 $(\dot{\quad})$, $(\ddot{\quad})$ 는 각각 시간에 대한 1차, 2차 미분을 의미한다.

전체 교량의 요소에 대하여 조합하고 전체 교량 질량, 감쇠, 강도매트릭스를 각각 $[M]$, $[C]$, $[K]$ 라고 정의하고 임의의 시간 t 에서 전체 교량의 절점하중벡터를 $\{F(t)\}$, 전체 절점변위, 속도, 가속도벡터를 $\{u\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{\ddot{u}\}$ 라고 표시하면 교량의 운동방정식은 식(3. b)와 같다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (3, b)$$

특히, 본 연구에서는 이동하는 연직방향 집중하중을 받는 교량의 진동해석을 수행하기 위하여 식(4. a)와 같이 요소 절점하중벡터 $\{F_e(t)\}$ 를 임의의 시간 t 에서 i 요소에 작용하는 집중하중 $P_i(t)$ 와 변위형상매트릭스 $[N]_i$ 를 이용하여 계산하였고, 전체 절점하중벡터 $\{F(t)\}$ 는 식(4. b)와 같이 구하였다.

$$\{F_e(t)\} = P_i(t) [N]_i \quad (4, a)$$

$$\{F(t)\} = \sum_{i=1}^n \{F_e(t)\} \quad (4, b)$$

여기서, n 은 전체 요소수이며 $[N]_i$ 는 하중 $P_i(t)$ 가 작용하는 위치에서의 변위형상함수값이다. 또한 $P_i(t)$ 의 작용점에서의 교량의 연직처짐을 y_b , 속도를 \dot{y}_b , 가속도를 \ddot{y}_b 라고 하면 식(2)를 이용하여 다음의 관계식을 구할수 있다.

$$y_b = [N]_i \{d_e\}_i \quad (5, a)$$

$$\dot{y}_b = [N]_i \{\dot{d}_e\}_i \quad (5, b)$$

$$\ddot{y}_b = [N]_i \{\ddot{d}_e\}_i \quad (5, c)$$

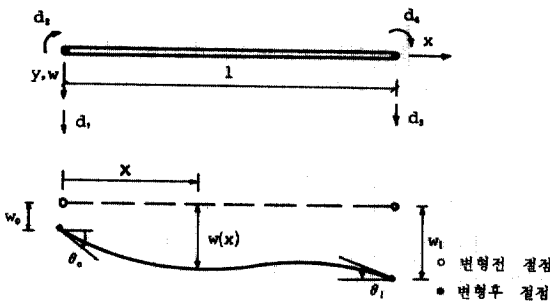


그림 1. 유한요소 및 자유도

2.2 차량의 운동방정식

차량의 모델은 그림 2와 같이 2축 차량이며 차축은 스프링과 감쇠기구로 구성되어 있다.

그림 2에서 W 는 차량의 총중량, W_1 과 W_2 는 정적 평형상태에서 전, 후륜에 작용하는 차량의 중량, k_1 과 k_2 는 차축의 스프링상수, c_1 과 c_2 는 현가계 감쇠기구의 감쇠계수, z_1 과 z_2 는 전, 후륜에서의 차축의 연직변위, C. G.는 무게중심, a_{1l} 과 a_{2l} 은 전후륜에서 C. G.까지의 거리, l 은 차량의 축간 거리, I_0 는 차량의 회전관성력, 그리고 θ_0 는 차량의 회전각을 의미한다. 특히 여기서 y_1 , y_2 는 전후륜에서의 노면의 연직변위로 이는 식(5. a)의 교량의 연직변위 y_b 과 y_{b2} 와 노면조도^(4,5) y_{11} , y_{22} 의 합으로 나타낼수 있다.

$$\{y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{b1} \\ y_{b2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

차량용 노면의 연직변위 $\{y\}$ 에 의해 지반운동을 일으키는 시스템으로 생각할 수 있으므로 차량의 운동방정식은 전, 후륜의 차축의 연직변위 z_1 과 z_2 의 2개의 자유도를 갖으며 다음과 같이 매트릭스 형태로 표현된다.

$$[M_v]\{\ddot{z}\} + [C_v]\{\dot{z}\} + [K_v]\{z\} = \{F_v\} \quad (7)$$

여기서 $[M_v]$, $[C_v]$, $[K_v]$ 는 차량의 질량, 감쇠, 강

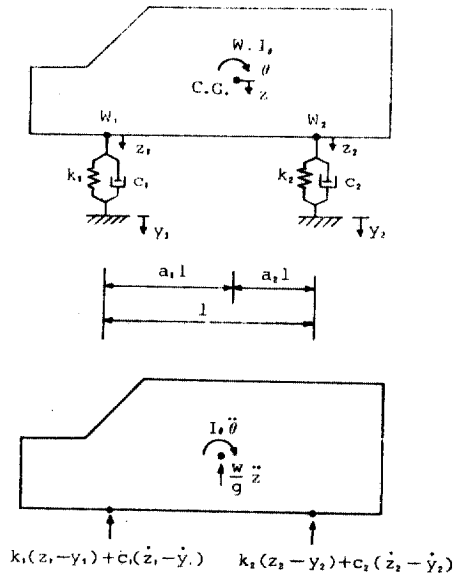


그림 2. 차량 모델

도 매트릭스를 의미하며 다음과 같이 표시된다.

$$[M_v] = \begin{bmatrix} \frac{I_0}{l} \frac{W}{g} a_{11} a_{2l} & \frac{I_0}{l} \frac{W}{g} a_1^2 l \\ -\frac{I_0}{l} \frac{W}{g} a_2^2 l & \frac{I_0}{l} \frac{W}{g} a_{11} a_{2l} \end{bmatrix} \quad (8. a)$$

$$[C_v] = \begin{bmatrix} 0 & -c_{2l} \\ c_{1l} & 0 \end{bmatrix} \quad (8. b)$$

$$[K_v] = \begin{bmatrix} 0 & -k_{2l} \\ k_{2l} & 0 \end{bmatrix} \quad (8. c)$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} k_{2l} y_2 + c_{2l} \dot{y}_2 \\ -k_{1l} y_1 - c_{1l} \dot{y}_1 \end{bmatrix} \quad (8. d)$$

$$\{z\} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (8. e)$$

전·후륜이 위치한 교량에 작용하는 연직방향 힘을 각각 P_{v1} , P_{v2} 라고 정의하면 다음과 같이 표현된다:

$$P_{v1} = W_1 + c_1(\dot{z}_1 - \dot{y}_1) + k_1(z_1 - y_1) \quad (9. a)$$

$$P_{v2} = W_2 + c_2(\dot{z}_2 - \dot{y}_2) + k_2(z_2 - y_2) \quad (9. b)$$

2.3 결합된 미분방정식과 해석방법

식(3)의 교량의 운동방정식과 식(7)의 차량의 운동방정식은 서로 결합된 방정식이다. 이와 같이 결합된 방정식을 풀기위해 다음과 같은 반쪽시산법을 이용하였다.

1) $\{y\}$ 를 가정하여 식(7)으로부터 $\{z\}$ 를 계산한다.

2) 식(9. a)와 식(9.b)을 $\{F(t)\}$ 에 적용시켜 식(3)으로부터 절점변위 $\{u\}$ 를 계산한다.

3) 식(5)를 이용하여 연직변위 $\{y\}$ 를 계산한다.

4) 가정한 $\{y\}$ 와 계산한 $\{y\}$ 의 차가 허용 오차 내에 들도록 반복 시산한다.

3. 실험적 연구

3.1 실험 모형

본 연구에서는 교량의 동적해석을 위해 실물크기의 1/10로 축소된 모형을 제작하였다. 기하적 유사성만을 고려하여 크기를 축소시킨 모형의 경우 길이, 단면적, 체적, 응력, 고유진동수등의 물리량은 표 1과 같이 변한다.

여기서 기하적크기의 변화가 많은 물리량들을 변화시켜 전혀 다른 역학계를 구성함을 알수 있다. 본 연구에서는 원형과 축소시킨 모형에서 표 2의 무차원계수⁷⁾를 일치시켜 모형에서의 동적거동이

원형에서의 동적거동과 일치할수 있도록 모형의 제원을 결정하였다.

실험에서 사용한 모형의 제원은 경간 100m의 3경간 연속교에 20ton의 중량을 갖는 2축 차량이 작용하는 경우를 원형으로 하여 표 3의 상사율⁷⁾을 적용시켜 구하였다. 원형과 모형의 제원은 표 4와 같고 세부사항은 그림 2, 3과 표 5와 같다.

표 1. 축소모형의 물리량의 변화

물리량	길이 (l)	단면적 (A)	체적 (V)	질량 (m)	응력 (σ)	자유진동수 (f)
변화율(모형/원형)	1/10	1/10 ²	1/10 ³	1/10 ³	1/10	10

표 2. 무차원 계수

1. $\frac{R}{P}$	2. $\frac{\sigma^2}{P}$	3. ϵ	4. $\frac{\delta}{l}$	5. $\frac{EI^2}{P}$
6. $\frac{\rho gl}{E}$	7. μ	8. αt	9. $\frac{Pl}{P}$	10. $\frac{X}{l}, \frac{Y}{l}, \frac{\delta}{l}$
11. $\frac{\sigma}{E}$	12. $\frac{K}{\sigma l}$	13. $\frac{fR}{gk}$	14. $\frac{v}{fl}$	

각 부호는 아래와 같은 의미를 갖는다.

R: 반력	k: 스프링 상수
ε: 변형도	σ: 응력
l: 길이	δ: 처짐
ρ: 비중	E: 탄성계수
α: 열팽창계수	μ: 점성계수
P: 압력	P: 외부하중
x, y, z: 위치좌표	g: 중력상수
f: 고유진동수	v: 속도

표 3. 상사율

제원	P	m	\bar{m}	k	v	EI
상사율	0.01	0.01	0.1	0.1	$\sqrt{0.1}$	0.0001

표 4. 원형과 모형의 제원

	prototype	model ①	model ②
EI(kg중·cm ²)	4.457×10 ²	4.457×10 ⁸	4.406×10 ⁷
\bar{m} (kg/cm)	24.989	2.4987	0.247
P(kg중)	20,000	200	19.77
k ₁	1273.6	127.36	12.59
k ₂ (kg중/cm)	3820.7	382.07	37.77
v(km/h)	80	25.30	25.30

표 5. 제작모형의 세부사항

교 량		차 량	
A	9.45cm ²	W	20kg
E	2.04×10 ⁶ kg/cm ²	W ₁	5kg
m	0.247kg/cm	W ₂	15kg
I	21.598cm ⁴	k ₁	12.59kg/cm
l	400cm	k ₂	37.77kg/cm
al	300cm	l _v	30cm
		a ₁	22.5cm
		a ₂	7.5cm

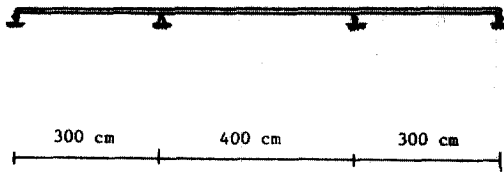


그림 3. 교량의 제작모형

3.2 실험 방법

실험에 대한 과정은 그림 3. 2과 같으며 이동하중은 중량 20kg의 2축차량을 제작하여 DC 115V의 motor를 동력으로 이동시켰다. 여기서 일정한 속도를 얻기 위해 AC 변압기(슬라이드 닥스)를 이용하였고 AC 동력으로부터 DC 전류를 얻기 위해 정류기(다이오드)를 사용하였다. 속도는 350cm/sec(실속 약 40km/h), 525cm/sec(실속 약 60km/h), 700cm/sec(실속 약 80km/h)로 변속시켜 실험하였다.

또한 실험에 사용한 노면은 평탄면, 조도면, 교량 진입부 단차면 및 교량의 전 경간에 걸친 연속 단차면 등이 있고 이는 그림 5와 같다.

4. 이론 및 실험 결과의 비교 분석

4.1 동적거동의 실험치와 이론치의 비교

실험에 사용한 총중량 20kg의 이동하중이 모델 교량위를 350, 525, 700cm/sec(실속 40, 60, 80km/h)로 주행할 때 교량의 처짐을 실험과 이론식으로부터 구하고 이를 비교하였다. 그림 6은 노면이 평탄할 때 중간 경간의 중앙점의 처짐에 대한 이론 및 실험 결과를 표시한 것이며 그림 7는 그림 5의 조

도면을 갖는 경우, 같은 지점의 이론 및 실험결과를 도시한 것이다. 그 결과, 이론치와 실험치는 3% 이내의 차이를 보일 정도로 거의 일치하였다.

4.2 동적거동의 실험적 분석

그림 5의 불규칙한 노면 a), b), c)의 경우에 대하여 평탄면의 경우와 비교하였다. 그림 5 a)의 조도면일 때의 결과는 그림 8과 같으며 그림 5 b)의 진입부 단차면이 있는 경우에 대한 실험 결과는 그림 9와 같고 그리고 그림 5 c)와 같이 연속 단차면이 있는 경우의 실험결과는 그림 10과 같다. 이 결과들을 평탄면의 경우와 비교하면 그림 5 a)의 조도가 있는 경우, 평탄면의 경우와 비교하여 처짐이 3% 정도 증가하며 그림 5 b)와 같이 진입부 단차면이 있는 경우에는 평탄면의 경우와 비교하여, 단차면 인접 경간에서는 10%정도 증가하지만 단차면과 떨어진 경간에서는 3% 이내로 그 차이가 작다. 연속 단차면을 갖는 경우 교량의 전 구간에서 동적 처짐의 최대치가 12% 정도 증가함을 알 수 있다.

4.3 동적거동의 이론적 분석

이론적 해석에서는 속도를 40km/h~140km/h까지 20km/h 간격으로 구분하여 해석하였다. 차량의 진동을 무시한 경우와 차량의 진동 및 차축의 스프링효과를 고려한 경우를 비교하여 도시한 것이 그림 11이며 차체의 진동을 고려한 경우에서 조도면^(4.5)을 주행할 때와 평탄면을 주행할 때의 해석결과를 도시하면 그림 12와 같다. 그림 13은 모든 경우에 대한 동적확대계수를 속도에 따라 도시한 그림이다.

차체의 진동에 의한 영향은 저속에서는 거의 없으나 속도가 증가할수록 동적확대계수가 최대 20%까지 증가하며 조도의 영향을 동적확대계수로 비교하면 평탄면에 비하여 저속에서는 12% 정도 비교적 큰 차이를 보이나 고속에서는 2% 이내로 거의 영향이 없음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 불규칙한 노면을 주행하는 이동하중에 의한 연속교의 동적거동을 규명하기 위해 이론식을 정립하고 실험을 통해 비교, 분석하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

노면에 조도가 있는 경우 평탄면과 비교하여 동

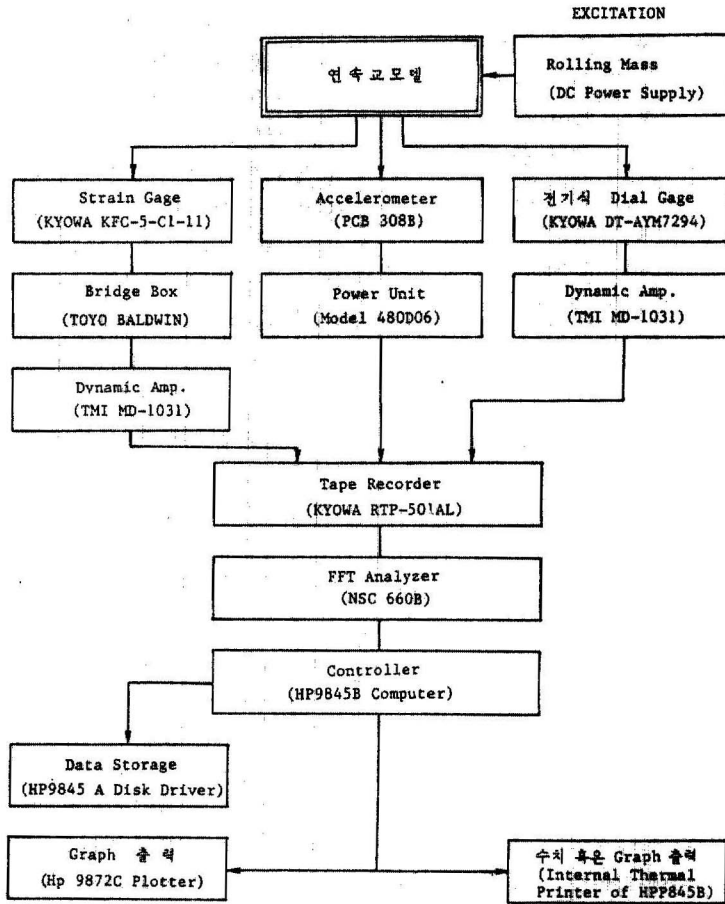


그림 4. 실험 과정에 대한 흐름도

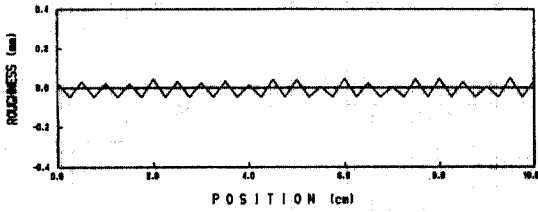
적치짐이 2% 이내의 차이를 보이므로 일반 설계에 있어서 그 영향은 무시할 수 있으나 저속에서는 조도의 영향으로 처짐의 동적응답치의 진폭이 커짐으로 도로 상판의 피로해석에는 조도의 영향을 고려할 필요가 있다고 판단된다.

이론적 해석에서 차체의 진동을 고려하였을 경우는 차체의 진동을 무시하였을 경우에 비해 동적 처짐이 최대 20%까지 증가함을 알 수 있으며 따라서 교량의 동적해석에서 차체의 진동에 대해 고려할 필요가 있다고 판단된다.

교량 진입부에 단차면이 있는 경우 평탄면에 비해 인접경간에서는 동적확대 계수가 10% 증가하며 떨어진 경간에서는 3% 정도임을 알 수 있다.

연속 단차면인 경우 교량 전 구간에서 평탄면에 비하여 동적확대계수가 12%정도 증가함을 알 수 있다. 따라서 교량의 설계시 진입부등 단차 발생의 우려가 있는 경우 이에 대한 보강이 필요하다고 사료된다.

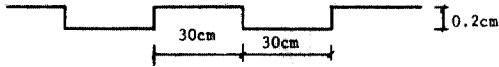
범용 프로그램에서 이동하중을 취급한 부분이 취약한 관계로 본 논문에서 개발한 프로그램을 이용하여 이를 보강할 수 있으며, 교량내하력같은 교량거동 조사시에도 본 프로그램을 이용할 수 있을 것으로 생각된다.



(1) Surface roughness.



(2) Support with a rapidly irregular roughness.



(3) Roughness with piece-wise constant irregularity.

그림 5. 실험에 사용한 노면

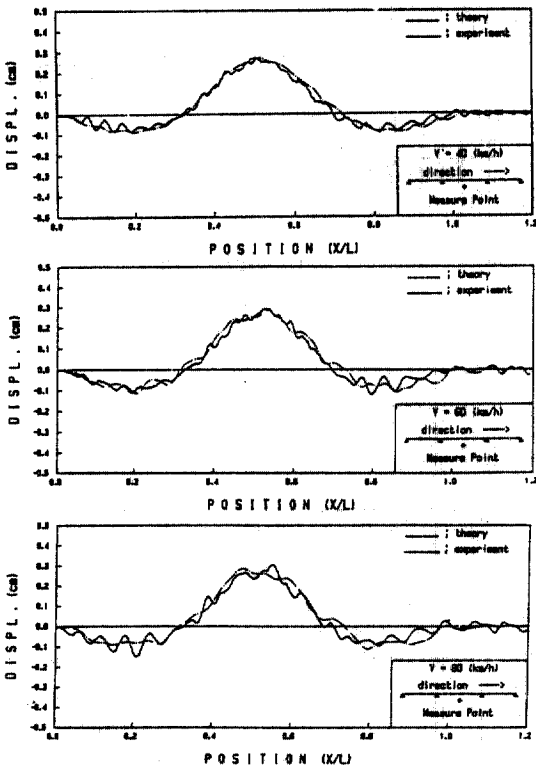


그림 6. 평탄면을 주행하는 경우, 중간 경간의 중앙점의 처짐비교

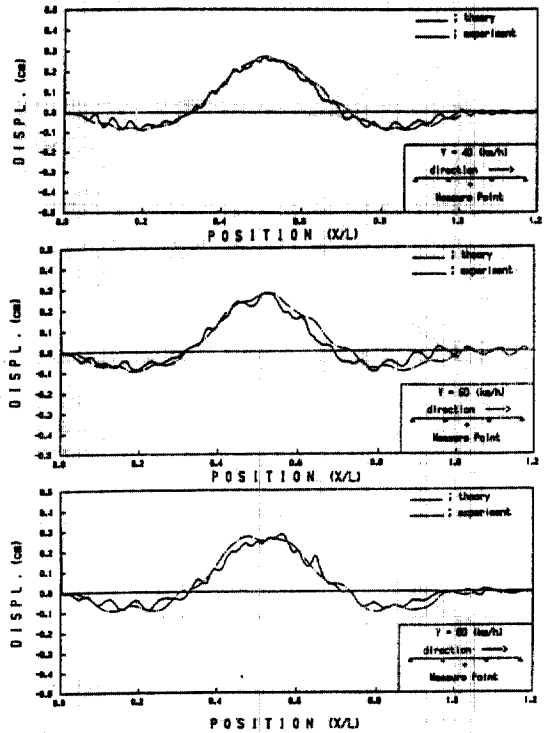


그림 7. 조도면을 주행하는 경우, 중간경간의 중앙점의 처짐비교

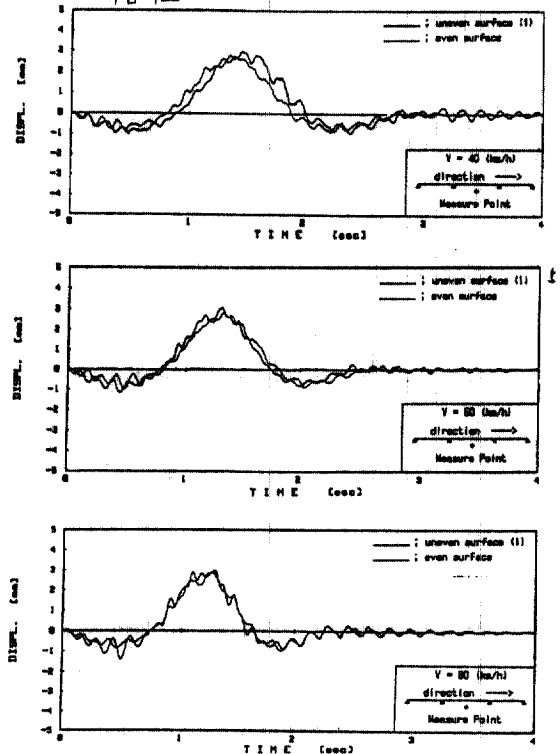


그림 8. 조도면과 평탄면의 경우에 대한 처짐 비교

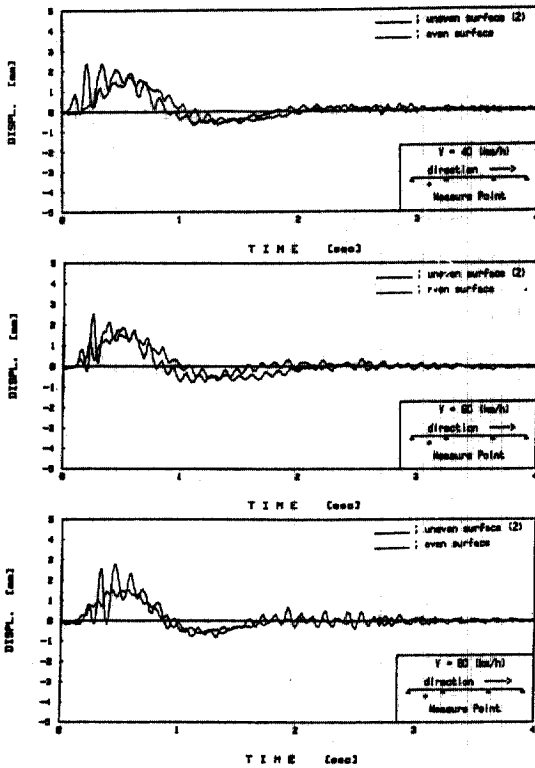


그림 9. 진입부 단차면과 평탄면의 경우에 대한 처짐 비교

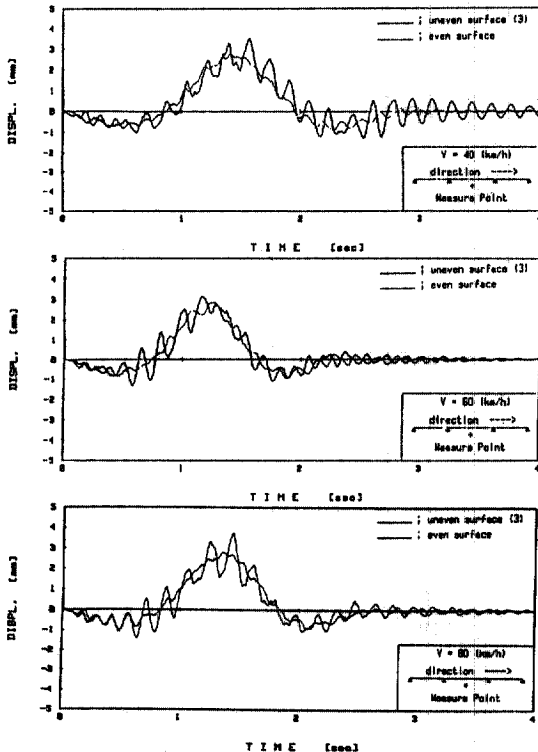


그림 10. 연속 단차면과 평탄면의 경우에 대한 처짐 비교

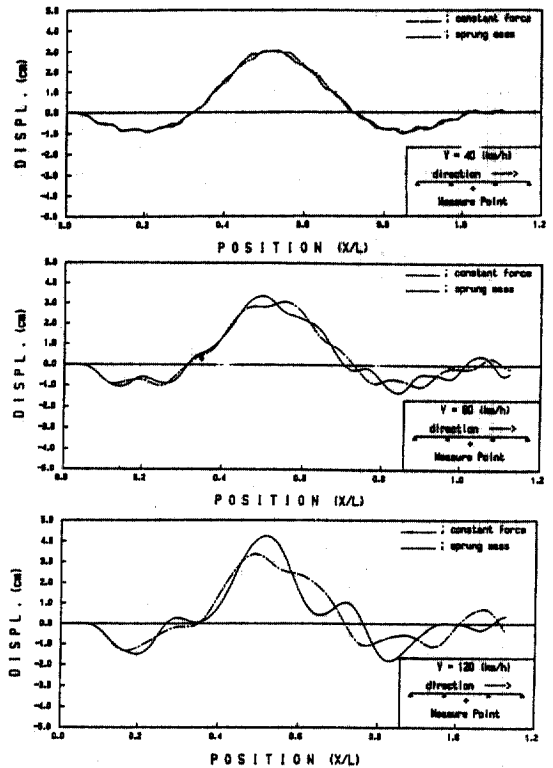


그림 11. 차량의 진동을 고려한 경우와 무시한 경우의 비교

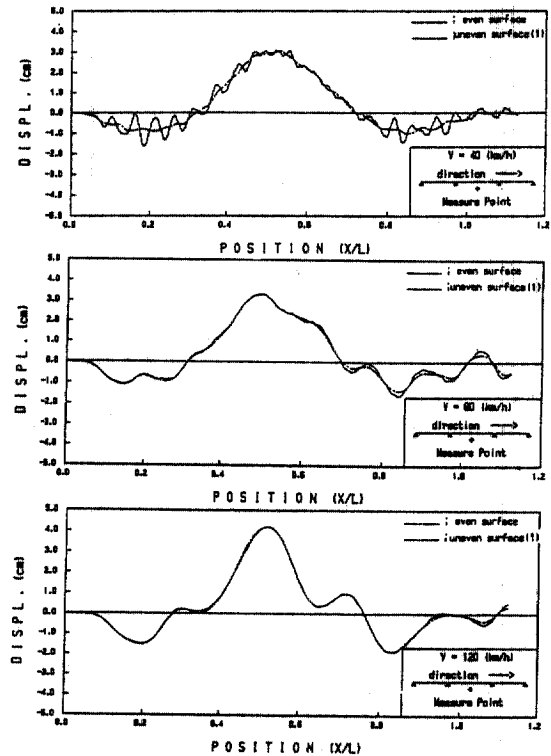


그림 12. 평탄면과 조도면을 주행하는 경우의 비교

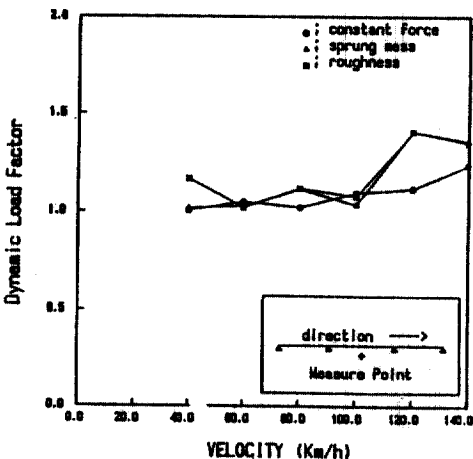
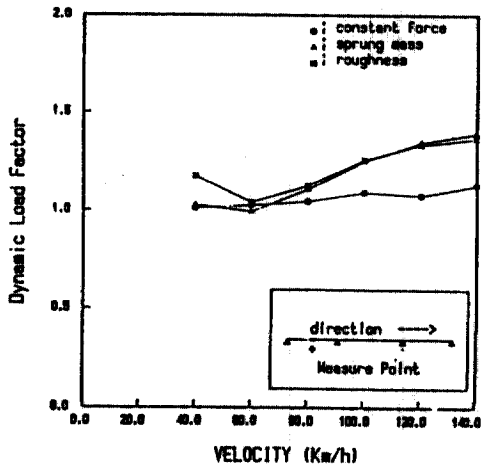
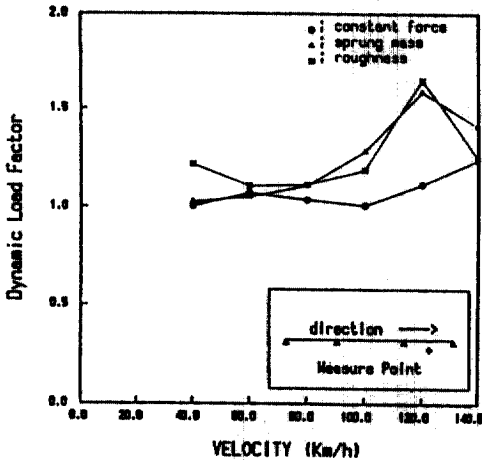


그림 13. 속도에 따른 동적확대계수의 비교

1. J. M. Biggs, "Introduction to Structural Dynamics," McGrawHill, 1962.
2. A. S. Veletos, T. Huang, "Analysis of Dynamic Response of Highway Bridges," *J. of Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 96, October, 1970, pp. 594-620.
3. The ASSHO Road Test-Report 4, "Bridge Research," Highway Research Board Special Report 61D, 1962.
4. 박영환 "불규칙한 노면을 주행하는 차량으로 인한 교량의 진동해석," 공학석사학위논문, 서울대학교, 1986.
5. 조의경, "노면 조도를 고려한 연속교의 이동차량하중에 의한 동적거동연구," 공학석사학위논문, 서울대학교, 1987.
6. Lee Hee Hyun, "Impact Factor of Moving Load due to Surface Roughness of Girder Bridge of Variable Span," ATT, M. eng. Theis, 1985. 4.
7. Heinz Hossdorf "Model Analysis of Structures" Van Nostrand Reinhold Company Ltd., 1971.
8. K. J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis," Prentice-Hall, 1982.
9. "A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems," A Report to the National Science Foundation, University of California.
10. Mario Paz, "Structural Dynamics," Van Nostrand Reinhold Company, 1980.
11. Ladislav Fryba, "Vibration of Solid and Structures under Moving Loads," Noordhoff International Publishing pp. 131-141, & pp. 106-108.
12. D. E. Newland, "Random Vibrations and Spectral Analysis" Longman 1975, pp. 118-120.
13. C. H. Chen, "Nonlinear Maximum Entropy Spectral Analysis," Research Studies Press a Div. of John Wiley & Sons L.

부 록

1. 변위형상 함수

$$\{N\} = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$$

$$N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}$$

$$N_2 = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

$$N_3 = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

2. 요소 강도 매트릭스

$$[K_e] = \begin{bmatrix} 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ & 4EI/l & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ & \text{Sym.} & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ & & & 4EI/l \end{bmatrix}$$

3. 요소 질량 매트릭스

$$[M_e] = \begin{bmatrix} \frac{\bar{m}l}{2} & 0 & & \\ & \frac{\bar{m}l}{2} & & \\ & & \frac{\bar{m}l}{2} & \\ 0 & & & \frac{\bar{m}l}{2} \end{bmatrix}$$

여기서 m 는 요소의 단위길이당 질량이다.

(接受: 1989. 5. 3)