〈研究論文〉

Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 15, No. 1, June. 1989

포장단위를 기본으로 하는 수량할인제도하에서의 경제적 발주량†

(Economic Order Quantities with Quantity Discounts Based on Package Unit)

김 갑 환*

Abstract

The problem to determine Economic Order Quantity(EOQ) occurs when price discounts or uncharged additions are offered for the purchase in the unit of package. It is found that the annual inventory cost needs to be evaluated for at most three alternative order sizes to find EOQ, which is easier than the case of all-unit or incremental quantity discount. Numerical examples are presented.

1. 序　言

수량할인이 제시된 경우 구매자가 발주크기를 결정하는 문제는 재고관리분야에서 오래된 연구주제이며 대표적인 수량할인제도로서 전량할인(All-unit Quantity Discount)과 증분할인(Incremental Quantity Discount) 제도가 주로 연구되어 왔다[1-5].

그러나 실제 운영되고 있는 수량할인제도들을 조사해 보면 이들 두 대표적인 제도와 다른 형태의 제도들을 많이 찾아볼 수 있으며 그 중에서도 특히 운반이나 저장을 위해서 제품을 일정한 갯수씩 상자나 기타 포장용기로 포장을 한 경우 이 포장단위를 기준으로 가격할인을 시행하는 일이 많다.

대표적인 예로서 상자단위로 사면 싸지만 낱개로 사면 비싼 "가격할인이 있는 포장단위판매"가 있고 한 상자를 살 때마다 상자당

* 부산대학교 공과대학 산업공학과

† 본 논문은 1988년도 부산대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

낱개제품을 몇개씩 덤으로 끼워주는 식의 "덤이 있는 포장단위 판매"도 현실적으로 종종 찾아볼 수 있다.

본 연구에서는 위의 두가지 경우와 같은 포장단위판매에 대한 할인이 제시된 경우 확정적이고 고정된 제품수요를 갖는 구매자가 발주크기를 어떻게 결정할 것인가 하는 문제를 다루었다.

두가지 경우 각각에 대해서 구매자의 재고비용함수를 분석하여 특성을 조사하였으며 그 특성을 이용하여 간단히 발주크기를 결정할 수 있는 해법을 개발하였다. 그리고 각 경우에 대해 수치해를 제시하였다.

계량적 모형을 세우고 분석하기 위해서 다음과 같은 가정을 도입하였다.

(1) 구매자의 수요는 확정적이고 고정되어 있으며 단일 품목만을 대상으로 한다.

(2) 대상제품의 포장단위는 한가지뿐이다. 일반적인 경우에는 동일 제품에 대해 적재제품수가 서로 다른 여러가지의 포장용기가 있을 수도 있다.

(3) 구매자의 재고운영정책상 재고부족은 허용하지 않는다.

앞으로 사용될 몇가지 기호를 소개하면 아래와 같다.

P : 할인이 안된 경우의 개당가격(원/개)

B : 포장단위당 적재제품수

Q : 구매자의 발주크기(1회 구매량)

S : 구매자의 1회 발주비용(원/회)

h : 구매가격에 대한 비율로 나타낸 구매자의 재고유지비용(%/연/개)

2. 가격할인이 있는 포장단위판매의 경우

흔히 볼 수 있는 경우로서 한 상자나 통으로 사면 싸지만 낱개로 사면 비싸게 되는 경우인데 구매비용을 그래프로 그려보면 〈그림 1〉과 같이 나타난다.

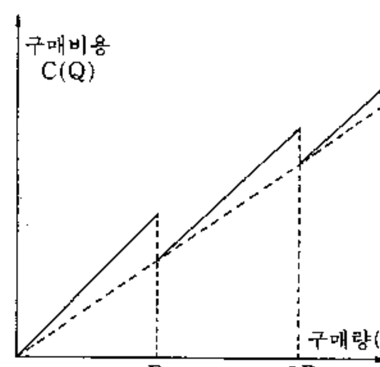
예를 들면 한상자씩 사면 개당 9원이 되는 셈인데 낱개로 사면 10원씩 지불해야 하는 경우 포장단위판매에 대해서 10%의 가격할인이 있는 셈이고 이 때의 할인율 10%를 r로 나타내면 일반적으로 구매비용 C(Q)는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$C(Q)=\begin{cases} PQ & (0\leqq Q<B) \\ P(1-r)B+P(Q-B) & (B\leqq Q<2B) \\ \vdots & \vdots \\ kP(1-r)B+P(Q-kB) & (kB\leqq Q<(k+1)B) \end{cases}$$

따라서 제품단위당 평균가격 C(Q)/Q는 다음과 같이 나타난다.

$$C(Q)/Q=\begin{cases} P & (0\leqq Q<B) \\ P-PBr/Q & (B\leqq Q<2B) \\ \vdots & \vdots \\ P-kPBr/Q & (kB\leqq Q<(k+1)B) \end{cases}$$

구매비용, 발주비용, 재고유지비용으로 이루어진 구매자의 연간 재고비용함수 $E_k(Q)$는 다음과 같이 표현된다.



[그림 1] 가격할인이 있는 포장단위판매의 경우에 있어서의 구매비용곡선

$E_k(Q)=P(1-kBr/Q)D+SD/Q+hP(Q-kBr)/2$

$(kB \leq Q < (k+1)B)$ ……… (1)

$dE_k(Q)/dQ=0$ 으로부터 함수 $E_k(Q)$의 극소값은 아래와 같은 $Q=Q_k$에서 찾을 수 있다.

$Q_k=\sqrt{2(S-kPBr)D/hP}$ ………… (2)

그리고 $d^2E_k(Q)/dQ^2>0$임을 보일 수 있으므로 오목한 형태(convex)의 함수이다. 단, $S<KPBr$의 경우에는 단조증가함수가 된다.

$E_k(Q)$와 Q_k의 식으로부터 다음과 같은 성질을 밝혀 낼 수 있다.

특성 1 : $kB \leq Q_k(k+1)B$를 만족하는 Q_k는 많아야 하나만 존재하며 만약 존재한다면 아래 식으로부터 그 k값을 유일무이하게 정할 수 있다.

$k_1<k \leq k_2$ ……………………………… (3)

단, $k_1=\{-(PrD+hPB)+\sqrt{(PrD)^2+2hP^2BrD+2ShPD}\}/(hPB)$

$k_2=\{-PrD+\sqrt{(PrD)^2+2ShPD}\}/(hPB)$

(증명) 전반부의 내용은 (2)식이 나타내는 $Q_{k+1}<Q_k$라는 사실과 구간 $[kB, (k+1)B)$가 k값에 따라서 단조증가하며 서로 겹쳐지지 않는다는 사실로부터 증명이 되고 후반부의 내용은 $kB \leq Q_k < (k+1)B$의 관계식에 (2)식을 대입하여 정리하면 유도해낼 수 있다(증명끝).

특성 2 : 구매자의 재고비용함수는 많아야 아래와 같은 세가지 발주크기 중의 하나에서 최소값을 갖는다.

1) (2)식을 만족하는 k가 존재하면 그 때의 Q_k

2) $U=\sqrt{2SD/hP(1-r)}/B$로 둘 때 U가 정수이면 UB, 정수가 아니면 $[U]B$와 $\{[U]+1\}B$(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대정수)

(증명) 특정구간 $kB \leq Q(k+1)B$에서의 $E_k(Q)$의 infimum은 Q_k가 이 구간안에 존재하면 Q_k에서 찾을 수 있고 그렇지 않으면 $Q=kB$나 $Q=(k+1)B$에서 찾을 수 있다. $Q=(k+1)B$의 경우는 $E_k(Q)>E_{k+1}(Q)$라는 사실로부터 $E_k((k+1)B)>E_{k+1}((k+1)B)$이므로 $Q=(k+1)B$에서 모든 구간에서의 전체적(global) infimum이 나올 수가 없다. 따라서 전체적 최소값을 주는 Q는 $kB \leq Q < (k+1)B$ 구간에 속하는 Q_k나 kB에서 찾을 수 있다. 그런데 특성 1에 의해서 최대 하나의 Q_k만 점검해 보게 되고 $E_k(kB)$는 k에 대해 오목(convex)하고 $k=\sqrt{(2SD)/(hP(1-r)B^2)}$에서 최소값을 갖는데 k는 정수값을 취하므로 가까운 정수값중 최소비용을 주는 k값을 고려하면 된다(증명끝).

3. 덤이 있는 포장단위판매의 경우

포장단위로 구매하면 가격을 할인해 주는 경우도 있지만 가격할인 대신 덤(uncharged addition)으로 몇개를 더 주는 경우도 있다. 이 경우도 가격할인을 해 주는 경우와 비슷한 특성을 가지기 때문에 여기서 소개한다.

포장단위당 덤의 양을 a로 나타낼 때 구매비용함수는 〈그림 2〉와 같으며 식으로는 아래와 같이 표현된다.

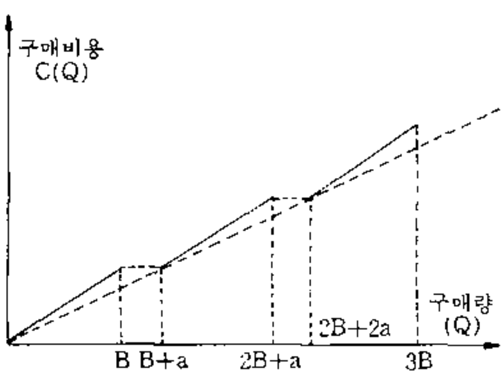
$$C(Q)=\begin{cases} PQ & (0 \leq Q < B) \\ P(Q-a) & (B+a \leq Q < 2B+a) \\ \vdots & \vdots \\ P(Q-ka) & (kB+ka < Q \leq (k+1)B+ka) \end{cases}$$

위의 구매비용함수에서 Q값은 덤까지 포함한 숫자이기 때문에 Q값으로부터 실제 발주크기를 가기 위해서는 $kB+ka \leqq Q < (k+1)B+ka$ 이면 Q값에서 ka만큼 빼 주면 된다.

구매자의 재고비용함수는 다음과 같이 표현된다.

$$E_k(Q)=P(1-ka/Q)D+SD/Q+hP(Q-ka)/2 \quad (kB+ka \leqq Q < (k+1)B+ka) \qquad \cdots\cdots (4)$$

이 식은 $a=Br$로 놓으면 (1)식과 같아진다. 따라서 $a=Br$로 치환하면 (2)식과 같은 Q_k에서 $E_k(Q)$가 극소값을 갖게 되며 앞장과 같은 논리적 전개에 대해서 다음과 같은 특성들이 성립하게 된다.



[그림 2] 덤이 있는 포장단위판매의 경우에 있어서의 구매비용곡선

특성 3 : $k(B+a) \leqq Q < k(B+a)+B$를 만족하는 Q_k는 많아야 하나 존재하며 만약 존재한다면 아래식으로부터 그 k값을 유일무이하게 정할 수 있다.

$$k_1 < k \leqq k_2 \qquad \cdots\cdots (5)$$

단, $k_1=\{-Y_1+\sqrt{Y_1^2-4XZ_1}\}/(2X)$, $k_2=\{-Y_2+\sqrt{Y_2^2-4XZ_2}\}/(2X)$,

$X=Ph(B+a)^2$, $Y_1=2\{Ph(B+a)B+PaD\}$, $Z_1=PhB^2-2SD$, $Y_2=2PaD$, $Z_2=-2SD$

특성 4 : 구매자의 재고비용함수는 아래와 같이 많아야 세가지 발주크기중의 하나에서 최소값을 갖는다.

1) (2)식 ($a=Br$로 치환)을 만족하는 k가 존재하면 그때의 Q_k
2) $V=\sqrt{2SD/\{(B+a)hPB\}}$라 둘 때 V가 정수이면 VB, V가 정수가 아니면 $[V]B$와 $\{[V]+1\}B$

4. 수치적 예제

아래의 수치를 사용하여 앞에서 설명한 두가지 경우의 포장단위 할인판매에 대해서 최적해를 구해 보았다.

P=10원, D=20000개/연, B=5000개, S=7000원/회, h=0.3

가격할인이 있는 포장단위판매의 경우

예를 들어 할인율이 10%인 경우를 분석해 보자. 식(3)으로부터 $k_1=0.53$, $k_2=1.01$이 계산되어 $B \leqq Q_1 < 2B$임을 알아낼 수 있고 〈특성 2〉로부터 U=2.036으로 계산되어 Q=2B와 Q=3B가 최소비용을 줄 수 있는 발주크기의 또 다른 후보들이다. 최적해의 세 후보에 대한 재고비용을 계산해 보면 다음과 같다.

$E(Q_1)=E(5164)=214742$(원)
$E(2B)=E(10000)=207500$(원)
$E(3B)=E(15000)=209583$(원)

따라서 최적해는 Q=10000에 최소비용은 207500(원)이다.

덤이 있는 포장단위판매의 경우

덤의 크기 a=500인 경우에 대해서 최적해를 구해보자. 그러면 식(5)에 대해서 $k_1=0.50$, $k_2=0.97$이 구해지므로 $k(B+a) \leq Q_k < k(B+a)+B$를 만족하여 유효한 구간에 포함된 Q_k가 없다는 것을 알 수 있다. 그리고 V=1.84이므로 Q=k(B+a) 중에서 Q=B+a와 Q=2(B+a)가 최적해의 후보임을 알 수 있다.

E(B+a)=E(5500)=214772, E(2(B+a))=E(110000)=209545이므로 최적해는 Q=110000이다. 그런데 이 때의 Q값은 "덤"을포함한 갯수이므로 최적주문량은 10000개 즉 두포장단위임을 의미한다.

5. 결　론

포장단위로 구매를 하면 가격할인이나 덤이 제공되는 경우에 대해서 구매자가 재고비용을 최소화시킬 수 있기 위해서 발주크기를 어떻게 결정할 것인가 하는 문제를 다루었다.

가격할인이 있거나 덤이 있는 포장단위구매의 두가지 경우 모두 최대 세개의 발주크기에 대한 재고비용만을 비교해 보면 최적해를 구할 수 있다는 것이 밝혀졌고 그 세개의 발주크기를 계산하는 공식이 유도되었다. 이는 전량할인(All-unit quantity discount)제도나 증분할인(Incremental quantity discount) 제도에 비해서 훨씬 쉽게 해를 구할 수 있다는 것을 의미한다.

그리고 두가지 경우 각각에 대한 수치예제를 통해서 해법을 예시하였다.

앞으로의 연구과제로는 공급자가 포장단위를 어떻게 결정할 것인가 하는 문제와 여러가지 수량할인제도의 특성을 상호비교하여 공급자와 구매자 쌍방의 비용에 미치는 영향을 분석하는 문제를 들 수 있겠다.

Reference

[1] Das, c., "A Unified Approach to the Price-break Economic Order Quantity(EOQ) Problem", Decision Science, Vol. 15, No. 3, pp. 350～357, 1984.

[2] Hadley, G., and Whitin, T.M., Analysis of Inventory Systems, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

[3] Johnson, D. G., "A Graphical Approach to Price Break Analysis", Oper. Res. Quarterly, Vol. 22, No. 3, pp. 300～302, 1971.

[4] Kuzdrall, P. J. and Britney, R. R., "Total Set-up Lot Sizing with Quantity Discounts", Decision Science, Vol. 13, No. 1, pp. 101～112, 1982.

[5] Rubin, P.A., et al., "Economic Order Quantities with Quantity Discounts: Grandma does it best", Decision Science, Vol. 14, No. 2, pp. 270～281, 1983.