

수평 비원형이중관 사이의 환상공간에서의 자연대류

Natural Convection in the Annulus between Horizontal Non-Circular Cylinders.

배 대 석,* 권 순 석**
D. S. Bai, S. S. Kwon

ABSTRACT

Laminar natural convection heat transfer in the annulus between isothermal horizontal non-circular cylinders is studied by solving the Navier-Stokes and energy equation using an elliptic numerical procedure. Results are obtained to determine the effects of the diameter ratio(D_o/D_i) and Rayleigh number on heat transfer. The diameter ratio is varied from 1.5 to 13.0 at $Pr=0.7, H/L=1.5$ and $10^3 \leq Ra_L \leq 4 \times 10^4$. It is found that the diameter ratio causes a more significant on the local heat transfer coefficient of lower semi-circular cylinder and plate than upper semi-circular cylinder. The mean Nusselt number increases as the diameter ratio and Rayleigh number increase, and is higher than that of the circular annulus with a same wetted perimeter.

기 호 설 명

D : 비원형관의 직경

g : 중력가속도

H : 비원형관의 평판길이

H_L : 간격길이기준 무차원 평판길이, H/L

h : 대류열전달 계수

k : 열전도율

L : 간격길이, $R_o - R_i$

Nu : Nusselt 수, $h L/k$

O : 종속변수

P : 비원형관 접수길이, $\pi D_i + 2H$

Pr : Prandtl 수

p : 무차원 접수길이, P/D_i

R : 반경방향 좌표

Ra : Rayleigh 수, $g \cdot \beta \cdot L^3 \Delta T / \nu \cdot \alpha$

r : 무차원 반경방향 좌표, R/L

T : 온도

ΔT : 온도차, $T_i - T_o$

U : 속도

u : 무차원 속도, $U L/\alpha$

W : 와도

w : 무차원 와도, $W L/\alpha$

X : 수평방향 좌표

x : 무차원 수평방향 좌표, $X L/\alpha$

Y : 수직방향 좌표

y : 무차원 수직방향 좌표, $Y L/\alpha$

α : 열확산율

* 동아대학교 대학원 기계공학과

** 정희원, 동아대학교 공과대학 기계공학과

- β : 체적팽창계수
- ν : 동점성계수
- θ : 원주방향 좌표
- ϕ : 무차원 온도, $(T-T_0)/\Delta T$
- Ψ : 유동함수
- ψ : 무차원 유동함수, Ψ/α
- <첨 자>
- D_i : 내부관직경기준
- i : 내부관
- J : 원주방향 및 수직방향 격자점 번호
- L : 간격길이기준
- o : 외부관
- p : 임의의 격자점
- r : 반경방향
- x : 수평방향
- y : 수직방향
- θ : 원주방향
- MAXI : 반경방향 최대 격자
- NE, SE, NW, SW : 격자점 p 에 인접한 격자점 위치
- : 평균

1. 서 론

자연대류는 중력장내에서 유체가 가열 또는 냉각되는 과정에서 밀도변화로 생기는 현상으로 강제대류와 함께 혼합되어 발생되기도 한다. 그러나 유체를 강제적으로 유동시키는 것이 불가능하거나 허용되지 않을 때는 자연대류만이 열전달을 위하여 중요하게 다루어 진다. 따라서 여러가지 기하학적 형상에 대하여 많은 연구가 수행되었다. 그 중 밀폐공간내에서의 자연대류는 주로 사각밀폐공간, 원형밀폐공간 또는 환상공간 등에 대한 것이며, 특히 환상공간은 수평동심 원형환상공간에 대한 것이다.^{1,2)} 그러나 최근에는 단순형상보다 해석이 복잡한 형상이나 특수형상에 대한 연구도 수행되고 있다.

Kwon 등³⁾은 3개의 격판을 가진 환상공간에서 격판의 위치, 열전도율 및 직경비 등의 영향을 연구하였고, Karim 등⁴⁾은 수직단열벽 사이에 수평원관이 있는 형상에 대하여 연구

하였다. Kuehn 등⁵⁾은 편심된 이중관에서 편심도가 자연대류 열전달에 미치는 영향을 실험적으로 연구하였고, Projahn 등⁶⁾은 같은 형상에 대하여 수치해석하였다. Lee 등⁷⁾은 수평 타원형 이중관에 대하여 연구하였으며, Chang 등⁸⁾은 원관으로 둘러싸인 사각형관의 위치와 형상비의 영향에 대하여 연구하였다.

본 연구에서는 반원관과 평판으로 조합된 비원형 이중관내의 밀폐공간에서 Rayleigh 수와 직경비가 자연대류 유동과 열전달에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

2. 수치해석

수평동심 원형 환상공간의 측면이 수직평행 평판으로된 비원형 환상공간의 도시적 형상은 Fig.1과 같다. 비원형 환상공간을 해석하기

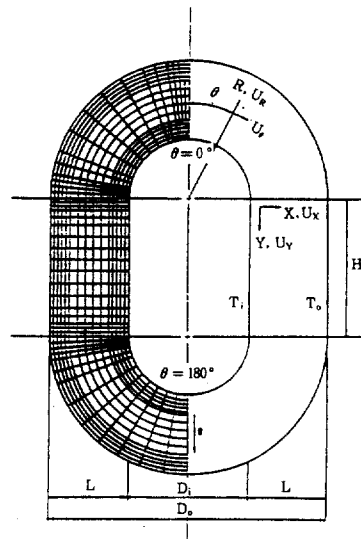


Fig.1 Schematic diagram of the geometry investigated

위하여 원형영역과 사각영역에 각각 원통좌표계와 직각좌표계를 사용하였다. 두 좌표계를 사용할 때 발생하는 두 좌표계 연결문제는 Fig. 2에서 보는 바와 같이 각 좌표계에서의 false 격자점을 인접된 4개 격자점을 사용하여 보간법으로 구하였으며, false 격자점 식은 다음과 같다.⁹⁾

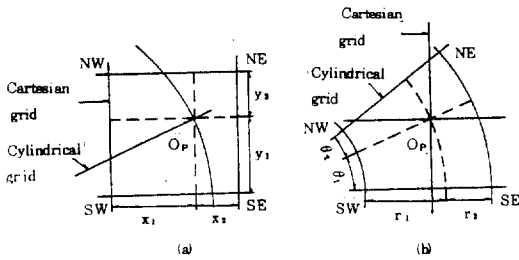


Fig. 2 Notation for linear-interpolation scheme for false nodes (a) cylindrical nodes, (b) Cartesian nodes

1) 원통 false 격자점

$$O_p = \frac{\left(\frac{O_{NE} \cdot x_1 + O_{NW} \cdot x_2}{x_1 + x_2} \right) \cdot y_1 + \left(\frac{O_{SE} \cdot x_1 + O_{SW} \cdot x_2}{x_1 + x_2} \right) \cdot y_2}{y_1 + y_2} \dots\dots\dots (1)$$

2) 직각 false 격자점

$$O_p = \frac{\left(\frac{O_{NE} \cdot r_1 + O_{NW} \cdot r_2}{r_1 + r_2} \right) \cdot \theta_1 + \left(\frac{O_{SE} \cdot r_1 + O_{SW} \cdot r_2}{r_1 + r_2} \right) \cdot \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \dots\dots\dots (2)$$

유동장과 온도장을 해석함에 있어 유체는 비압축성이고, Boussinesq 근사를 사용하였으며 복사열전달과 점성소산을 무시하였다. 각 좌표계에서 2차원, 정상상태, 종류, 자연대류 무차원 지배방정식은 다음과 같다.¹⁰⁾

1) 원통좌표계

$$\nabla^2 \phi = -w \dots\dots\dots (3)$$

$$\nabla^2 w = \frac{1}{Pr} \left(u_r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + Ra \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (4)$$

$$\nabla^2 \phi = u_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \dots\dots\dots (5)$$

여기서,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad w = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_r) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

2) 직각좌표계

$$\nabla^2 \phi = -w \dots\dots\dots (6)$$

$$\nabla^2 w = \frac{1}{Pr} \left(u_x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + u_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Ra \frac{\partial \phi}{\partial x} \dots\dots\dots (7)$$

$$\nabla^2 \phi = u_x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \dots\dots\dots (8)$$

여기서,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

식(3), (6)은 각 좌표계에서의 연속방정식, 식(4), (7)은 운동량방정식, 식(5), (8)은 에너지방정식이다. 본 논문에서 고려하는 형상은 좌우대칭이므로 한쪽 영역에서만 계산하였으며 여기에 적용되는 경계조건은 다음과 같다.

1) 원형영역

내부 비원형관표면

$$u_r = u_\theta = \phi = 0, \quad \phi = 1, \quad w = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \dots\dots\dots (9)$$

외부 비원형관표면

$$u_r = u_\theta = \phi = 0, \quad \phi = 0, \quad w = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \dots\dots\dots (10)$$

대칭축

$$u_\theta = \phi = w = \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

2) 사각영역

내부 비원형관표면

$$u_x = u_y = \phi = 0, \quad \phi = 1, \quad w = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \dots\dots\dots (12)$$

외부 비원형관표면

$$u_x = u_y = \phi = 0, \quad \phi = 0, \quad w = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \dots\dots\dots (13)$$

무차원 지배방정식을 수치해석하기 위하여 유한차분법을 적용하였고, 수렴속도와 계산의 안정성 확보를 위하여 연속완화법(successive relaxation scheme), 중심차분법(central difference scheme) 및 hybrid법을 사용하였다. 격자(grid) 간격은 plume, 두 좌표면결부분 및 내외부관표면 부근에서는 조밀하게 두고

나머지 영역은 배로 증가시켜 격자수를 원통 좌표계에서는 반경방향으로 16개 원주방향으로 31개로 분할하여 16×31격자를 만들었고, 직각좌표계에서는 수평방향으로는 원통좌표계의 반경방향 격자수와 같이 16개 수직방향으로는 18개로 분할하여 16×18격자를 만들었다. 계산기는 32비트 퍼스날 컴퓨터를 사용하였으며 한개의 해를 구하는데 약 30분 정도 소요되었다. 수렴기준은 다음과 같으며, B는 유동함수 또는 온도를 나타내고 상첨자 m은 반복회수를 나타낸다.

$$\left| \frac{B^m - B^{m-1}}{B^m} \right| \leq 10^{-3} \dots\dots\dots (14)$$

내외부관 표면의 국소 Nusselt 수 및 평균 Nusselt 수는 다음과 같이 계산하였다.

국소 Nusselt 수

$$Nu_i = \frac{h_i \cdot L}{k} = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{h, j} \dots\dots\dots (15)$$

$$Nu_o = \frac{h_o \cdot L}{k} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{Max1, j} \dots\dots\dots (16)$$

평균 Nusselt 수

$$Nu_i = \frac{h_i \cdot L}{k} = \frac{1}{P} \int_0^P Nu_i \cdot ds \dots\dots\dots (17)$$

$$Nu_o = \frac{h_o \cdot L}{k} = \frac{1}{P} \int_0^P Nu_o \cdot ds \dots\dots\dots (18)$$

3. 결과 및 검토

직경비의 영향을 수치해석으로 연구할 때 두 가지 방법이 있다. 첫째는 Ra_{D_i} 기준으로 내부관의 직경을 일정하게 두고 내부관과 외부관 사이의 간격을 변화시키는 방법이고, 둘째는 Ra_L 기준으로 내, 외부관 간격을 일정하게 두고 내부관 직경을 변화시켜 상대적 직경비 변화의 영향을 검토하는 방법이다. Kuehn²⁾은 첫번째의 방법으로 원형환상공간에서 직경비의 영향을 검토하였다. Ra_{D_i} 기준으로 연구할 때 내, 외부관 사이의 간격이 적은 경우 열전달은 주로 전도에 의하여 이루어지고 Ra_{D_i} 의 영향은 거의 받지 않는다. 이는 유체유동이 *creeping flow*에 접근하고, 간격을 기준으로 한 Ra_L 값이 매우 작아지기 때문이다.

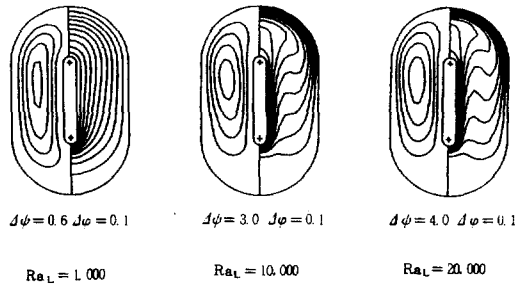


Fig. 3 Streamlines and Isotherms for $Pr=0.7$, $D_o/D_i=9.0$, $H/L=1.5$

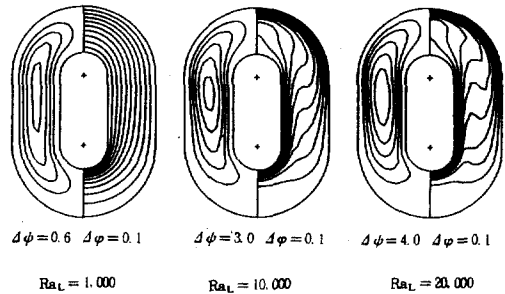


Fig. 4 Streamlines and Isotherms for $Pr=0.7$, $D_o/D_i=3.0$, $H/L=1.5$

본 연구에서는 비원형 환상공간에서의 직경비의 영향을 Ra_L 기준으로 하여 $10^3 \leq Ra_L \leq 4 \times 10^4$, $1.5 \leq D_o/D_i \leq 13.0$ 범위에서 검토하였다. Fig. 3과 Fig. 4는 각각 $D_o/D_i=3.0$ 과 $D_o/D_i=9.0$ 일 때 Ra_L 수에 따른 등온선과 streamlines을 나타낸다. $Ra_L=10^3$ 에서는 거의 전도에 의하여 열전달이 이루어지고 $Ra_L=10^4$ 이상에서는 반경방향 온도역전 현상이 나타나 내부관과 외부관의 온도경계층 분리가 이루어지며 직경비가 크면 온도역전이 더 크게 나타난다. 한편 유동은 Ra_L 수가 증가하면 증가하나, 직경비가 증가하면 오히려 감소한다. 이것은 Ra_{D_i} 기준으로 할 때와 상이한 점으로 Ra_{D_i} 기준일 때는 직경비가 증가하면 외부경계가 내부관 부근의 유체유동에 영향을 적게 미쳐 유동이 증가하나 Ra_L 기준에서는 직경비가 증가하면 상대적으로 내부관의 전열면적이 감소하여 유동이 감소하기 때문이다. Fig. 5는 직경비가 작은 $D_o/D_i=1.5$ 일 때 $Ra_L=1,000$ 과 5,000에서의 등온선과 streamlines을 각

각 나타낸다. 여기서 $Ra_L=1,000$ 일 때는 앞의 경우와 같으나 $Ra_L=5,000$ 일 때는 위대칭면 부근에서 count-rotating cell이 나타낸다. 이러한 현상은 원형환상공간에 대한 Powe¹⁾의 실험에서는 나타나나 동일현상에서 Ra_{Di} 기준으로 한 Kuehn²⁾의 경우에는 나타나지 않는다. 이 때 Ra_L 수는 층류에서 난류로 천이되는 Powe¹⁾의 천이선 위의 값에 해당되며 원형환상공간에 대한 Powe¹⁾의 실험결과와 일치한다. Fig. 6은 직경비가 비원형관의 국소 Nusselt 수 분포에 미치는 영향을 나타낸다. 내부관에서는 직경비가 증가할수록 국소 Nusselt 수는 전체적으로 증가하며, 상부반원관과 평판상부보다는 하부반원관과 평판하부에서 크게 증가한다. 이는 직경비가 증가할수록 계산 영역내에서 내부관의 전열면적에 비해 저온의

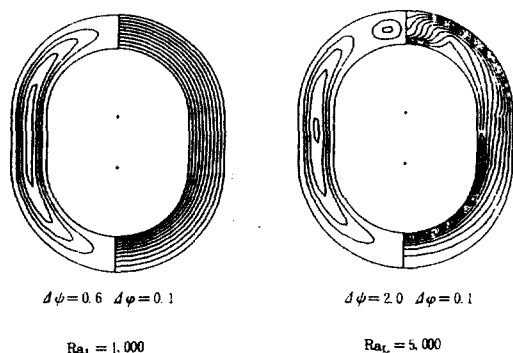


Fig. 5 Streamlines and isotherms for $Pr=0.7$, $D_o/D_i=1.5$, $H/L=1.5$

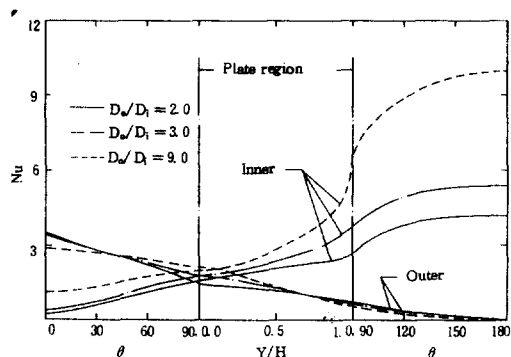


Fig. 6 Local Nusselt distribution around non-circular with different diameter ratios at $Ra_L=10^4$, $Pr=0.7$, $H/L=1.5$

유체가 많아지기 때문인 것으로 고려된다. 한편 외부관에서는 직경비가 증가할수록 상부반원관의 상부와 평판의 하단과 하부반원관에서는 감소하고 그 이외의 부분에서는 증가하며, 직경비의 변화가 국소 Nusselt 수에 미치는 영향은 내부관에서보다 작다. 그러나 직경비가

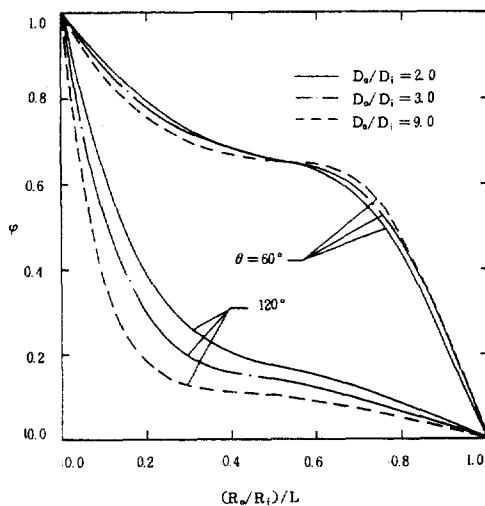


Fig. 7 Dimensionless temperature distribution for the circular region of a non-circular cylinder at $Ra_L=10^4$, $Pr=0.7$, $H/L=1.5$

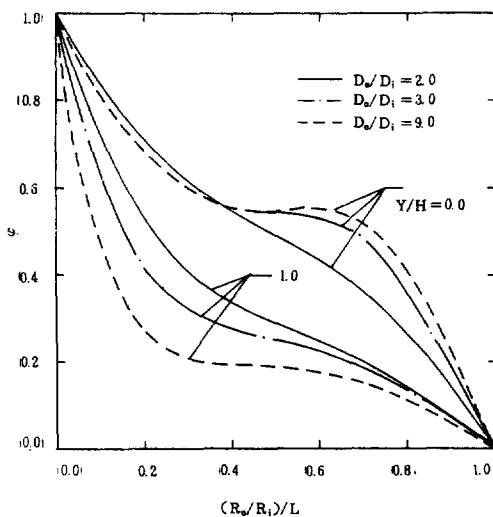


Fig. 8 Dimensionless temperature distribution for the plate region of a non-circular cylinder at $Ra_L=10^4$, $Pr=0.7$, $H/L=1.5$

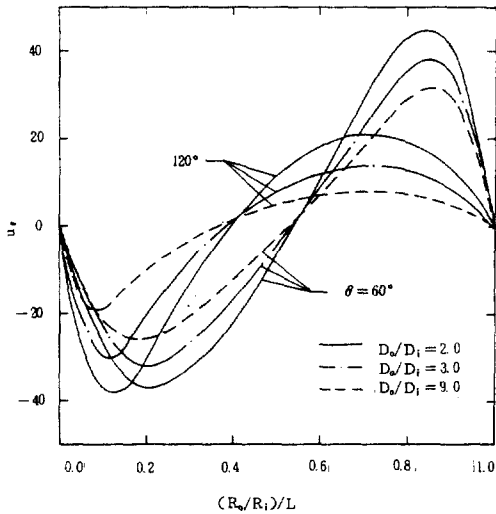


Fig. 9 Dimensionless angular velocity distribution for the circular region of a non-circular cylinder at $Ra_L=10^4$, $Pr=0.7$, $H/L=1.5$

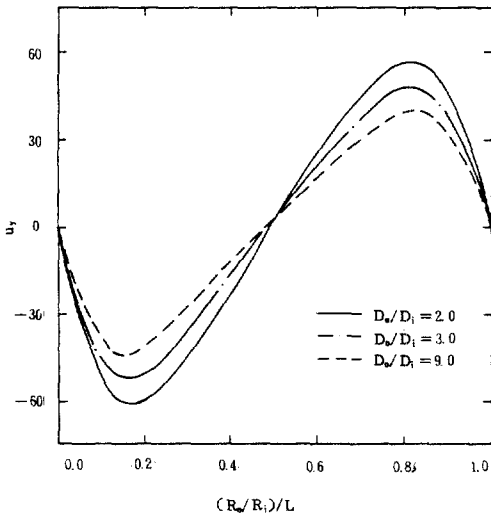


Fig. 10 Dimensionless vertical velocity distribution for the plate region of a non-circular cylinder at $Ra_L=10^4$, $Pr=0.7$, $H/L=1.5$

증가할수록 외부관의 전열면적이 상대적으로 증가하므로 내부관과 외부관에서의 열평형은 유지한다. Fig. 7과 Fig. 8은 직경비가 비원형 환상공간의 원형영역과 사각영역에서의 무차원 온도분포에 미치는 영향을 나타낸다. 하부

반원관에 해당되는 $\theta=120^\circ$ 와 평판상단인 $Y/H=1.0$ 에서는 직경비가 증가할수록 내부관 부근에서는 온도구배가 증가하고 외부관 부근에서는 감소하나, 상부반원관에 해당되는 $\theta=60^\circ$ 와 평판상단인 $Y/H=0.0$ 에서는 직경비가 증가할수록 내, 외부관 부근에서의 온도구배가 모두 증가한다. 이는 온도역전현상이 직경비가 증가할수록 더 잘 일어나기 때문이다. 따라서 Fig. 6에서 보는 바와 같이 외부관의 국소 Nusselt 수가 온도역전현상이 일어나는 부분에서는 직경비가 증가할수록 증가하는 결과를 가져왔다. Fig. 9와 Fig. 10은 직경비가 원형영역의 원주방향 속도 분포와 사각영역의 수직방향 속도분포에 미치는 영향을 나타낸다. 최대속도는 하부반원관에서는 내부관 가까이에서, 상부반원관에서는 외부관 가까이에서 발생하고 직경비가 증가할수록 속도는 감소한다. 이는 직경비가 증가할수록 내부관의 전열면적 감소하여 유체유동이 감소하기 때문이다. 따라서 Fig. 11에서 보는 바와 같이 유동함수가 직경비가 증가할수록 감소한다. 최대유동함수는 내, 외부관 중심에 있다. Fig. 12는 직경비와 Ra_L 수가 평균 Nusselt 수에 미치는 영향을 나타낸다. Ra_L 수와 직경비가 증가할수록 평

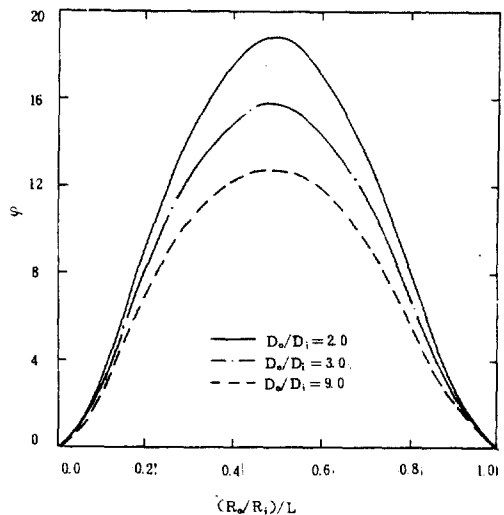


Fig. 11 Dimensionless stream function distribution at $Ra_L=10^4$, $Pr=0.7$, $H/L=0.7$, $Y/H=0.5$

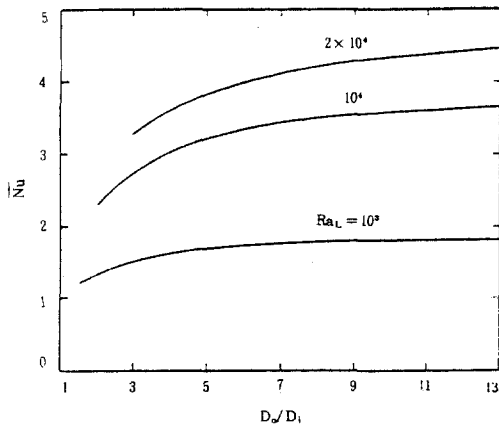


Fig. 12 Mean Nusselt number of non-circular cylinder with different diameter ratios for various Rayleigh number at $Pr=0.7, H/L=1.5$

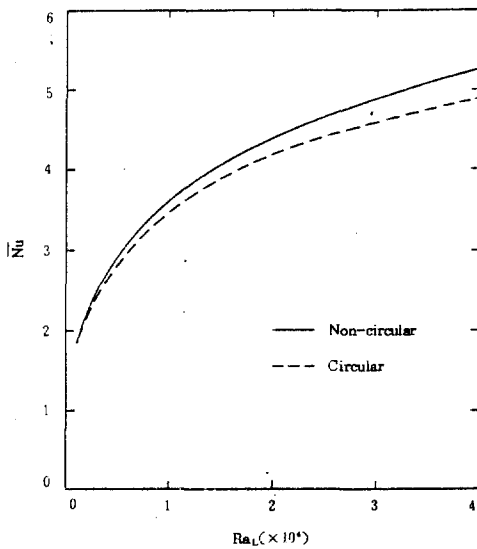


Fig. 13 Comparison of mean Nusselt number of the non-circular cylinder with the circular cylinder at $Pr=0.7, H/L=1.5$

평균 Nusselt 수는 증가하며 층류 정상상태방정식에 의한 수렴 한계는 Ra_L 수와 직경비에 영향을 받는다. 이는 원형환상공간의 경우와 같다. Fig.13은 직경비 $D_o/D_i=13.0$ 일 때 Ra_L 수에 따른 비원형관의 평균 Nusselt 수를 나타내고 동일접수길이를 같은 원형관의 경우와 비교하였다. 비원형관의 평균 Nusselt 수는 원형

관보다 Ra_L 수가 증가할수록 증가하여 $Ra_L=4 \times 10^4$ 일 때 약 8.4% 증가하였다.

4. 결 론

비원형 환상공간에서 직경비의 변화가 자연 대류 열전달에 미치는 영향을 $Pr=0.7, H/L=1.5$ 일 때 $D_o/D_i=1.5 \sim 13.0$. 그리고 $Ra_L=10^3 \sim 4 \times 10^4$ 에 대하여 유한차분법으로 수치 해석한 결과 다음과 같다.

1) 국소 Nusselt 수는 직경비 D_o/D_i 가 증가함에 따라 내부관에서는 전체적으로 증가하며 상부반원관과 평판상단보다는 하부반원관과 평판하단에서 크게 증가하나, 외부관에서는 변화가 적다.

2) 평균 Nusselt 수는 직경비와 Rayleigh 수가 증가함에 따라 증가하며 동일 접수길이를 갖는 원형환상공간보다 증가하고 $Ra_L=4 \times 10^4, D_o/D_i=13.0$ 일 때 약 8.4% 증가하였다.

3) 정상상태 층류유동의 수렴 한계는 직경비와 Rayleigh 수에 영향을 받으며 직경비가 작을 때 ($D_o/D_i=1.5$) 저 Rayleigh 수 ($Ra_L=5,000$)에서 count-rotating cell 이 발생하였다.

참 고 문 헌

1. R.E. Powe, C.T. Carley and E.H. Bishop, "Free convection flow patterns in cylindrical annuli", ASME J. Heat Transfer, Vol. 91, pp.310-314, 1971.
2. T.H. Kuehn "Natural convection heat transfer from a horizontal circular cylinder to a surrounding cylindrical enclosure", ph.D. Thesis, University of Minnesota, 1976.
3. S.S. Kwon, T.H. Kuehn and T.S. Lee, "Natural convection in the annulus between horizontal circular cylinders with three axial spacers", ASME J. Heat Transfer, Vol.104, pp.118-124, 1982.
4. F. Karim, B. Farouk and I. Namer, "Na-

- tural convection heat transfer from a horizontal cylinder between vertical confining adiabatic walls", ASME J. Heat Transfer, Vol.108, pp.291-298, , 1986.
5. T.H. Kuehn and R.J. Goldstein, "An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli", ASME J. Heat Transfer, Vol.100, pp.635-640, 1978.
 6. U. Projahn, H. Rieger and H. Beer, "Numerical analysis of laminar natural convection between concentric and eccentric cylinders", Numerical Heat Transfer, Vol. 4, pp.131-146, 1981.
 7. J.H. Lee and T.S. Lee, "Natural convection in the annuli between horizontal convection elliptic cylinders", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.24, No.10, pp.1793-1742, 1981.
 8. K.S. Chang, Y.H. Won and C.H. Cho "Patterns of natural convection around a square cylinder placed concentrically in a horizontal circular cylinder", ASME J. Heat Transfer, Vol.105, pp.273-280, 1983.
 9. B.E. Launder and T.H. Massey, "The numerical prediction of viscous flow and heat transfer in tube banks", ASME J. Heat Transfer, Vol.100, pp.565-571, 1978.
 10. T.H. Kuehn and R.J. Goldstein "Numerical solution to the Navier-Stokes equations for laminar natural convection about a horizontal isothermal circular cylinder", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.23, pp.971-979, 1979.