

열차하중의 주행에 의한 트러스교의 동적응답에 관한 연구

A Study on Dynamic Response of Truss Bridge due to Moving Train Loads

장	동	일*
Chang,	Dong	Il
최	강	희**
Choi,	Kang	Hee
이	종	득***
Lee,	Jong	Deuk

Abstract

In this paper, dynamic response of a truss bridge due to constantly moving train loads is analysed.

Dynamic response of the bridge is found by the mode superposition method with the solution of the eigenvalue problem by Householder transformation and QL algorithm.

To prove the validity of the analysis procedure, the response due to a very slowly moving load is compared with the result from the static analysis program, and the dynamic response is also compared with the result from the direct integration method.

Based upon this, the variation of dynamic amplification factors is investigated by changing the train types and speeds, and the result is compared with the code specified impact factor.

From this study, it was known that the dynamic amplification factor is not quite different by train types in low speeds but in high speeds it is, and in the case of electric car and U. I. C. loads the factor could exceed the code specified impact factor depending upon the speed.

요 지

본 연구에서는 열차가 일정한 속도로 주행할 때 트러스교에 일어나는 동적응답을 구해보았다.

해석은 Householder 변환과 QL법을 이용하여 고유치해석을 실시한 후 이를 토대로 모든중첩법에 의해 동적응답을 구했으며, 이것의 타당성을 밝히기 위해서는 먼저 아주 느린 속도로 하중이 주행할때 얻어지는 응답을 정적해석프로그램에 의한 결과치와 비교하였고, 동적응답은 직접 적분법에 의한 결과

*정회원 · 한양대학교 공과대학 교수, 토목공학과

**정회원 · 철도청 시설국장

***정회원 · 철도전문대 교수 철도토목과

치와 비교해 보았다.

그리고 이를 토대로 열차의 속도와 형태의 변화에 따른 동적확대계수의 변화를 살펴보았으며, 또한 그것들을 시방서 규정과 비교해 보았다. 그 결과 열차의 속도가 낮은 경우 동적확대계수는 열차의 형태에 관계없이 비교적 낮은 값이었으나, 속도가 높아질수록 형태에 따라 크게 다르고, 전동차 및 U. I. C. 하중의 경우는 그값이 시방서 규정을 초과하는 경우도 있음을 알수 있었다.

1. 서 론

근간의 교통량의 비약적인 증가, 공업기술의 발달로 인한 차량의 중량화, 고속화, 재료의 고강변화 및 컴퓨터 산업의 발달로 최적설계개념의 도입으로 인한 부재단면의 감소등 여러 요인에 의해 강교량에는 큰 진동이 일어날 소지가 많아지고 있다. 그리하여 도로교의 진동에 관해서는 많은 연구가 진행되어 현재는 확률론적인 기법에 의해 진동문제가 해석되는 관계에 까지 오게되었다.

그러나 철도교란 구조적 견지에서 볼때 도로교와 달리 활하중의 크기와 작용하는 위치가 아주 명확하고 사하중에 대한 활하중의 비가 크고, 설계응력에 가까운 과대응력이 작용하는 확률도 높아 도로교에서보다 심한 진동이 일어난다⁽⁷⁾.

그리하여 미국, 독일, 일본등에서는 오래전부터 철도교의 진동 및 충격에 관한 대규모의 현장실험을 실시하여 그 결과들이 현재 각 나라의 철도교 충격에 관한 시방서 기초가 되었다⁽⁸⁾. 그러나 이에 관한 우리나라의 문헌을 조사해보면 내하력 조사 보고서와 실험치를 정리한 문헌들이 몇편 있을뿐 철도교의 동적거동에 관한 이론적인 연구는 거의 없는 실정이다.

그리고 현재 공용중에 있는 철도교량의 상당수가 설계하중으로 증기기관차 하중체계에 의해 설계되었는데 현재는 디젤기관차, 전동객차하중으로 바뀌고 있다. 그런데 이들 새로운 하중체계는 경량이기 때문에 부재가 받는 동적피해는 적을것이라고 생각할수도 있으나 차축배치, 차량의 동특성등의 차이때문에 교량지간에 따라서는 오히려 큰 피해를 받을수 있다는 사실은 이미 보고된바 있다^(8, 12).

이러한 사실을 고려하여 본 논문에서는 보형식의 교량 다음으로 많이 이용되는 트러스교의 주행열차하중에 의한 동적응답에 관하여 고찰하였다.

해석은 먼저 유한요소법을 이용하여 교량의 운

동방정식을 유도한 후 Householder 변환과 QL법을 이용하여 고유치문제를 풀어 이를 토대로 모드중첩법에 의해 동적응답을 구했다. 이때 이해의 검증을 위해서 첫째로는 하중이 아주 천천히 주행할때의 결과치를 정적해석에 의한 결과치와 비교해 보았으며, 둘째로는 동적응답에 미치는 시간간격의 영향을 조사해 보았고, 셋째로는 완전히 다른 해석방법인 직접적분법에 의한 결과치와 비교해 보았다.

그리고 이를 토대로 전동차(M차) 하중이 주행할때 일어나는 트러스교의 변위 및 부재력의 정동적 이력곡선을 작도하였고, 아울러 열차의 속도, 형태에 따른 동적확대계수(dynamic amplification factor)의 변화에 대하여 분석고찰하였다.

2. 운동방정식

2.1 가 정

트러스교의 동적해석을 수행하기전에 다음과 같은 가정을 둔다^(9, 13, 14).

- i) 구조물은 선형탄성 거동을 한다.
- ii) 하중이 재하되지 않았을때 교량은 직선이다.
- iii) 교량은 유한한 자유도를 갖는 평면구조물로 모델링하고 바닥보, 궤도, 브레이싱등 종구조물은 질량의 일부로서만 고려한다.
- iv) 차량주행시 하중의 크기는 일정하다.
- v) 감쇄의 영향은 무시한다.

2.2 운동방정식

하나의 부재에 대한 자유도 및 절점력은 그림 1에 주어져 있으며, 이에 대한 운동방정식은 다음과 같이 쓸수 있다⁽¹³⁾.

$$\underline{M}^e \ddot{\underline{U}}^e + \underline{C}^e \dot{\underline{U}}^e + \underline{K}^e \underline{U}^e = \underline{P}^e \quad (1)$$

여기서 \underline{M}^e , \underline{C}^e 및 \underline{K}^e 는 각각 부재의 질량, 감쇄

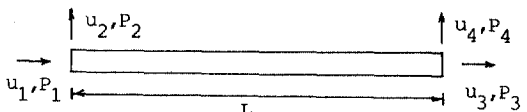
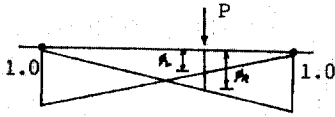


그림 1. 트러스 부재의 절점변위와 절점력



≡

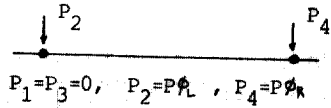


그림 2. 하중의 분배

및 강도매트릭스로 식 (2) 와 같이 표시되고 P^e 는 부재에 작용하는 외력에 의한 등가절점력벡터인데 한개의 하중만이 작용하는 경우 그림 2와 같이 구하고 열차의 축배치에 따라 여러개의 하중이 임의의 위치에 동시에 작용하는 경우 n 개의 하중들에 대해 그림 2의 과정을 따라 구한 값들을 중첩하여 사용한다. 그리고 $\underline{U}^e, \underline{\dot{U}}^e$ 는 부재의 절점변위, 속도 및 가속도벡터이다.

$$\underline{K}^e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-a)$$

$$\underline{M}^e = \frac{ml}{b} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2-b)$$

$$\underline{C}^e = \alpha \underline{M}^e \quad (2-c)$$

여기서 A 는 부재단면적, E 는 탄성계수, L 은 부재길이, m 은 단위길이당 질량 그리고 α 는 $\alpha = 2\xi w_1$ 으로 구해지는 상수이다. 이때 ξ 는 감쇄비, w_1 은 첫번째 모드의 진동수이다.

각 부재들의 강도, 질량 및 감쇄매트릭스를 구하고 이들에 대한 좌표축변환을 실시한 후 결합하면 전체구조물의 운동방정식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\underline{M}\underline{\ddot{U}} + \underline{C}\underline{\dot{U}} + \underline{K}\underline{U} = \underline{P} \quad (3)$$

식 (3) 의 운동방정식은 Householder 변환과 QL 법을 이용하여 고유치 해석을 실시한후 이를 토대로 모드중첩법에 의해 해를 구한다. 이 과정은 문헌 (2), (4), (6) 에 잘 설명되어 있으나 참고로 부록에 실었다.

2.3 해석과정

앞에서 설명한 해석과정을 따라 프로그램을 작성하였으며 그 계산과정을 개략적으로 흐름도로 표시하면 그림 3과 같다.

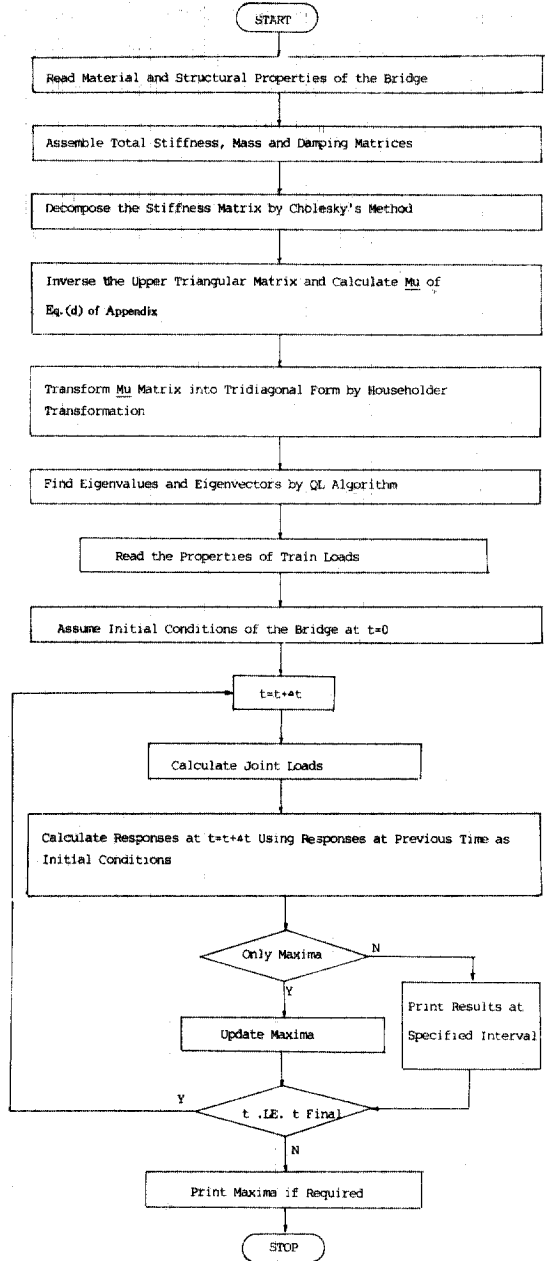


그림 3. 해석과정의 흐름도

3. 수치해석 및 고찰

3.1 해석모델

해석에 사용된 교량은 그림 4 및 표 1 과 같은 단순지지 하로 Warren 트러스교이다⁽⁴⁾. 질량분포는 2.2에서와 같이 주구조에 대해서는 분포질량계(consistency mass system)를 사용하였으며, 그외의 바닥보, 궤도, 브레이싱등 종구조에 대해서는 대부분이 하현재 부근에 분포되어 있기때문에 하현재의 절점에 균등히 분배하였는데 그 크기는 5.56t이 있다.

그리고 열차의 형태에 따른 동적확대계수의 변화를 조사하기 위하여 사용한 열차하중들은 그림 5와 같다. 그림 5에서 6100호 하중은 철도교의 정동적시험에 흔히 이용되는 기관차하중이고 전동차

표 1. Warren 트러스교 부재의 단면적

요 소	단면적(m ²)	요 소	단면적(m ²)
1	0.134E-01	2	0.245E-01
3	0.335E-01	4	0.367E-01
5	0.335E-01	6	0.245E-01
7	0.134E-01	8	0.197E-01
9	0.254E-01	10	0.311E-01
11	0.311E-01	12	0.254E-01
13	0.197E-01	14	0.265E-01
15	0.157E-01	16	0.157E-01
17	0.157E-01	18	0.157E-01
19	0.133E-01	20	0.138E-01
21	0.138E-01	22	0.133E-01
23	0.157E-01	24	0.157E-01
25	0.157E-01	26	0.157E-01
27	0.265E-01		

하중은 현재 공용중에 있는 지하철하중으로 일본의 신간선 여객열차하중인 P 하중과 매우 유사한 하중이고, N하중은 일본의 화물열차하중이다. 그리고 U.I.C. 하중은 유럽의 철도연합체인 U.I.C.(Union Internationale des Chemins de fer)에서 최근 설계하중으로 제정한 것이다⁽⁴⁾. 그러나 계산의 간편화를 위해서 L-22 하중과 U. I. C. 하중체계에서 분포하중은 계산에서 제외시켰다. 그리고 앞에서 설명한 수식의 유도과정에서는 감쇄항을 고려하였으나 수치계산시는 무시하였다.

3.2 정적해석치와의 비교

그림 4의 트러스교에 500KN의 하중이 매우 느린 속도(차량의 주행으로 인하여 교량에 관성력이 일어나지 않을 정도의 속도로 이것에 의한 응답은 정적응답과 거의 같다고 알려져 있다⁽⁴⁾.)로 달려 그 하중이 절점 4에 도달했을때의 결과치를 절점 4에 하중이 정적으로 작용할때 정적해석프로그램⁽⁶⁾에 의한 결과치와 비교해 보았다. 이 두경우를 비교해 보므로써 본 논문을 위해 개발한 동적해석프로그램의 타당성을 검증할수 있고, 실 열차하중과 같이 차축이 여러개인 하중체계에 의한 절대최대 정적응답을 영향선에 의해 구해야 하는 번거러움을 피할수 있을 뿐만아니라 보다 정확한 값을 구할수 있기 때문이다.

표 2에는 두 프로그램에 의한 결과치와 정적해석에 의한 값을 정확한 값으로 간주했을때의 상대오차가 주어져 있다. 이로부터 차량이 매우 느린 속도로 달릴때 얻어지는 결과치는 정적해석에 의한 결과치와 2% 이내의 차이를 준다는 것을 알수 있다. 따라서 실 열차하중과 같이 차축이 여러개인 경우라도 절대최대정적응답을 구하기 위해서는 본 프로그램을 이용하여 차량을 매우 느린 속도로 주

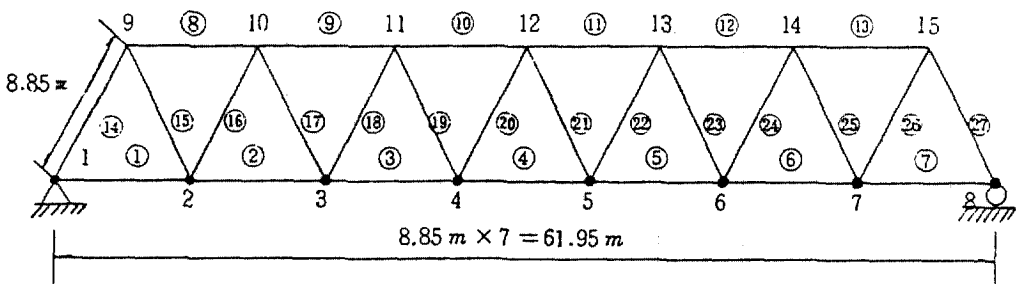
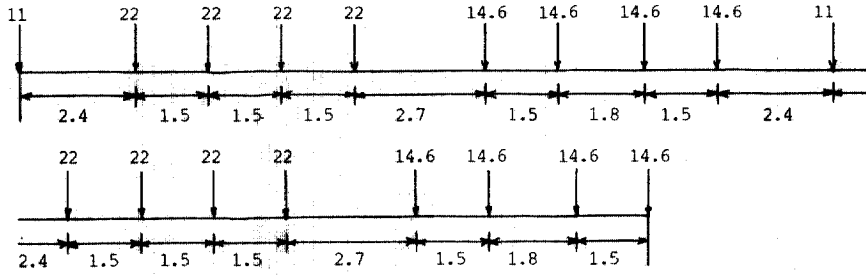
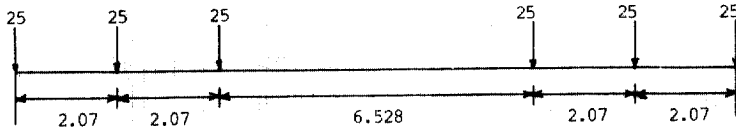


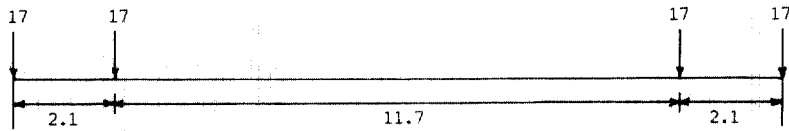
그림 4. 단순지지 Warren 트러스교



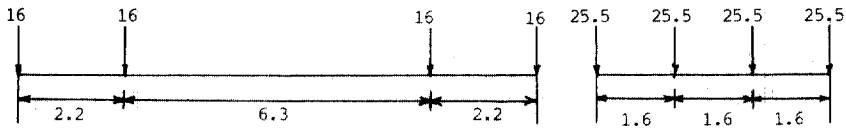
a) L-22 하중



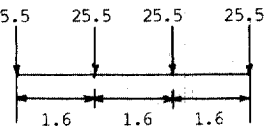
b) 6100 호 기관차 하중



c) 전동차 하중 (M 차)



d) N 하중



e) U.I.C. 하중

그림 5. 해석에 사용된 차량하중(단위: 길이(m), 하중(t))

표 2 정적해석치와의 비교

해석법	정적해석	동적해석	상대오차(%)
응답			
최대수평변위 (cm)	0.5906	0.5812	1.59
최대수직변위 (cm)	1.995	1.9623	1.64
최대압축력 (KN)	989.787	989.67	0.01
최대인장력 (KN)	866.062	866.062	-0.06

행시켜 그때 얻어지는 값을 사용하면 될 것이다.

3.3 시간간격의 영향

시간간격이 해의 안정성과 정확성에 큰 영향을

준다 것은 이미 알려진 사실이다. 그리하여 여기서는 그림 4와 같은 트리스교에 500KN의 하중이 20m/s의 속도로 주행할때 시간간격을 여러가지로 바꾸면서 시간간격이 최대동적응답에 미치는 영향을 조사해 보았다.

표 3에는 시간간격을 0.0001초로 했을때의 응답을 정확한 값으로 간주했을때 다른 시간간격들에 대한 값의 상대오차가 주어져 있다. 이 표로부터 사재(부재 20)의 부재력에 대한 오차는 다른 응답에 비해 다소 크다는 것을 알수 있는데 이것은 사재의 부재력은 단순형교의 전단력과 같이 응답의

표 3. 동적응답에 미치는 시간간격의 영향(단위, 변위 (cm), 부재력 (t), 상대오차 (%))

응답 시간간격	절 점 4				부 재 10		부 재 20	
	수평변위	상대오차	수직변위	상대오차	부 재 력	상대오차	부 재 력	상대오차
0.0001	0.2918	-	1.9847	-	968.18	-	255.13	-
0.0005	0.2918	-	1.9849	-0.01	968.34	-0.02	255.0	0.05
0.001	0.2918	-	1.9850	-0.02	968.34	-0.02	253.85	0.50
0.005	0.2909	0.31	1.9882	-0.18	968.03	0.02	251.44	1.45
0.01	0.2914	0.14	1.9733	0.57	970.07	-0.20	257.25	-0.83
0.025	0.2801	4.01	1.9677	0.86	980.02	-1.22	248.96	2.42
0.1	0.2827	3.12	2.0105	-1.30	1004.0	-3.70	241.36	5.40

부호가 하중 위치에 따라 바뀌기 때문인 것으로 사료된다⁽³⁾.

그런데 이 교량의 첫번째 모드의 진동수는 24.72 rad/s로 Biggs⁽¹⁾의 제안식 $\Delta t < \frac{1}{10}T = 0.025$ 초, 즉 시간간격을 0.025 초 이하로 했을때의 오차는 약 4% 이내라는 것을 알수 있다. 그래서 본 논문에서는 보다 정확한 값을 얻기 위하여 시간간격을 0.005 초로 하였다.

3.4 서로 다른 방법에 의한 비교

그림 4의 구조물에 500KN의 하중이 20m/s로 주행할때 27개의 모드까지 고려한 모드중첩법에 의한 결과치를 Newmark의 직접적분법에 의한 결과치와 비교해 보았다. 이 두방법에 의한 해석과정은 완전히 다르나 해석결과 똑같은 결과를 주어 비교표는 만들지 않았다. 단지 컴퓨터 기간의 견지에서 볼때 직접적분법에 의한 것이 모드중첩법에 의한 것의 1.61배 많이 걸렸으므로 본 연구에서는 모드중첩법을 이용하여 동적응답을 구했다.

그런데 지면 관계상 직접적분법에 관한 이론은 기술하지 않았으나 문헌(3)에 상술되어 있다

한편 모드수에 따른 해석결과를 검토해본 결과 15개의 모드까지 고려한 경우 사재 20의 최대 부재력에 13%의 오차가 생겨서 이는 무시할수 있을 정도로 작으나 본 논문에서는 모드수에 따른 오차를 0으로 만들기 위해 수치계산시 27개의 모드를 모두 고려하였다.

3.5 모드형상

그림 6은 그림 4의 트러스교를 Householder 변환과 QL법을 이용하여 구한 처음 다섯가지 모드형상을 보여준다. 이 그림으로부터 제1차 모드형상은 단순형교의 것과 유사하나 제2차 모드는 단

순형교에 나타나지 않는 모드로 제3차 이상의 모드형상은 단순형교의 제2차 이상의 모드형상과 유사하나 진동수는 고차모드로 갈수록 단순형교와 같이 정수의 자승배로 커지지 않고 오히려 연속형교와 같이 단순형교보다 훨씬 느린 속도로 커진다는 것을 알수 있다.

3.6 동적응답의 이력곡선

전동차(M차) 하중이 210km/h의 속도로 그림 4의 교량위를 주행할때 절점 5의 수직처짐과 부재 11 및 25의 부재력에 관한 정·동적응답을 구하며

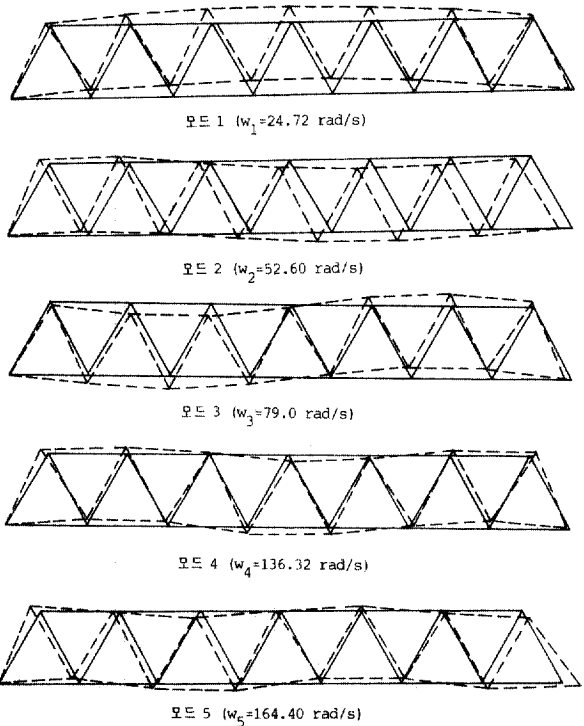
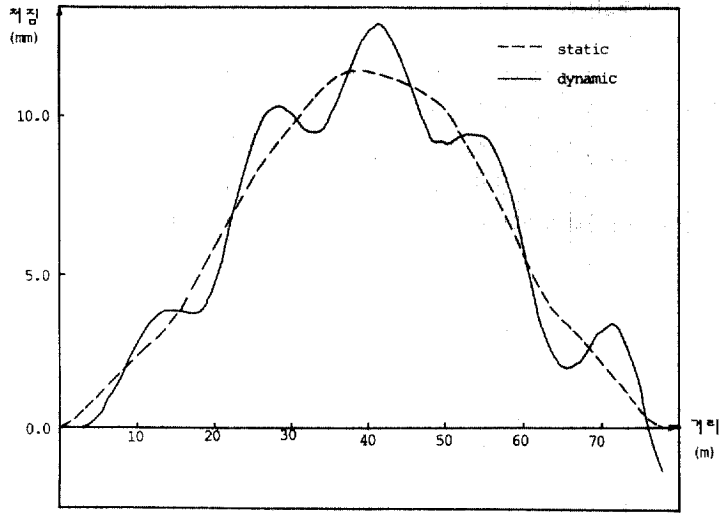
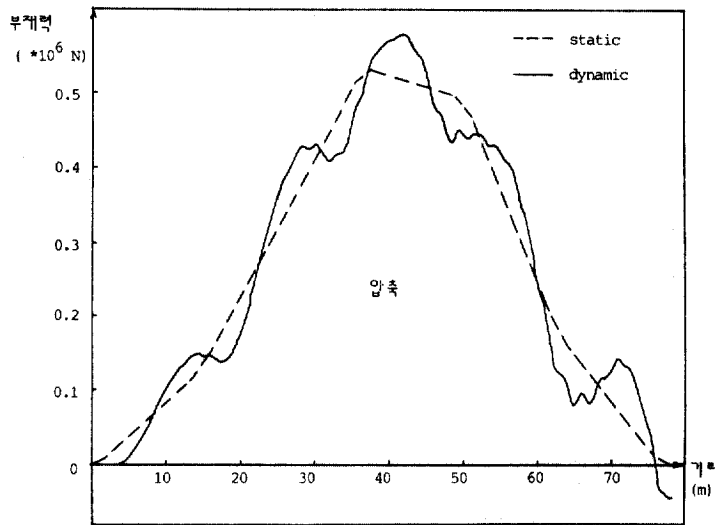


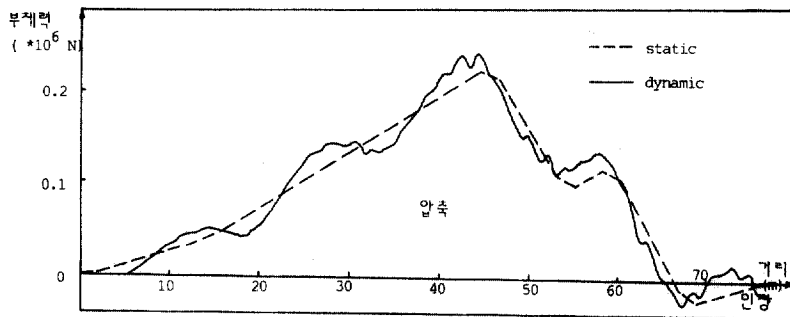
그림 6. 단순 Warren 트러스교의 모드형상



a) 절점 5의 수직처짐 이력곡선



b) 부재 11의 부재력 이력곡선



c) 부재 25의 부재력 이력곡선

그림 7. 동적응답의 이력곡선

그림으로 표시한 것이 그림 7이다. 이 그림에서 횡축은 왼쪽단에서 첫번째 차축까지의 거리이다.

이 그림들을 문헌 (3)의 단순형교에 대한 것과 비교해 볼때 수직처짐은 단순형교의 수직처짐에 상현재(부재 11)의 부재력은 단순형교의 휨모멘트에 그리고 사재(부재 25)의 부재력은 단순형교의 전단력에 대응하는 이력곡선을 나타냄을 알수 있다.

3.7 열차의 형태와 속도변화에 따른 동적확대 계수

본 논문에서는 동적확대계수를 절대최대정적응답에 대한 절대최대동적응답의 비로 정의하여 열차의 형태와 속도를 20~300km/h 까지 10km/h의 간격으로 바꾸면서 각 응답들에 대한 동적확대계수를 구하여 그것들의 평균치와 최대치가 어떻게 변하는지 살펴보았다. 여기서 평균치는 동적확대계수의 전반적인 변화양상을 보기위한 것이고, 최대치는 현재 사용되고 있는 시방서의 충격에 관한 규정과 비교하기 위함이다. 그런데 해석에서 충격계수 대신 동적확대계수란 용어를 사용한 것은 충격계수란 교량에 일어날수 있는 모든 요인을 포함했을때의 동적효과이며, 동적확대계수란 일부 요인들만 포함했을때의 동적효과를 의미하므로 이것으로 인한 혼돈을 피하기 위해서이다.

그런데 트러스교의 충격계수에 관한 우리나라 시방서에는 디젤전기기관차에 대하여 다음과 같이 정의하고 있다.

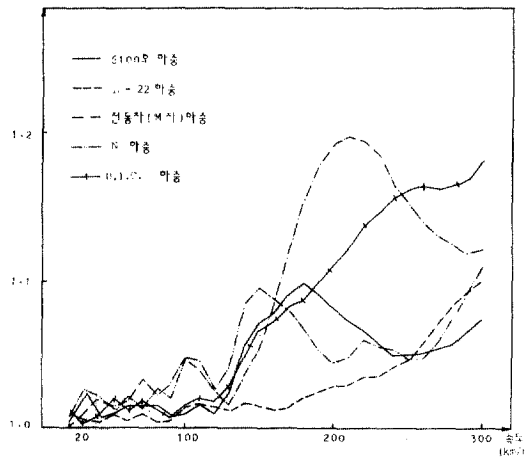
$$i = \left(\frac{180}{l-9} + 26 \right) / 100 + 1$$

따라서 그림 4와 같이 $l=61.95m$ 인 경우 충격계수는 1.294이다.

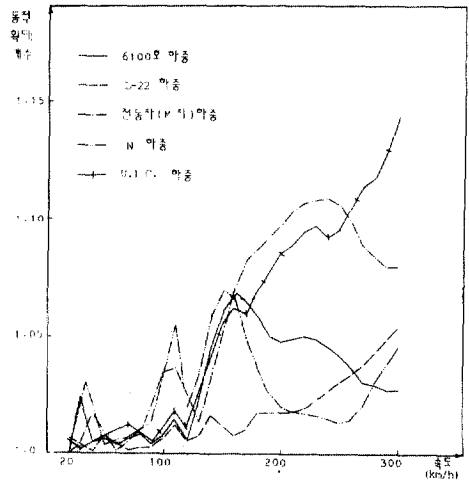
그런데 동적확대계수는 열차의 수가 여러대인 경우보다 한대의 경우 가장 크다는 결론⁽¹³⁾에 따라 각 열차 하중형태에 대해 한대가 주행하는 경우만을 고려하였다.

그림 8은 열차의 속도, 형태에 따른 각 응답들에 대한 동적확대계수의 평균치를 정리한 것이고, 그림 9는 각 경우에 대한 최대값만을 구하여 정리한 것이다.

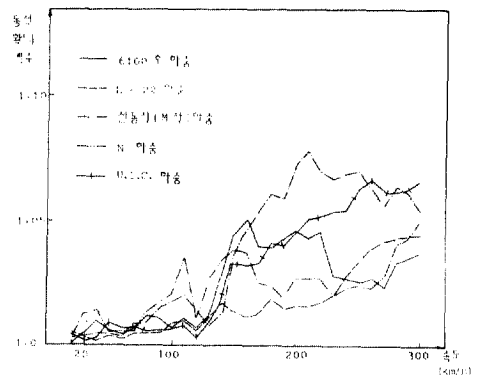
이 그림들로부터 동적확대계수는 열차의 속도가 비교적 낮은 경우 열차의 형태에 따라 큰 차이없이 시방서값을 훨씬 하회하는 낮은 값이나, 열차의 속도가 높은 경우 그 값은 형태에 따라 크게 다른데, 비교적 가벼운 차량인 전동차와 차축의 배치가



가) 수평변위



나) 수직변위



다) 회전각

그림 8 열차의 속도·형태의 변화에 따른 동적확대계수의 평균값

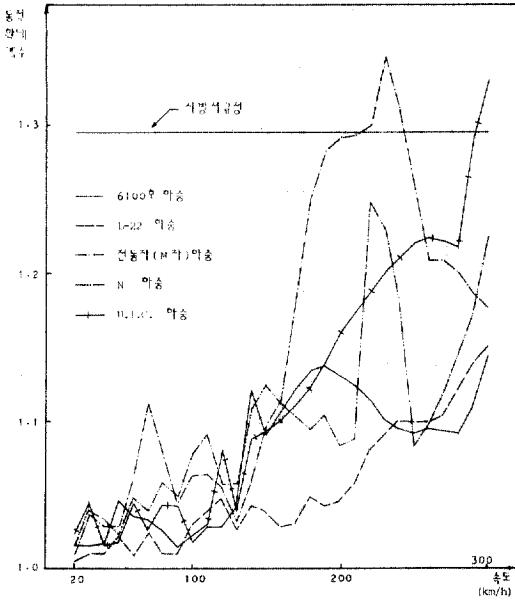


그림 9. 열차의 속도·형태의 변화에 따른 동적확대계수의 최대값

일정한 U. I. C. 차량에 의한 값들이 L-22, 6100 호 기관차 및 N 하중등과 같이 하중과 축배치가 일정하지 않고 무거운 차량에 비해 상당히 크다는 것을 알 수 있는데, 이것은 후자의 경우 각 차축들이 서로 다른 위상에서 진동하여 전자의 경우보다 서로의 진동을 많이 상쇄시키기 때문인 것으로 사료된다. 아울러 그림 9로부터 동적확대계수가 최대로 되는 임계속도(critical speed)는 열차의 형태에 따라 다르다(전동차: 230km/h, N 하중: 220km/h, 그 외: 300/h)는 것을 알 수 있으며, 전동차와 U. I. C. 차량의 경우 동적확대계수의 최대치는 임계속도에서 시방서값을 상회함을 알 수 있다. 이러한 사실로부터 열차의 속도가 고속으로 예상되는 곳에서는 전동차 또는 U. I. C. 차량에 의한 동적확대계수를 실제 설계에 사용해야 할 것으로 판단된다. 그리고 평균치를 정리한 그림 8로부터 동적확대계수는 수평면위, 수직변위 및 부재력의 순으로 크다는 것을 알 수 있다.

그런데 본 논문에서는 차량속도의 영향만을 고려했는데 열차의 관성력, 레도레일의 불균일성 등의 영향을 고려하면 동적확대계수는 본 연구에 의한 결과치보다 훨씬 커질 수 있으므로 이에 관한

연구가 보다 집중적으로 실시되어야 할 것으로 사료된다.

4. 결 론

1. 열차하중의 주행에 의해 트러스교에 일어나는 동적확대계수는 열차의 속도가 낮은 경우 열차의 형태에 관계없이 비교적 낮은 값이나, 속도가 높을수록 열차의 형태에 따라 크게 다르고 전동차 및 U. I. C. 하중의 경우 임계속도에서 현재의 시방서 충격규정을 초과한다. 따라서 열차의 속도가 고속으로 예상되는 경우 현재의 시방서 충격규정은 안전하지 못하다.

2. 단순트러스교의 수직처짐, 상현재 및 사재의 부재력 이력곡선은 단순형교의 처짐, 모멘트 및 전단력곡선과 유사하다.

그리고 모드형상은 단순형교와 유사한 면도 있으나 진동수는 고차모드로 갈수록 연속형교와 같이 단순형교에 비해 상당히 느린속도로 커진다.

3. 실 열차하중과 같이 차축의 수가 여러개인 경우 절대최대정적응답은 영향선을 이용하는 번거로움 없이 본 논문에서와 같이 동적해석프로그램을 이용하여 하중을 아주 느린속도로 주행시키면 용이하게 구할 수 있다.

참 고 문 헌

1. Biggs, J. M., "Introduction to structural Dynamics," Mc Graw-Hill, 1962, pp. 26-30, 95-97.
2. Brebbia, C. A., Ferrante, A. J., "Computational Methods for the Solution of Engineering Problems," Pentech Press, 1979, pp. 72-90.
3. Lee, H. H. "Impact Factor of Moving Load due to Surface Roughness of Girder Bridge of Variable Span," AIT. Apr. 1985.
4. Press, W. H., Flannery B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T. "Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing," Cambridge Univ. Press, 1986, pp. 335-377.
5. Weaver Jr., W., James M. G., "Matrix Analysis of Framed Structures," 2nd Edition, D. Van Nostrand 1980, pp. 316-321.
6. Weaver Jr., W., Johnston P. R., "Structural Dynamics by Finite Elements," 1987, pp. 82-95, 105-112, 152-157.
7. 橋本香一, "鋼鐵道橋の應力および衝擊に關する研究,"

鐵道技術研究報告, No. 713, 1970. 6.

8. 伊藤文人, “實働荷重による鐵道橋の疲勞被害推定,” 鐵道技術研究報告, No. 976, 1969.
9. 涌井一, “車輛走行による橋梁の動的應答の基本式とそのトラス橋への適用につめて,” 修士論文, 東京工業大學, 1975.
10. 장동일, “강구조공학,” 창지사, 1982, pp 30~32.
11. 장동일, 박종현, 이희현, “주행차량에 의한 도로교의 진동특성에 관한 실험적연구,” 대한토목학회논문집, 제 8권 제 2호 1988. 6.
12. 장동일, 이종득, 정영화, “철도교의 등가피로피해에 관한 연구,” 대한토목학회논문집 제 2권 제 4호, 1982. 12.
13. 장동일, 이창윤, “차량하중으로 인한 트러스교의 동적응답 해석에 관한 연구,” 한양대학교 산업과학연구소 논문집, No. 25, 1987.
14. 최효경, “단순 상자형교의 동적거동에 관한 연구,” 한양대학교 산업대학원, 1988. 6.
15. 철도청, “철도건설공사 표준시방서,” 1980.
16. 철도청, “차량표준도집”.

〈부 록〉

1. 고유치문제

구조물의 고유치해석시 식 (3)의 운동방정식은 다음과 같이 비감쇄 자유진동의 형태로 쓸수 있다.

$$(\underline{K} - w^2 \underline{M}) \underline{\phi}_i = 0 \quad (a)$$

여기서 $\underline{\phi}_i$ 는 i 번째 모드의 고유벡터, w_i 는 i 번째 모드의 고유진동수이다. 그런데 식 (a)는 고유치해석을 위한 비표준형(non-standard form)이므로 이것을 표준형으로 바꿔야 한다. 그러기 위해서 먼저 \underline{K} 를 상부삼각매트릭스(upper triangular matrix) \underline{A} 로 분리(decomposition)한다.

$$\underline{K} = \underline{A}^T \underline{A} \quad (b)$$

식 (b)를 (a)에 대입한후 \underline{A}^{-T} 를 곱하여 정리하면

$$(\underline{M}_* - \lambda \underline{I}) \cdot \underline{\phi}_* = 0 \quad (c)$$

식 (c)가 고유치해석을 위한 표준형이다. 이때

$$\underline{M}_* = \underline{A}^{-T} \underline{M} \underline{A}^{-1} \quad (d)$$

$$\underline{\phi}_* = \underline{A} \underline{\phi}_i \quad (e)$$

$$\lambda = \frac{1}{w_i^2} \quad (f)$$

\underline{I} 는 단위매트릭스이다. 식 (c)는 모든 고유치와 고유벡터를 구하는데 가장 효과적이라고 알려진 Householder 변환과 QL법을 이용하여 해석한다⁽⁴⁾.

2. 모드 중첩법

모드중첩법⁽⁶⁾에 의하면 변위벡터 \underline{U} 는 다음과 같이 고유벡터 $\underline{\phi}_i$ 와 직교좌표(normal coordinate) Y_i 로 표시할 수 있다.

$$\underline{U} = \sum_{i=1}^n \underline{\phi}_i Y_i \quad (g)$$

여기서 n 은 전체자유도의 수이다. 강도, 질량 및 감쇄 매트릭스에 직교조건(orthogonality condition)⁽⁶⁾을 이용하면 식 (3)은 다음과 같이 n 개의 독립된 비연성방정식(uncoupled equations)으로 나눌수 있다.

$$Y_i + 2\zeta_i w_i Y_i + w_i^2 Y_i = \frac{1}{M_i^*} P_i^* \quad (h)$$

여기서 $M_i^* = \underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{\phi}_i$, $P_i^* = \underline{\phi}_i^T \underline{P}$, $i=1, 2, \dots, n$ 식 (h)를 풀어서 (g)에 대입하여 \underline{U} 를 구하고 이것을 다시 부재좌표축으로 변환하면 부재력은 다음과 같이 구할수 있다.

$$\underline{F}_i^* = \underline{K}^* \underline{U}^* \quad (i)$$

(接受: 1988. 8. 12)