

선형 탄성 파괴역학의 기본과 매개변수

이 강 용
연세대학교 기계공학과 교수



● 1947년생
● 파괴 및 피로공학을 전공하고, 파괴원인 및 방지를 위한 이론 정립, BEM 전산연구, 특히 AE법의 현장응용에 관심을 가지고 있다.

1. 머리말

파괴역학은 균열을 다루는 학문이기 때문에 관심의 대상이 항상 균열이다. 따라서 재료내에 균열이 내재하고 있거나 또는 발생할 가능성이 있어야만 이 학문을 이용 할 수 있다. 그런데 지구상의 모든 재료는 다행인지 불행인지는 모르데 항상 균열을 내포하고 있다. 그 균열은 초기에는 미소균열이겠지만 사용중에 언젠가는 거시균열로 성장한다. 거시균열로 성장한 균열을 파괴역학에서 취급한다. 왜냐하면 최종적인 파괴는 항상 거시적인 균열로부터 일어나기 때문이다. 본 글에서는 파괴역학 분야 중에서 선형 탄성학에 근거한 선형 탄성 파괴역학의 기본 개념과 이 분야에서 취급되는 기본 매개변수에 대하여 간단히 소개하고자 한다.

2. 최대 이론 파괴 강도

물체내에 아무런 결함도 없는 그야말로 완벽한 상태에 있는 재료의 파괴 강도는 그림 1의 모델에 의해 근사적인 이론값이 구해진다.

그림에서 a_0 는 변형전의 원자 중심간의 간격이며, 인장응력에 의해 x 만큼의 변위를 일으키면서 A점에 이르게된다. A점 이후에는 변위는 증가하나 응력은 감소하게 되는데, 이 A

점의 응력 σ 를 최대 파괴 강도(maximum cohesive strength) σ_c 로 정의한다. 그림상의 실선이 실제 응력과 변위곡선이며, 해석을 용이하게 하기 위해 점선과 같은 sine곡선으로 가정한다. 즉

$$\sigma = \sigma_c \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (1)$$

여기서 λ 는 파장이다. x 가 적다면, 즉 탄성 변형변위에 있다면 식 (1)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma = \sigma_c \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (2)$$

윗식을 x 에 대해 미분하면

$$\frac{d\sigma}{dx} = \sigma_c \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3)$$

Hooke법칙에 의해서

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{x}{a_0} \quad (4)$$

여기에서 E 와 ε 는 각각 탄성계수와 변형률이다. 식 (4)로부터

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{E}{a_0} \quad (5)$$

식 (3)과 식 (5)로부터

$$\sigma_c = \frac{E\lambda}{2\pi a_0} \approx \frac{E}{2\pi} \approx \frac{E}{10} \quad (6)$$

표 1은 실제 재료의 파괴 강도를 보여 주고 있다.

표 1 재료의 실제 파괴 강도

재 료	σ_c		E		
	GPa	(psi $\times 10^6$)	GPa	(psi $\times 10^6$)	E/σ_c
실리카 섬유	24.1	(3.5)	97.1	(14.1)	4
철 whisker	13.1	(1.91)	295.2	(42.9)	23
실리콘 whisker	6.47	(0.94)	165.7	(24.1)	26
알루미나 whisker	15.2	(2.21)	496.2	(72.2)	33
Ausformed 강	3.14	(0.46)	200.1	(29.1)	64
피아노 강선	2.75	(0.40)	200.1	(29.1)	73

위의 표에서 보는 바와 같이 E/σ_c 가 식 (6)에서 예측하는 10보다 많은 차이를 보이고 있다. 따라서 그림 1과 같은 결함이 없는 완벽한 상태의 모델에 문제가 있음을 짐작할 수 있다.

그림 1에 의하면 단위면적당 파괴 일량 W 는

$$W = \int_0^{\lambda/2} \sigma_c \sin \frac{2\pi x}{\lambda} dx = \sigma_c \frac{\lambda}{\pi} \quad (7)$$

W 는 물체에 공급되는 에너지이고 이 에너지는 파단면 형성을 위해 전부 소비된다고 가정한다. 단위면적당 표면에너지 (surface energy)를 γ_s 라 하면

$$W = 2\gamma_s \quad (8)$$

여기서 2는 파괴단면 상하면을 고려하기 위한 것이다.

식 (7)과 식 (8)로부터

$$\sigma_c = \frac{2\pi\gamma_s}{\lambda} \quad (9)$$

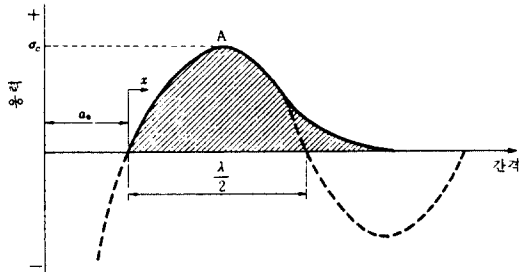


그림 1 최대이론 파괴강도

식 (6)과 식 (9)로부터

$$\lambda = 2\pi \left(\frac{a_0 \gamma_s}{E} \right)^{1/2} \quad (10)$$

윗식을 식 (9)에 대입하면

$$\sigma_c = \left(\frac{E\gamma_s}{a_0} \right)^{1/2} \quad (11)$$

식 (6)과 식 (11)로부터

$$\sigma_c = \frac{E\lambda}{2\pi a_0} = \left(\frac{E\gamma_s}{a_0} \right)^{1/2} \approx \frac{E}{10} \quad (12)$$

3. Griffith 모델

Griffith는 2절의 모델과 같은 완벽한 재료는 실제 존재할 수 없다고 단정하고, 모든 재료는 불완전하며 결함을 내포할 수 밖에 없다고 가정하였다. 그림 2와 같이 균열길이 $2a$ 가 존재하는 물체의 파괴 강도를 Griffith는 다음 식으로 유도하였다.

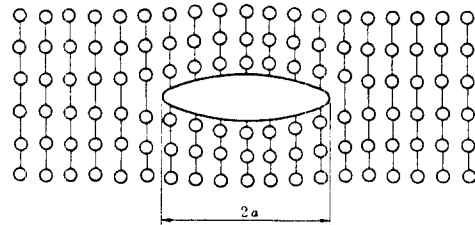


그림 2 Griffith 모델

$$\sigma_c = \left(\frac{2E\sigma_s}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (13)$$

식 (11)과 식 (13)을 비교하면 식의 형태는 같으나 a_0 대신에 a 로 표현되었음을 알 수 있다. 따라서 식 (13)이 식 (11)보다 훨씬 작은 파괴강도 값을 예상하게 된다. Gviffith는 유리에 대해 식 (3)의 타당성을 입증하였다. 식 (13)을 바꾸어 표현하면

$$\sigma_c \sqrt{\pi a} = \sqrt{2E\gamma_s} \equiv K_c \quad (14)$$

여기서 K_c 는 파괴가 일어나는 응력과 균열 길이에 대한 임계 응력세기계수(critical stress intensity factor)이다. 파괴에 이르기 전에는

$$\sigma \sqrt{\pi a} = K \quad (15)$$

여기서 K 는 응력세기계수이다. 이는 다음 절에서 취급되는 응력집중계수(stress concentration factor)와 상당한 차이가 있음을 주지하여야 한다.

4. 노치와 균열의 차이

그림 3과같이 무한 평판에 타원 구멍이 존재하고, 무한 거리에서 타원 구멍의 장축에 수직으로 인장응력 σ 을 받을 때 노치 저부 A점에서 이론 응력집중계수 K_t 는 다음과 같이 표현

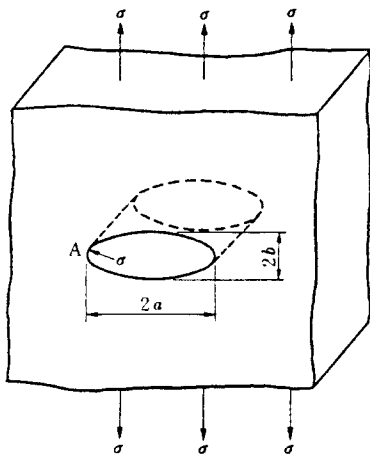


그림 3 응력집중계수

된다.

$$K_t = 1 + 2 \frac{a}{b} \quad (16)$$

A점에서 곡률반경 ρ 는 b^2/a 이므로

$$K_t = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (17)$$

$b \rightarrow 0$ 또는 $\rho \rightarrow 0$ 이면 $K_t \rightarrow \infty$ 가 되며 K_t 가 정의되지 못하는 큰 값을 나타내게 된다. 이러한 결함을 균열이라 칭한다. 따라서 균열에서 K_t 라는 파라미터를 사용할 수 없으며, 앞에서 언급한 응력세기계수 K 를 사용하게 된다. 노치는 K_t 가 한정된 값을 가지고 균열은 K_t 가 무한대 값을 가지므로, 파괴 위험성은 노치보다 균열이 훨씬 높다. 따라서 균열이 존재하는 물체의 위험도를 줄이기 위해 균열 선단을 정확히 찾아서 균열 선단에 구멍을 내어 노치로 만들기도 한다.

5. 균열 변형 형태와 균열 선단 응력장

균열은 일반적으로 그림 4와 같은 세 가지 독립적인 방법으로 변형된다.

(1) 열림형(모우드 I)은 (x, y) 와 (x, z) 평면에 대해 대칭성을 가진다.

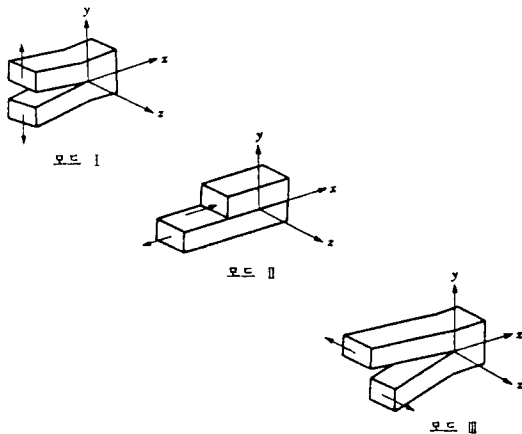


그림 4 균열 변형 형태

(2) 키끄름형(모우드 II)은 (x, z) 평면에 대해서는 비대칭이나 (x, y) 평면에 대해서는 대칭성을 가진다.

(3) 찢음형(모우드 III)은 (x, y) 평면과 (x, z) 평면에 대해 비대칭성을 가진다.

이 중에서 가장 보편적이고 위험한 변형 형태는 열림형이므로, 이 형태가 가장 중요하게 다루어진다.

모우드 I 균열 선단 가까이에서 응력 성분은 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

윗식에 해당하는 기호는 그림 5에서 정의하고 있다. K_I 의 하첨자 I은 모우드 I을 의미하고 K_I 을 케이 원이라고 읽는다.

식 (18)의 형태를 관찰함으로써 몇 가지 중요한 점을 지적하면 다음과 같다.

(가) 모든 응력 성분은 $1/\sqrt{r}$ 에 비례한다. 즉 균열 선단 가까이에는 상당한 응력이 존재한다.

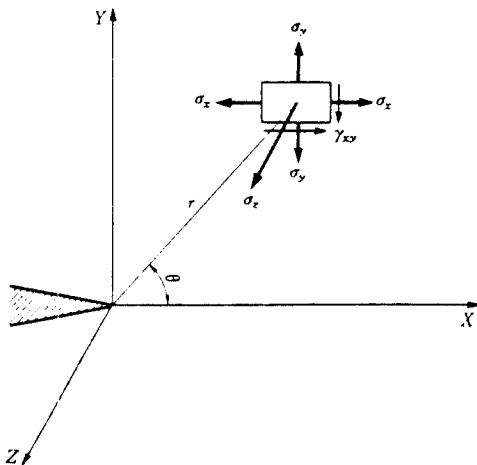


그림 5 균열 선단 수위의 응력 성분

(나) 모든 응력 성분은 z 에 무관하다. 즉 식 (18)은 2차원 균열 문제에서의 응력성분식이다.

(다) 균열 선단 가까이에 좌표 (γ, θ) 만 설정되면 그 좌표에서 응력의 크기는 K_I 이 좌우한다.

(라) 모든 하중 경계조건과 물체의 형상 및 크기에 따른 영향은 K_I 이 내포하고 있다.

(마) 식 (18)의 형태는 모우드 I 2차원 균열 선단 가까이에서는 하중 경계조건과 물체의 형상 및 크기에 관계없이 항상 같다. 따라서 파괴역학에서는 응력성분식을 거론하기보다 응력세기 계수식을 구하는 것이 가장 관심사이다. 응력세기계수식이 얻어지면 식 (18)에 대입하여 응력 성분식이 얻어진다.

그림 6에서 하중 경계조건과 물체 형상 및 크기에 따라 각각 다른 K_I 식을 보여 주고 있다.

그림 6에서 보는 바와 같이 K_I 은 일반적으로 다음의 형태로 표기됨을 알 수 있다.

$$K_I = Y_I \sigma_1 \sqrt{a} \quad (19)$$

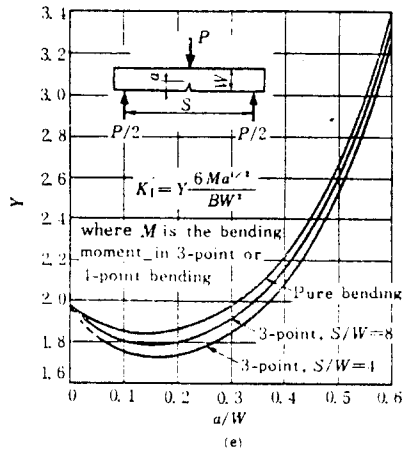
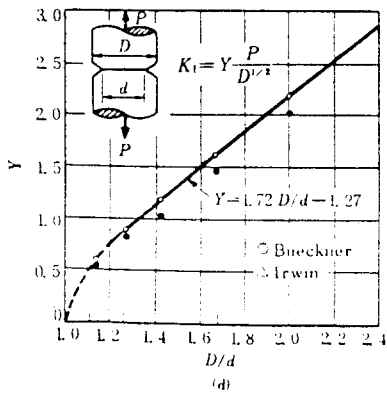
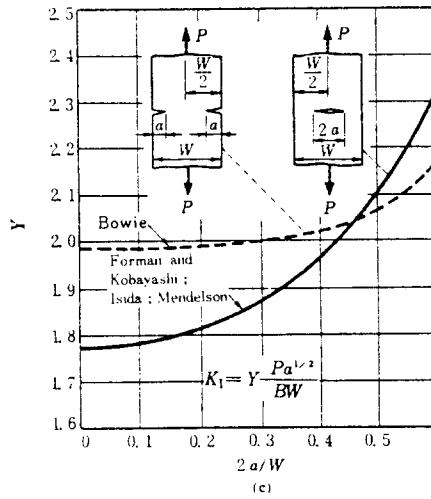
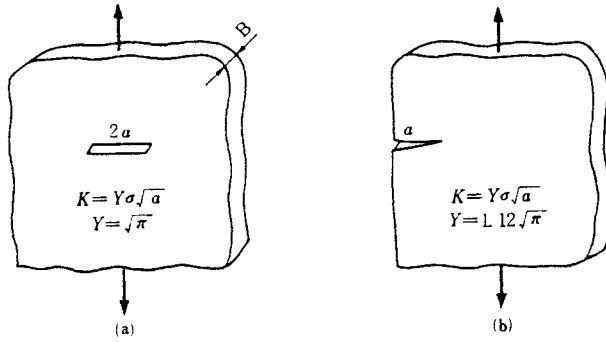
여기서 Y_I 은 a/W 를 항으로 하는 다항식이다. 3절에서 취급한 Griffith 모델은 식 (15)에서와 같이 $K = \sigma \sqrt{\pi a}$ 로 표기되었기 때문에 그림 6(a)와 같은 무한 평판내에 중앙균열 $2a$ 가 무한거리에서 응력 σ 를 받는 경우에 해당하는 것이다. 식 (18)은 2차원 선형 탄성학을 균열 문제에 적용함으로써 유도될 수 있는데, 2차원 탄성학 문제는 균열 문제를 포함하여 항상 평면 응력과 평면 변형률 문제로 구분된다. 그림 5와 같은 좌표계 설정 아래에서 평면 응력 상태와 평면 변형률 상태는 다음 식으로 각각 정의된다.

$$\begin{aligned} \sigma_z = 0, \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0 \\ \text{(평면 응력 상태)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z = 0, \epsilon_{zx} = 0, \epsilon_{zy} = 0 \\ \text{(평면 변형률 상태)} \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)은 Hooke의 법칙에 의해

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0 \quad (22)$$



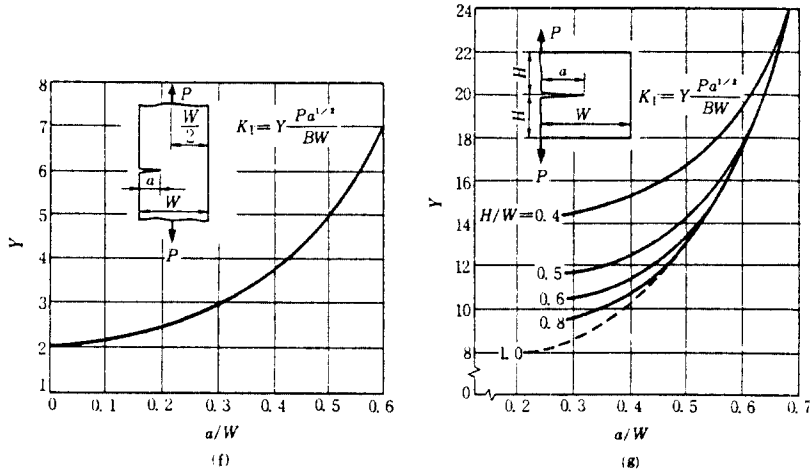


그림 6 각종 균열에 대한 응력세기 계수

여기서 ν 는 프와송비이다. 따라서 모드 I 평면 응력 균열 선단 가까이에서 응력성분식은 식 (18)과 식 (20)로 구성된다.

한편, 모드 I 평면 변형률 균열 선단 가까이에서의 응력성분식은 식 (18)과 식 (22)으로 구성된다.

모우드 II와 III에 관한 균열선단 응력분포식도 모드 I의 식과 유사한 형태로 주어지나 여기에서는 생략한다. 한편 모드 II, III응력세기계수 K_{II} , K_{III} 의 일반 형태도 역시 식 (19)와 같이 각각 다음과 같이 표현된다.

$$K_{II} = Y_{II} \tau_{II} \sqrt{a} \quad (23)$$

$$K_{III} = Y_{III} \tau_{III} \sqrt{a} \quad (24)$$

여기에서 τ_{II} , τ_{III} 는 모드 II, III의 변형을 일으키는 전단 작용응력이다. Y_{II} , Y_{III} 는 모드 I의 Y_I 과는 다르다.

모우드 I, II, III에 관한 응력세기계수식을 그림 6과 같이 열거한 핸드북으로는 현재까지 다음 네 가지가 있으며, 계속 이와 같은 핸드북이 출판될 것으로 기대한다.

(1) Sih, G.C.M., 1973, "Handbook of Stress Intensity Factors, Lehigh University".

(2) Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G.R., 1973, "The Stress Analysis of Crack Hand-

book", Del Research, Hellertown, Pa.

(3) Rooke, D. P. and Cartwright, D. J., 1976, "Compendium of Stress Intensity Factors", HMSO, London.

(4) Murakami, Y., 1986, "Stress Intensity Factors Handbook", Pergamon.

6. Griffith이론과 Irwin이론의 상관관계

파괴역학은 1920년 Griffith에 의해 제안된 새로운 학문이나, 그의 이론은 에너지개념에 의한 것으로 파괴역학 문제 풀이의 한 방법으로서 널리 사용되고 있다. 그러나 Irwin의 응력세기계수에 의한 파괴역학 취급은 응력해석적인 방법으로서 Irwin방법이 더욱 취급하기 편하므로, Irwin의 응력세기계수 결정이 파괴역학의 주류를 이룬다. 여기서는 Griffith의 파괴역학적 개념만을 개괄적으로 취급한다. 상세한 내용은 아래의 논문을 참조하기 바란다.

Griffith, A. A., 1920, "The Phenomena of Rupture and Flaw in Solids", Phil. Trans. Royal Society of London, Vol. A 221, pp.163 ~198.

균열이 없는 무한체에 외부 경계에서 응력이

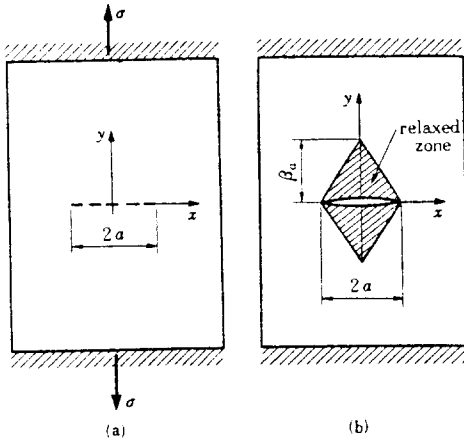


그림 7 Griffith 이론 전개를 위한 모델

작용하였다면(그림 7(a)) 단위부피당 변형에너지, 즉 변형에너지 밀도 w_0 는 다음 식으로 표현된다.

$$w_0 = \frac{1}{2} \sigma \epsilon - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \quad (25)$$

여기에서 Hooke의 법칙이 사용되었으므로 Griffith이론은 완전 탄성체에 국한된다. 식 (25)의 상태에 놓인 물체에 균열이 발생된다면 균열 상하면 주위는 이완이 되어 식 (25)의 변형에너지 밀도로부터 감소된 변형에너지 밀도를 가지게 된다. relax되는 영역의 부피를 그림 7(b)와 같이 높이 βa , 밑변 $2a$ (=균열길이)로 이루어지는 삼각형 모양이라고 생각하자. 그러면 relax되는 부피는 $2\beta a^2 B$ 가 된다. 여기서 B 는 시험편 두께이다. 따라서 relax되는 부피로부터 빠져나가는 변형에너지 양($W - W_0$)은 다음과 같다.

$$W - W_0 = - \frac{\sigma^2}{2E} \times 2\beta a^2 B = - \frac{\sigma^2 \beta a^2 B}{E} \quad (26)$$

포텐셜에너지 U 는 다음과 같이 정의된다.

$$U = W - Q \quad (27)$$

여기서 Q 는 일량(work done)이다. 고정그립(fixed grip)상태에서 균열길이 $2a$ 가 발생되

었다면 $Q=0$ 이므로 $U=W$ 가 된다. 이러한 경우에 대해서 응력해석에 의한 엄밀해 $U - U_0$ 는 다음과 같다.

$$U - U_0 = \begin{cases} - \frac{\pi \sigma^2 a^2 B}{E} & (\text{평면 응력 상태}) \\ - \frac{\pi \sigma^2 a^2 B (1 - \nu^2)}{E} & (\text{평면 변형률 상태}) \end{cases} \quad (28)$$

식 (28)에서 고려되지 않은 에너지는 균열이 없는 물체에서 균열길이 $2a$ 인 물체로 변할 때 균열면을 형성하기 위해 물체에 공급되어야 할 표면에너지(surface energy)이다. 따라서 식 (28)에서 보여주는 $U - U_0$ (= $W - W_0$) 양의 일부가 다시 표면에너지로 물체에 공급된다.

결과적으로 균열이 없는 물체 상태에서 균열 $2a$ 를 발생하려면 빠져나가는 총 포텐셜에너지 ΔU 는 다음 식으로 표현된다.

$$\Delta U = U - U_0 + S \quad (29)$$

여기서 S 는 표면에너지이다. 그러므로 평면 응력 상태에서 ΔU 는 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} \Delta U &= - \frac{\pi \sigma^2 a^2 B}{E} + 2(2aB\gamma_s) \\ &= - \frac{\pi \sigma^2 a^2 B}{E} + 4aB\gamma_s \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 γ_s 는 단위면적당 표면에너지, 즉 비표면에너지(specific surface energy)이고, 2()의 2는 상하 표면을 고려하기 위함이다. 식 (30)을 그림으로 도시하면 그림 8과 같다.

Griffith 파괴조건식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\Delta U)}{\partial a} = \frac{\partial(U - U_0)}{\partial a} + \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad (31)$$

식 (30)과 식 (31)로부터 파괴가 일어날 때의 임계응력 σ_c 는 다음과 같다.

$$\sigma_c = \left(\frac{2\gamma_s E}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (32)$$

이 식은 3절에서 식 (13)으로 소개된 바 있다. 평면 변형률 상태라면

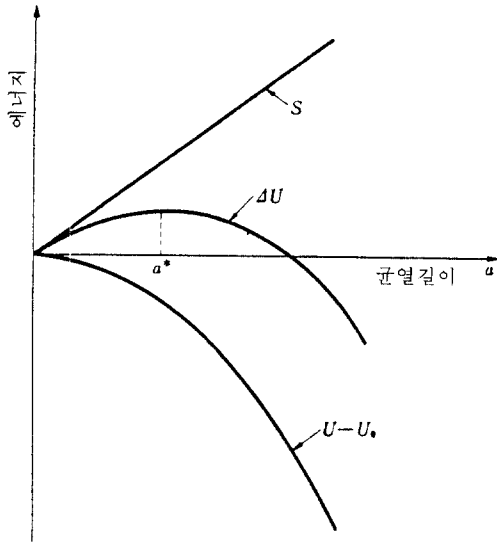


그림 8 균열길이에 따른 에너지 변화

$$\sigma_c = \left\{ \frac{2\gamma_s E}{\pi a (1-\nu^2)} \right\}^{1/2} \quad (33)$$

단위두께당 균열 선단 에너지 해방률 G 를 다음과 같이 정의한다.

$$G \equiv \frac{1}{2B} \frac{\partial (U_0 - U)}{\partial a} = - \frac{1}{2B} \frac{\partial U}{\partial a} \quad (34)$$

여기서 2는 2개의 균열선단 중 1개를 뜻하기 위함이다. 식 (34)와 식 (28)에 의해서

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (\text{평면 응력 상태}) \quad (35)$$

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a (1-\nu^2)}{E} \quad (\text{평면 변형률 상태})$$

또 다른 매개변수로서 단위두께당 표면에너지율 R 을 다음과 같이 정의한다.

$$R \equiv \frac{1}{2B} \frac{\partial S}{\partial a} \quad (36)$$

여기서 2는 상하면 중 한 면만을 뜻한다. 따라서 Griffith 파괴조건식 (31)은 다음 식으로 표현된다.

$$G = R \quad (37)$$

무한체 내에 균열길이 $2a$ 가 균열에 수직으

로 무한 경계면에서 응력 σ 를 작용받을 경우에 대한 식 (35)와 응력세기계수식인 그림 6(a)의 $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ 와 관련지우면 다음 식이 성립된다.

$$G_I = \begin{cases} \frac{K_{I2}}{E} & (\text{평면 응력 상태}) \\ \frac{K_{I2}(1-\nu^2)}{E} & (\text{평면 변형률 상태}) \end{cases} \quad (38)$$

식 (38)에 의하면 모드 I 상태의 G_I 와 K_{I2} 사이에는 단지 재료상수 E 와 ν 만 관련하고 어떠한 변수도 관련하지 않으므로 두 개의 다른 방법에 의한 매개변수는 그 물리적인 의미가 서로 같다.

7. 균열개구변위, 에너지해방률, 응력세기계수와와의 관계

Dugdale 모델(그림 9)에 의한 균열선단개구 변위는 다음 식으로 주어진다.

$$2v(a, 0) = \frac{8\sigma_{ys}a}{\pi E} \ln \left[\sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_{ys}} \right] \quad (39)$$

여기에서 $2v(a, 0)$ 는 그림 9에서와 같이 균열선단 a 에서 y 방향으로의 변위이며 이를 균열선단개구변위(CTOD: crack tip opening displacement)라고 칭한다. 그러나 편의상 균열개구변위(COD: crack opening displacement)라고 부르기도 한다. 여기에서 부연하고 싶은 것은 COD는 균열선단의 개구변위가 아니기 때문에 CTOD와 구별하는 것이 바람직하다.

무한 경계면에 균열에 수직하게 작용하는 σ 가 $\sigma/\sigma_{ys} \ll 1$ 인 탄성 변형 범위에서는 식 (39)를 다음 식으로 쓸 수 있다.

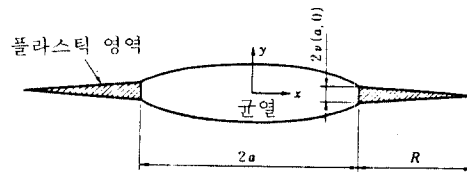


그림 9 Dugdale strip 모델

$$\delta_t \equiv 2\nu(a, 0) = \frac{K_{I2}}{E\sigma_{ys}} = \frac{G_I}{\sigma_{ys}} \quad (40)$$

따라서

$$G_I = \sigma_{ys}\delta_t = \frac{K_{I2}}{E} \quad (41)$$

Dugdale 모델은 평면 응력 상태에서만 적용되므로 식 (39), 식 (40), 식 (41)은 평면 응력 상태의 식이다.

평면 변형률 상태에서는

$$G_I = n\sigma_{ys}\delta_t = \frac{K_{I2}(1-\nu^2)}{E} \quad (42)$$

여기에서 $2 > n > 1$ 이다. 균열개구변위와 균열선단개구변위의 상관 관계 및 균열선단개구변위의 측정법은 다음 문헌에서 상세히 다루고 있다.

British Standard Institution, Methods for Crack Opening Displacement Testing, BS 5762-1979, 1979.

