

유한요소법에 의한 음장해석에 관한 연구

(Analysis of Sound Fields by Finite Element Method)

崔錫柱*, 橘秀樹**, 朴棟瑤***

(Seok Joo Choi, Hideki Tachibana, Byeong Jeon Park)

요 약

유한요소법은 일반적으로 변분원리를 이용해 정식화를 하고 있으나, 본 연구에서는 웨이트드 잔차법으로 아주 좋은 근사해를 얻을 수 있다는 Galerkin법에 의해 Helmholtz방정식으로부터 직접 유한요소 정식화하는 방법을 소개하고, 정식화한 수치계산법을 2,3차원 음장의 고유모드 및 음향방사상태해석에 응용하였다. 또한 수치계산결과를 확인하기 위하여 간단한 모형울 제작, 실내음향 모드와 음압분포 등의 측정도 병행하였으며 그 결과, 유한요소법에 의한 수치해석결과와 측정치가 잘 맞는 것을 알았다.

ABSTRACT

The finite element method is usually formulated by utilizing the variation principle. In this paper, we introduce the approximate equation of finite element from Helmholtz equation by means of the Galerkin method, which provides the best approximation of those methods known as the method of weighted residuals, and a numerical simulation based of the finite element method is applied to analysing the acoustic modes and the pattern of sound radiation in two and three dimensional sound fields. Beside the numerical calculations, the acoustic modes and the sound pressure level are measured by scale model experiments. The finite element analysis of the model shows very good agreement with the measured results.

I. 서 론

최근 대형컴퓨터의 급속한 발전과 함께 유한요소법은 건축물 내외의 음장을 예측하고 해석하는데 있어 이론 또는 실험적으로 풀기 어려운 임의의 대공간에 대한 음장문제에도 응용되어지는 유력한 수단이 되고

있다. 유한요소법에 의한 음장해석은 G.M.L. Gladwell에 의해 처음으로 응용되어졌으며, 그후 M. petyt, A. Craggs, Y. Kagawa 등의 수많은 논문이 발표되었고,¹⁻⁵⁾ 여러가지 범용성 프로그램(SAP4, NASTRAN 등)도 개발되어 있으나 건축 음향에 응용한 예는 매우 적고, 또한 범용성프로그램은 음장해석에 대한 기초이론이 부족한 경우 쉽게 이용되기 어려운 것이 현실이다. 따라서, 본 연구에서는 범함수가 존재하지 않는 문제나, 범함수를 찾아내지 못한 문제에도 쉽게 적용 가능한 웨이트드 잔차법(Method of weighted res-

* 동경대학대학원 건축학전공 박사과정, 재학중

** 동경대학 조교수, 공박

*** 전북대학교 건축공학과 교수, 공박

iduals) 즉, 일반적으로 아주 정도가 높은 근사해를 얻는 방법으로, 근사해를 결정하는 형상함수와 웨이팅 함수(weighting function)가 같다는 Galerkin법에 의해 정상음장문제의 Helmholtz 방정식에서 직접 유한요소 근사해를 유도하는 기초적인 이론의 고찰과 함께, 다음 2종류의 음장계산예를 연구한다.

(1) 건축물 내부의 음장 문제로서 3차원실내에 대한 고유모드를 수치계산에 의해 구하고, 축척모형실험에 의한 결과와 비교검토 한다.

(2) 건축물 외부의 음장 문제로서 건물주변의 반사 하도로에서 방사되는 소음의 방사상태 예측과 흡음재의 효과 등에 대한 2차원 모델을 해석한다.

II. Galerkin법에 의한 음장의 유한요소정식화

일반적으로 음장은 3차원이나, 2차원에서 3차원문제로 확장하는 것은 간단하기 때문에 여기에서는 2차원 음장 문제에 대해서 논한다. 음장을 지배하는 파동방정식은 각 주파수 ω 를 갖는 조화진동이라 가정하면 식(1)의 Helmholtz 방정식이 된다.

$$\nabla^2 p(x, y) + \frac{\omega^2}{c_0^2} p(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

여기서 ∇^2 은 Laplace 연산자, c_0 는 공기중의 음속, P 는 음압, Ω 는 음장영역(경계영역 $\partial\Omega$ 도 포함)을 나타낸다.

식(1)에 웨이팅함수 ψ 를 곱해 그림1에 나타낸 영역 Ω 를 적분한 후, 0라 놓으면

$$\int_{\Omega} \psi(x, y) \left(\nabla^2 p(x, y) + \frac{\omega^2}{c_0^2} p(x, y) \right) dx dy = 0 \quad (2)$$

Green의 정리에 의해

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi(x, y) \cdot \nabla^2 p(x, y) dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \psi(x, y) \frac{\partial p(x, y)}{\partial n} dl \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \quad (3) \end{aligned}$$

가 되므로 식(2)는

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. - \psi(x, y) \frac{\omega^2}{c_0^2} p(x, y) \right] dx dy \\ & - \int_{\partial\Omega} \psi(x, y) \frac{\partial p(x, y)}{\partial n} dl = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

이 된다. 여기서, $\partial p(x, y) / \partial n$ 은 그림1의 내부영역 Ω 의 경계 $\partial\Omega$ 에 있어서 음압 p 의 외향법선방향의 미분을 나타낸다.

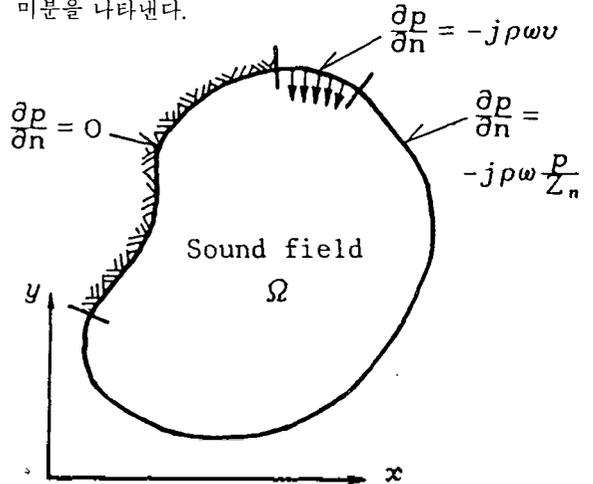


그림 1. 음장의 경계조건

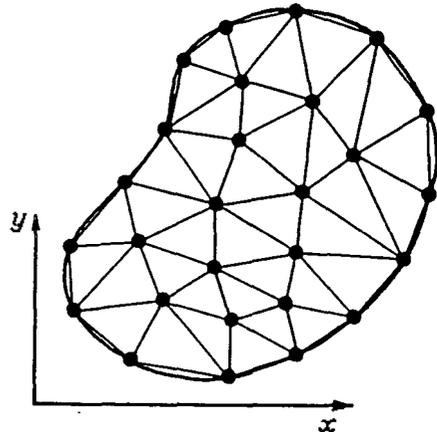


그림 2. 음장의 요소분할

음장의 경계조건으로는 다음 3종류를 든다.

$$\partial p(x, y) / \partial n = 0 \quad (5)$$

$$\partial p(x, y) / \partial n = -j\omega \frac{\partial p(x, y)}{Z_n} \quad (6)$$

$$\partial p(x, y) / \partial n = -j\omega v \quad (7)$$

여기서, $j = \sqrt{-1}$, ρ 는 공기의 밀도, Z_n 은 노말음향임피던스, v 는 법선방향의 진동속도를 나타낸다.

즉 식(5)는 음향적으로 완전반사성인 강벽, 식(6)은 노말음향임피던스가 주어지는 흡음벽, 식(7)은 진동속도가 주어지는 경계이다.

한편, 그림2에 나타낸 바와 같이 음장내부 영역을 유한요소로 분할해 각 요소내에 있어서의 음압 p 를 다음과 같이 가정한다.

$$p(x, y) = \{\phi_m\}^T \{p_m\} \quad (8)$$

여기서, m 은 요소 하나에 대한 절점수, $\{\phi_m\}$ 는 요소의 절점좌표로 이루어지는 형상함수, $\{p_m\}$ 은 요소의 절점음압, $\{ \}^T$ 는 벡터의 전치, $\{ \}$ 는 한 요소에 대응하는 것을 나타낸다.

또한, 웨이팅함수를 형상함수와 같다고 놓고, 식(4)에 식(8)을 대입하면 요소 하나에 대하여 다음 식이 된다.

$$\int_{\partial e} \left[\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\partial \phi_m^T}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_m^T}{\partial y} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} |\phi_m| |\phi_m^T| \right] \{p_m\}^e dx dy - \int_{\partial e} \phi_m \frac{\partial p(x, y)}{\partial n} dl = 0 \quad (9)$$

그리고 음장문제의 경계조건식 (5), (6), (7)을 고려해 정리하면, 다음과 같은 매트릭스로 나타낼 수 있다.

$$([K]^e - \omega^2 [M]^e + j\rho\omega [G]^e) \{p\}^e = \{F\}^e \quad (10)$$

여기서, $[K]^e$ 는 요소강성매트릭스, $[M]^e$ 는 요소질량 매트릭스, $[G]^e$ 는 요소감쇠매트릭스, $\{F\}^e$ 는 요소의력 진동벡터, $\{p\}^e$ 는 요소절점음벡터로서 각각 다음과 같이 나타내어진다.

$$[K]^e = \int_{\partial e} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\partial \phi_m^T}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_m^T}{\partial y} \right) dx dy$$

$$[M]^e = \frac{1}{c^2} \int_{\partial e} |\phi_m| |\phi_m^T| dx dy$$

$$[G]^e = \frac{1}{Z_n} \int_{\partial e} |\phi_m| |\phi_m^T| dl$$

$$\{F\}^e = -j\rho\omega \int_{\partial e} v \cdot |\phi_m| dl$$

하나의 요소에 대한 식(10)을 계산하여 전체요소

대해 중첩 결합시키면, 식(11)과 같이 절점음압 p 를 미지수로 하는 n 차원의 이산화된 복소연립 일차방정식이 된다.

$$(K - \omega^2 M + j\rho\omega G) \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (11)$$

그리고 식(11)에서 구해진 각 요소의 절점음압을 이용하면, 식(12)에 의해 임의의 위치에 대한 입자속도 (음압 p 의 미분치)를 계산할 수 있다.

$$U(x, y) = -\frac{1}{j\rho\omega} \nabla p(x, y) \quad (12)$$

또한 그 위치에 있어서의 음압과 입자속도의 복소공역을 식(13)과 같이 곱한 복소음향인텐시티를 구할 수 있다.

$$I_c = \frac{1}{2} p(x, y) \cdot U(x, y)^* \quad (13)$$

단, I_c 는 복소음향인텐시티, $U(x, y)^*$ 는 입자속도의 복소공역이다.

다음에는 감쇠와 외력진동이 없는 폐공간음장에 대한 고유치와 고유벡터의 계산방법에 대해서 논한다. 식(11)에 있어서 외력진동항과 경계의 감쇠항이 없으므로 식(11) 식(14)의 일반적인 고유치 문제가 되어 이식을 풀면 n 개의 고유치 및 고유벡터를 구할 수 있다.

$$(K - \omega_n^2 M) \{p_n\} = 0 \quad (14)$$

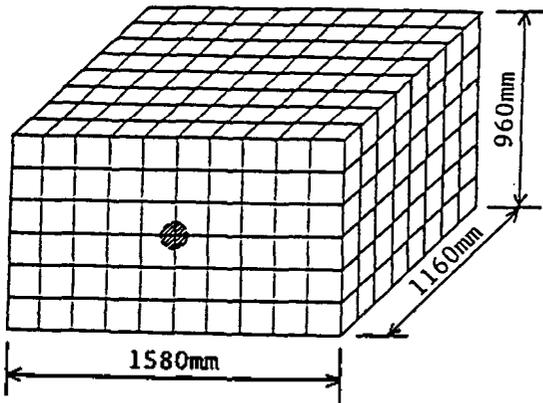
단, ω_n 는 고유치, p_n 는 고유벡터를 나타낸다.

III. 3차원실내음장에 대한 고유치 및 고유벡터 계산에

III-1. 계산의 개요

그림 3,4와 같이 두께 5cm의 아크릴판으로 만든 직방 체관향시를 사용해서 수치계산과 모형실험을 했다. 그림3은 해석적으로 쉽게 고유치를 구할 수 있는 직방 체실의 조건, 그림4은 하나의 면을 경사지게 만든

실이다.



693 Nodes
480 Elements

그림 3. 직방체모델의 치수와 요소분할

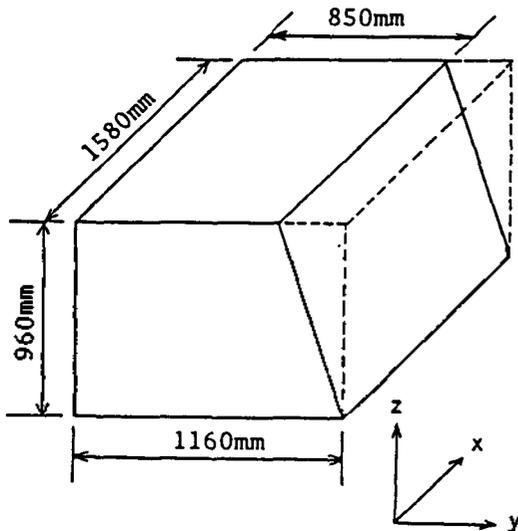


그림 4. 부정형모델의 치수

수치계산방법으로는 두 모델 똑같이 6면체 8절점요소
를 사용해 요소분할은 693절점, 480요소로 하였고,
경계조건은 완전반사로 했다. 또한 고유치와 고유벡터
의계산은 각각 바이섹션법, 역반복법을 이용했다.

실험방법으로는 스피커를 실내의 코너에 설치하

고, 여러 수음점에서 입력주파수를 변화시켜 가며
마이크로폰의 출력이 극대로 되는 점을 찾아 공진주파
수를 구했다.

또한 직방체실에 대한 이론 계산치는 다음 식으로
구했다.

$$f_{l,m,n} = \frac{c_0}{2} \sqrt{(l/L_x)^2 + (m/L_y)^2 + (n/L_z)^2}$$

$$l, m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

단, L_x, L_y, L_z 는 각각 x, y, z 방향의 치수를 나타낸
다.

III-2 계산 및 실험결과

표1은 그림3의 조건에 대한 수치계산 식(15)에 의한
계산 및 실험에 의해 구한 고유주파수를 비교한 것이
고, 표2는 그림4의 부정형실에 대한 수치계산과 실험
결과를 비교한 것으로, 두 조건 모두 오차는 2%이하로
서 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

그림5는 그림4의 부정형실의 조건에 있어서 수치계
산으로 구한 고유주파수 185.85Hz, 214.97Hz, 218.74
Hz 등 각각의 고유모드 그림이다.

참고로 그림6은 그림3의 사선부분을 정현파 125Hz
와 250Hz로 피스톤진동시킨 경우 음장내 임의의 단면
에 대한 등음압을 나타낸 것이다. 수치계산결과와
실험치가 잘 맞는 것을 알 수 있다.

표 1. 직방체모델에 대한 고유주파수의 비교

Mode	by FEM (Hz)	by Theory (Hz)	實驗値 (Hz)
1,0,0	109.07	107.59	108.8
0,1,0	147.50	146.55	149.1
0,0,1	179.11	177.08	178.0
1,1,0	183.44	181.81	183.0
2,0,0	209.71	207.21	208.2
0,1,1	232.04	229.86	230.2
1,1,1	256.38	253.80	255.0
2,1,0	265.57	260.35	260.3
2,0,1	284.35	278.68	279.8
2,1,1	319.85	314.87	316.7

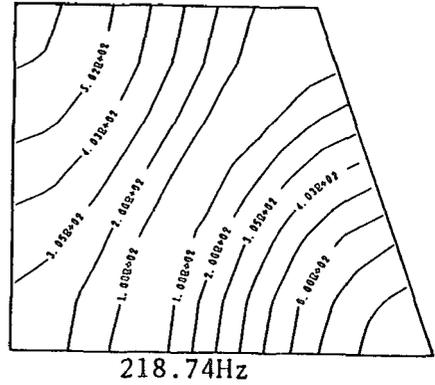
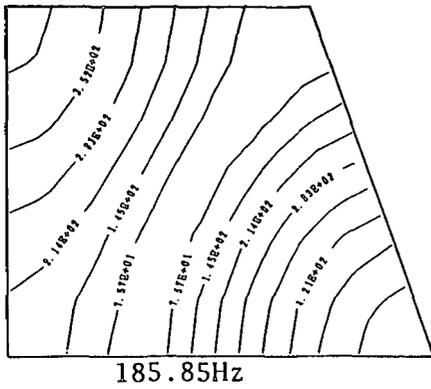
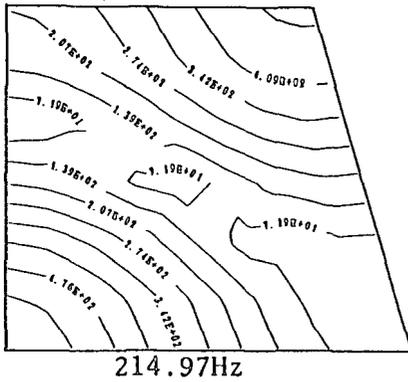


그림 5. 부정형 모델에 대한 상대음압분포



IV. 반지하도로로부터의 음향방사 계산에

IV-1. 수치계산의 개요

최근 여러나라의 대도시근교에서는 소음대책 혹은 경관상의 이점때문에 반지하구조도로가 설치되는 경우가 많다. 그러나 폐공간에 가까운 반지하구조도로

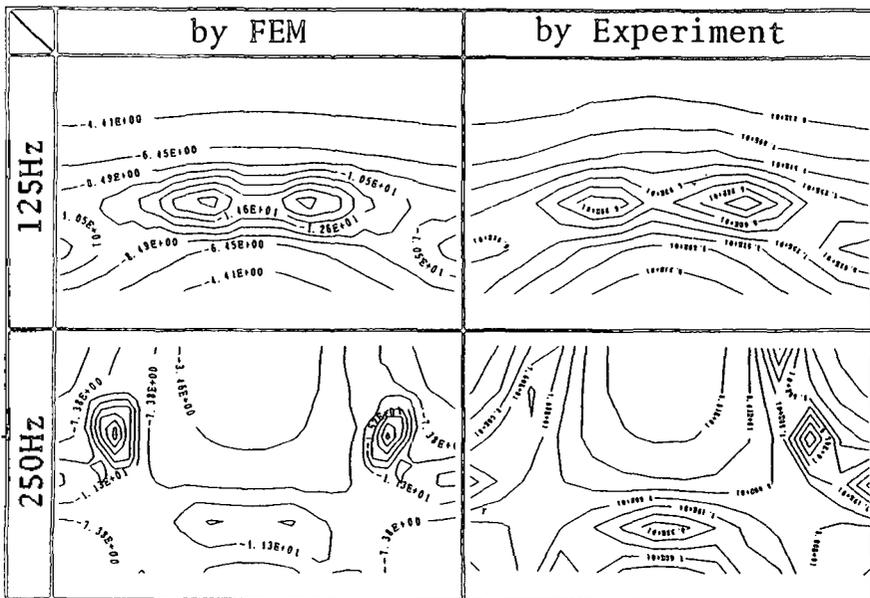
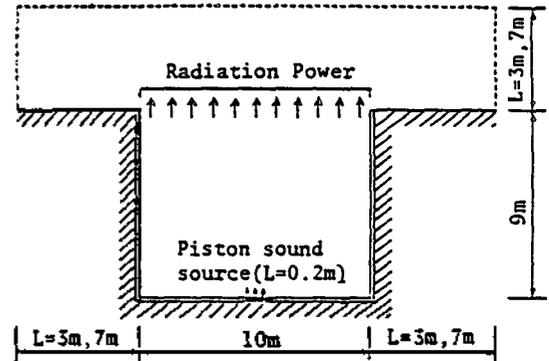


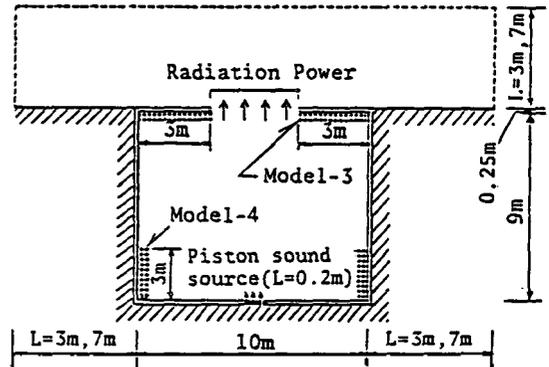
그림 6. 수치계산과 실험에 의한 음압분포

표 2. 부정형모델에 대한 고유주파수의 비교

Mode	by FEM (Hz)	實驗值 (Hz)
1	108.04	108.5
2	160.89	160.2
3	185.85	184.5
4	214.97	214.3
5	218.74	-
6	248.77	248.0
7	271.22	271.9
8	287.04	284.1
9	331.47	284.1
10	334.82	-
11	335.17	-
12	352.15	353.4
13	367.47	-
14	371.47	370.0
15	382.95	381.5
16	392.42	-
17	400.23	369.9
18	407.02	409.1
19	417.13	414.7
20	427.54	430.2



(a) Model-1



(b) Model-2

그림 7. 수치계산모델의 개요

에서의 소음발생 및 외부공간으로서의 전파상태는 매우 복잡하다. 따라서 계산모델로서는 그림7에 나타낸 바와 같이 반지하구조인 도로중앙의 노면에 피스톤 음원(진동속도일정: 길이 20cm)을 설치해 음원에서 음이 방사되는 단순화한 2차원모델을 설정한 후, 뚜껑의 유무, 흡음재의 배치에 따른 방사파워의 변화에 대해서 검토했다. 그리고 계산모델의 경계조건으로는 다음의 4조건으로 했다.

모델 1: 뚜껑이 없고, 벽과 도로면은 음향적으로 완전반사(그림7 (a))

모델 2: 모델1과 같고 뚜껑이 있는 경우(그림7 (b))

모델 3: 모델2의 뚜껑부분을 흡음(음압반사율(실수 부분 뿐)은 80% 일정) (그림7 (b))

모델 4: 모델3과 같으나 뚜껑대신에 벽을 흡음(그림 7 (b))

또한 계산영역으로는 그림7의 파선으로 나타낸 가상경계를 자유공간에 설정하고, 이 경계로부터 외부로 본 음향임피던스로는 공기의 특성임피던스와 같다고 했다. 그림중의 L은 계산주파수의 1파장 보다 길게 하기 위하여 45-150Hz는 7m, 151-355Hz는 3m로 했다. 계산에는 9절점 사각형요소를 사용하였고, 요소분할은 모델이 대칭이므로 영역의 반만을 대상으로 해, 모델1은 45-150Hz에서 593절점 133요소, 151-355Hz에서는 1195절점 278요소, 다른 3개의 모델은 45-150Hz에서 609절점 135요소, 151-355Hz에서는 1225절점 282요소로 했다.

모델간의 비교로는 모델의 개구면(선)으로 부터 방사되는 전음향파워를 대상으로해, 그 부분의 음향인텐시티에 대한 수직방향성분의 적분에 의해 구했다.

IV-2. 계산결과와 그 검토

그림8은 모델1과 2에 대한 방사파워의 비교로서 모델2의 경우가 1에 비하여 주파수에 대한 방사파워의

변화가 심한 것을 알 수 있는데, 그 원인으로는 폐공간에 대한 음장의 리액티비티가 크기 때문으로 생각된다. 그림9에 양 조건에서 63Hz와 125Hz의 음향인텐시티 흐름의 상태를 나타낸다.

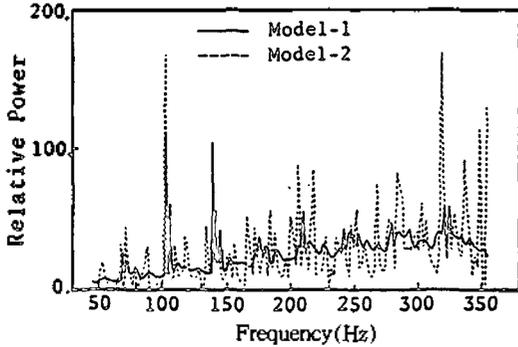


그림 8. 모델 1, 2에 대한 음향방사파워의 비교

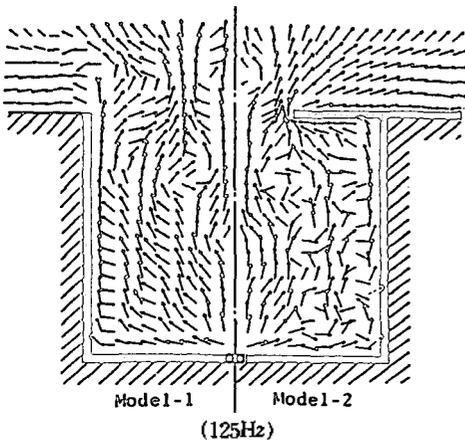
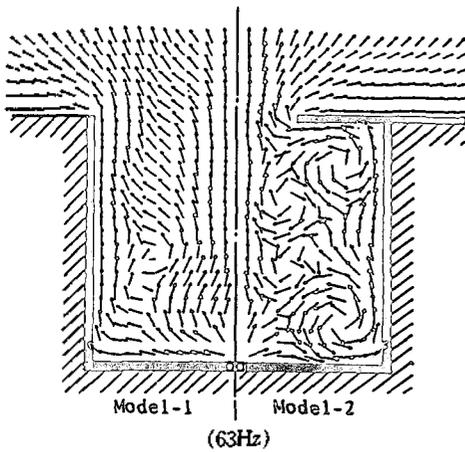


그림 9. 모델 1, 2의 음압인텐시티흐름도

그림10은 흡음재의 배치에 따라 방사파워의 차이를 나타낸 것으로, 뚜껑부분을 흡음한 모델3의 경우가 모델4와 비교해 103Hz와 139Hz에서는 방사파워가 크나, 기타 다른 주파수에 있어서는 전체적으로 작은 것을 알 수 있다. 그림11은 그림10에서 피크를 나타내고 있는 103, 286, 337Hz를 대상으로 음압반사율을 0%에서 100%까지 변화시키면서 모델3과 4를 각각의 조건에서 계산한 방사파워를 비교한 것이다. 그 결과 흡음재의 배치에 의한 차이가 현저하게 나타나 있다.

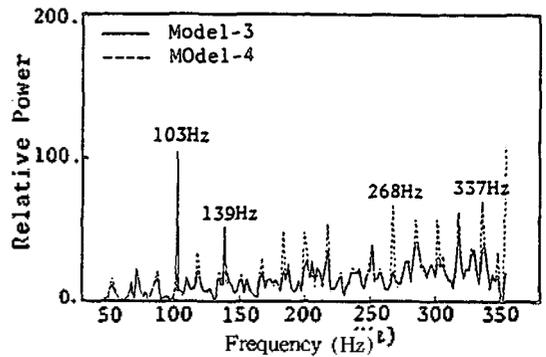


그림 10. 모델 3, 4에 대한 음향방사파워의 비교

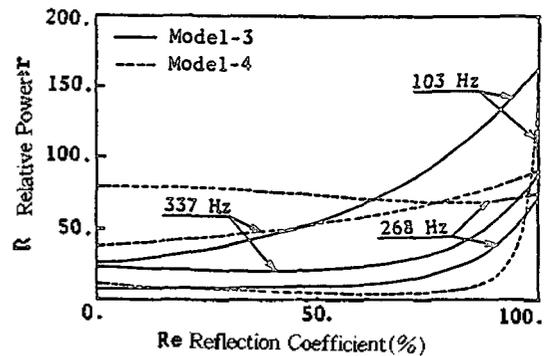
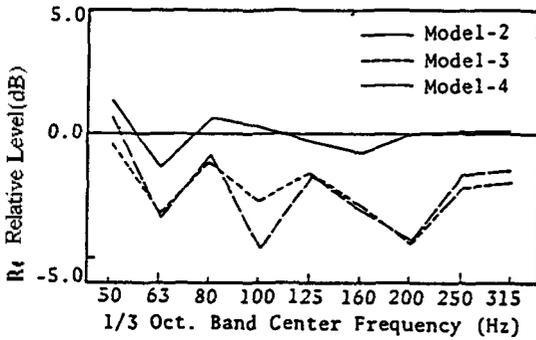


그림 11. 반사율의 변화에 따른 흡음재의 배치효과

또한, 방사파워레벨을 1/3 oct. 밴드별로 정리해 모델간 비교결과를 그림12에 나타낸다. 여기서는 모델 1의 방사파워레벨을 기준(0 dB)으로 했다. 그림에서 알 수 있듯이 흡음을 하지 않은 경우 뚜껑을 설치한 것 만으로는 방사파워의 감쇠효과가 거의 없으나 흡음을 하므로써 1 dB에서 5dB 정도의 감쇠효과가 나타났다. 그리고 흡음재의 위치에 의한 차이는 100Hz 밴드를 제외하면 큰 차는 없다 할 수 있겠다.



결 론

유한요소법을 음장해석에 응용하는 기초이론의 고찰과 함께 간단한 음장모델에 대한 수치해석 결과를 논했다. 유한요소법은 식(1)로 지배되는 음장에 대해 임의의 경계조건하에서도 풀 수 있다고 하는 큰 이점을 가지고 있기 때문에 건축음향설계, 도로소음방지 등 여러분야의 음장에측수단으로 응용가능하다는 것을 알 수 있었다.

본 연구에서는 비교적 간단한 정상음장문제에 대한 해법과 그 응용에 대해서 논했으나, 앞으로 유한요소법과 신호처리법(FFT 등)의 결합으로 비정상음장의 예측방법 및 음장의 연성해법 등에 대한 검토가 기대된다.

참 고 문 헌

1. G.M.L. Gladwell, "A finite element method for acoustics," 5 Congress International d'Acoustique, Liege, Paper L33, 1965.
2. M. Petyt, J. Lea and G.H. Koopmann, "A finite element method for determining the acoustic modes of irregular shaped cavities," J. sound Vib., Vol 45, No 4, 1976.
3. A. Craggs, "Sound Transmission between Enclosures-A Study using Plate and Acoustic Finite Elements," Acustica, Vol 35, No 2, 1976, pp. 89-98.
4. A. Craggs, "Coupling of Finite Element Acoustic Absorption Models," J. Sound Vib., Vol 66, No 4, 1979, pp. 605-613.
5. Y. Kagawa, T. Yamabuchi and A. Mori, "Finite Element Simulation of Acoustic Filters with Sound-absorbing Wall," 일본음향학회지, Vol. 133, No 5, 1977, pp. 259-266.
6. S.J. Choi, Y. Hidaka and H. Tachibana, "Sound field analysis of semi-underground road by Finite Element Method," 일본음향학회강연논문집, 1988년 10월.
7. S.J. Choi, Y. Hidaka and H. Tachibana, "Analysis of sound fields by Finite Element Method(Part1: Application to normal mode analysis)," 일본건축학회대회학술강연경개집, 1988년 10월.
8. S.J. Choi, Y.Hidaka and H.Tachibana, "Estimation of impulse response in a sound field by Finite Element Method", 일본음향학회강연논문집, 1988년 10월.
9. E.R. Geddes and J.C. Porter, "Finite element approximation for low-frequency sound in a room with absorption", J.Acoust. Soc.Am., Vol 83, No4,1988
10. D.J. Nefske, J.A. Wolf, Jr and L.J. Howell, "Structural-acoustic finite element analysis of the automobile passenger compartment of the review of current practice", J.Sound Vib., Vol 80, No2, 1982, pp247-266

▲최 석 주 1958년 1월 11일생
 1980년 2월 전북대학교 건축학과 졸업
 1985년 2월 전북대학교 대학원 건축학과 수료(공학석사)
 1987년 3월 동경대학 대학원 건축학과 수료(공학석사)

▲橋秀樹 8권3호 참조
 ▲朴標瑄 8권2호 참조

현재 동경대학 대학원 박사과정 중