

〈論 文〉

선택적 하중/변위 파라미터를 이용한 좌굴후 현상의 유한요소 해석

최진민* · 정윤태** · 윤태혁*** · 권영두****

(1989년 12월 8일 접수)

Finite Element Analysis of Post-buckling Phenomena Using Adaptive Load/Displacement Parameter

Jin Min Choi, Yoon Tae Jeong, Tae Hyek Yun and Young Doo Kwon

Key Words : Post-Buckling Phenomena(좌굴후 현상), Snap-Back Phenomena(스냅 백 현상), Penalty Method(페널티 방법), Adaptive Method(선택적 방법), Incremental Load Parameter(증분하중 계수), Incremental Displacement Parameter(증분변위 계수)

Abstract

In this study, a penalty method effective for the case that has no snap-back phenomenon, is proposed and an adaptive method which choose the penalty method or Riks' type method, is suggested for the case of snap-back problem. And for the case that loads are applied to one or more points of a structure, the Riks' method is applied in general, but under certain condition choice of new incremental load parameter is suggested to accelerate the convergence rate. Finally, for the case that displacements of a structure are controlled at one or more points, Riks' type method is proposed. In this case, the proposed method is applied in general but under certain condition it is recommended to choose other incremental displacement parameter to eliminate probable divergence. Five examples are analysed and compared with the result of published literature.

1. 서 론

외력에 대한 고체의 정적인 응답은 일반적으로 비선형적이며, 응력의 크기가 탄성한도 내에 있고 변위와 회전량이 작을 경우에는 선형적인 것으로 간주될 수 있다. 유한요소법에 의해 구성된 대변위

문제의 평형식은 비선형적인 것으로 이를 풀기 위한 방법은 평형반복계산을 하는 경우와 평형반복계산을 하지 않은 경우로 나눌 수 있다. 평형반복계산을 하지 않는 경우에는 매 하중증분시 오차가 있고 이것이 누적되므로 비교적 정확한 해를 구하기 위해서는 하중증분을 매우 작게 해야만 한다. 이에 비해 평형반복계산을 하는 경우는 매 하중증분시의 오차를 원하는 정도로 줄일 수 있고 또한 오차가 누적되지 않으므로 하중증분에 대한 근본적인 제한은 없다고 할 수 있다. 평형반복계산은 Newton-Raphson 방법 혹은 수정된 Newton-Raphson 방

* 정회원, 한국기계연구소 구조해석연구실

** 현대중공업(주) 화공설계부 기본과

*** 포항종합제철(주) 스테인리스부 기술과

**** 정회원, 경북대학교 공과대학 기계공학과

법에 의해 널리 수행되고 있다.

그러나 스냅 스루(snap-through) 또는 스냅 백(snap-back)⁽¹⁾과 같은 좌굴현상이 일어나는 구조물에 대해서는 Newton-Raphson 방법 등으로는 극한점 근처에서 계산이 수렴되지 않아서 더 이상의 해석이 불가능하다. 이에 따라 극한점 근처를 포함한 그 이상의 해석을 할 수 있는 반복계산법이 제안되었다.

Bergan⁽²⁾은 극한점 근처에서는 반복계산을 하지 않게 함으로써 극한점을 지나고 그 이후는 Newton-Raphson 방법으로 계속하는 방법을 사용했다. Wright 등⁽³⁾은 인공적인 스프링을 원래의 구조물에 추가하여 좌굴현상을 없앤 상태에서 계산을 하고 스프링의 영향을 추후 고려해 주었다. Argyris⁽⁴⁾에 의해 제안된 변위제어법(displacement-control method)은 Pian 등⁽⁵⁾에 의해 수정 제안되었으며, 그 후 Lock 등⁽⁶⁾, Haisler 등⁽⁷⁾과 Batoz 등⁽⁸⁾에 의해 계속 연구되었다. 이 방법은 반복계산 중 고체 일점의 전변위증분량이 일정하도록 제한하고 있고, 이 제한조건이 만족되도록 각 반복시의 하중 파라미터를 결정한다. 변위 제어법은 스냅 백 현상이 없는 문제에서는 효과적으로 적용이 될 수 있다. 스냅 백 현상이 수반되는 문제는 Riks⁽⁹⁾의 방법(constant-arc-length method ; normal plane constraint)이나 Crisfield⁽¹⁰⁾의 방법(constant-arc-length method ; spherical constraint)을 이용하면 효과적으로 해석이 될 수 있는데, 이들은 모두 구조물에 하중이 부과되는 문제에 대한 해석 방법으로 그 효율성과 하중/변위의 선택적 고려 및 적용 방법 등에 관해서 많은 연구가 진행되어 오고 있다^(18~20). 한편, 구조물에 변위제어조건이 주어지는 문제에 대한 해석 방법은 아직 시도된 바가 없다.

본 연구에서는 하중작용점(혹은 변위제어점)이 일점이고 스냅 백 현상이 없는 문제에 유용한 페널티 방법(penalty method)을 제안하고, 스냅 백 현상이 수반되는 경우에는 페널티 방법과 Riks 방법을 선택적으로 취할 수 있도록 한다. 그리고 하중작용점이 일점 혹은 그 이상의 점일 경우에 대해서는 Riks 방법을 기준으로 하되 일정조건하에서는 새로운 증분하중 파라미터를 선택할 수 있게 하여, 순수한 Riks 방법으로도 계산할 때에 일어날 수 있는 발산을 없앨 수 있게 한다. 끝으로 변위제어점이 일점 혹은 그 이상의 점인 경우에 대해 'Riks형 방법(Riks' type method)'을 제안하고, 이때에

도 Riks형 방법을 기준으로 계산하되 일정한 조건 하에서는 새로운 증분변위 파라미터를 선택적으로 취할 수 있게 한다.

2. 좌굴후 현상의 해석 방법

본 연구에서는 좌굴후 현상(post-buckling)에 대한 문제를 다음 세가지로 나누고, 각 경우에 적합한 해석 방법을 새로이 제안하거나 혹은 기존의 방법을 수정하여, 효과적인 계산이 수행 가능토록하고자 한다.

2.1 일점문제

구조물에 작용하는 하중이 일점인 경우 또는 구조물의 일점이 변위제어되는 경우로 우선 스냅 백 현상은 없는 것으로 제한한다.

Newton-Raphson 방법에 따른 평형반복계산을 하는 경우 증분평형식을 total Lagrange 방식으로 표시하면 다음과 같다⁽¹¹⁾.

$$[{}^{t+\Delta t}{}_0K]^{(i-1)}\{\Delta U\}^{(i)} = \{{}^{t+\Delta t}p\} - \{{}^{t+\Delta t}{}_0F\}^{(i-1)} \quad (1)$$

여기서

$$\begin{aligned} [{}^{t+\Delta t}{}_0K]^{(i-1)} &: \text{접선 강성 매트릭스} \\ \{\Delta U\}^{(i)} &: \text{평형 반복시의 증분변위} \\ \{{}^{t+\Delta t}p\} &: \text{외력 벡터} \\ \{{}^{t+\Delta t}{}_0F\}^{(i-1)} &: \text{등가 절점력 벡터} \end{aligned}$$

$\{\Delta U\}^{(i-1)}$ 또는 $\{{}^{t+\Delta t}p\} - \{{}^{t+\Delta t}{}_0F\}^{(i-1)}$ 이 충분히 작을 때에 평형반복은 중단되고 다음의 시간단계로 넘어간다.

증분변위는 식 (2)로 표시되며, 이를 식 (1)에 대입하면 식 (3)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \{\Delta U\}^{(i)} &= \{{}^{t+\Delta t}U\}^{(i)} - [{}^{t+\Delta t}U]^{(i-1)} \quad (2) \\ [{}^{t+\Delta t}{}_0K]^{(i-1)}[{}^{t+\Delta t}U]^{(i)} &= \{{}^{t+\Delta t}p\} - [{}^{t+\Delta t}{}_0F]^{(i-1)} \\ &\quad + [{}^{t+\Delta t}{}_0K]^{(i-1)}[{}^{t+\Delta t}U]^{(i-1)} \quad (3) \end{aligned}$$

구조물에서 일점의 변위가 제어 되는 경우 또는 일점에 하중이 작용하는 경우의 하중-변위곡선은 공히 그점의 변위를 일정량씩 증가시키며 각 증가된 변위에 대한 등가 절점력을 구하고, 이를 외력으로 취급 함으로써 얻을 수가 있다. 이 경우에 각 단계에서 주어진 변위는 일종의 제한조건으로 취급될 수 있으며, 이 제한조건은 다음에 설명되는 페널티 방법에 의해 만족될 수 있다.

일점의 변위가 $u_m = u_m^*$ 로 제한되어 있는 경우, 계의 전 포텐셜 에너지 Π 는 식 (4)로 나타낼 수

있고, 이때의 α 는 $\alpha \gg \max(K_{ii})$ 이다. 식 (4)에 변분원리를 적용하면 식 (5)가 얻어지고, 이것은 상법칙(quotient law)에 의해 식 (6)이 된다.

$$\Pi = \left(\frac{1}{2}\right)\{U\}^T[K]\{U\} - \{U\}^T\{P\} + \alpha(u_m - u_m^*)^2/2 \quad (4)$$

$$\{\delta U\}^T[K]\{U\} - \{\delta U\}^T\{P\} + \alpha(u_m - u_m^*)\delta u_m = 0 \quad (5)$$

$$([K] + \alpha e_m e_m^T)\{U\} = \{P\} + \alpha u_m^* e_m \quad (6)$$

e_m : m 번째 요소가 1인 단위벡터

즉, 강성매트릭스의 m 번째 대각요소에 α 를 더해주고 외력에 m 번째 요소에 αu_m^* 를 더해줌으로써 변위벡터 $\{U\}$ 의 m 번째 값인 u_m 은 u_m^* 와 같아지게 된다.

이 페널티 방법을 좌굴후 현상에 대한 식 (3)에 적용하면 식 (7)이 얻어지고, 여기서 $\{^{t+\Delta t}p\} = \{0\}$ 로 둘 수 있으며 $^{t+\Delta t}u_m^*$ 에 따라 여타 변위들이 수렴될 때까지 반복계산이 수행된다.

$$\begin{aligned} & \left(\left[^{t+\Delta t}{}_0K \right] + \alpha e_m e_m^T \right)^{(i-1)} \{ ^{t+\Delta t}U \}^{(i)} = \{ ^{t+\Delta t}p \} \\ & - \{ ^{t+\Delta t}{}_0F \}^{(i-1)} + \{ ^{t+\Delta t}{}_0K \}^{(i-1)} \{ ^{t+\Delta t}U \}^{(i-1)} \\ & + \alpha ^{t+\Delta t}u_m^* e_m \end{aligned} \quad (7)$$

각 단계에서의 계산과정을 요약하면 다음과 같다. 시간 $t + \Delta t$ 상태에 대해

- (1) 초기 변위 $\{ ^{t+\Delta t}U \}^{(0)} = \{ ^tU \}$ 를 이용하여 $\{ ^{t+\Delta t}{}_0K \}^{(0)}$ 및 $\{ ^{t+\Delta t}{}_0F \}^{(0)}$ 를 계산한다.
- (2) 증가시킬 변위 $^{t+\Delta t}u_m^*$ 를 결정한다.
- (3) 식 (7)로부터 $\{ ^{t+\Delta t}U \}^{(1)}$ 을 구한다.
- (4) $i=1$ 로 둔다
- (5) $\{ ^{t+\Delta t}U \}^{(i)}$ 에 대응되는 $\{ ^{t+\Delta t}{}_0K \}^{(i)}$ 및 $\{ ^{t+\Delta t}{}_0F \}^{(i)}$ 를 계산한다.
- (6) 식 (7)로부터 $\{ ^{t+\Delta t}U \}^{(i+1)}$ 을 구한다.
- (7) 수렴조건을 판정한 후 수렴이 되지 않았으면 $i=i+1$ 로 두고 단계 5로 되돌아간다. 수렴이 되었으면 $\{ ^{t+\Delta t}U \} = \{ ^{t+\Delta t}U \}^{(i+1)}$ 로 둔다.

이 방법은 Newton-Raphson 방법으로는 해석이 불가능한 스냅 스루 현상을 어려움없이 해석할 수 있고, Riks 방법 등에 비해 프로그래밍 작업이 간편하고 계산시간이 짧은 장점이 있다. 그러나 스냅 백 현상이 있는 경우에는 적용이 불가능하므로 각 단계에서 접선 강성계수를 계산하여 기준 강성계수보다 작은 경우에는 페널티 방법을 사용하고, 기준 강성계수보다 큰 경우는 Riks 방법을 사용하는 선택적 방법이 유용할 것으로 생각한다. 이때의 기준

강성계수를 정하는 한 방법으로 최초의 강성계수를 기준 강성계수로 할 수 있다.

2.2 다점 하중 작용 문제

구조물의 일점 혹은 그 이상일 점에 하중이 작용하는 경우로 여러가지 방법이 제안 되었으나, 여기서는 Riks 방법을 간단히 설명한 후 이 방법을 약간 수정하고자 한다. 또한 이 방법은 2.3.절에서 제안될 다점변위제어 문제를 해석하기 위한 Riks형 방법의 이해에도 도움이 될 것으로 생각한다.

하중 증분을 하중 파라미터 λ 와 단위 하중 벡터 $\{P_0\}$ 로 표시하면 다음과 같다.

$$\{\Delta P\} = \Delta \lambda \{P_0\} \quad (8)$$

여기서 $\{P_0\}$ 는 여러점에 작용하는 하중간의 비를 나타내는 벡터이며 그 크기는 1이다. 하중 파라미터를 스케일링(scaling)⁽¹²⁾해서 식 (9)와 같이 표시하고, 변위는 식 (10)과 같이 무차원화 한다.

$$\Delta \lambda_s = \Delta \lambda / \lambda^* \quad (9)$$

$$\{U_s\} = \{U\} / U^* \quad (10)$$

여기서 λ^* 는 하중 스케일링 계수이고 U^* 는 변위 무차원 계수이다.

하중 파라미터(scaled)-변위(dimensionless) 곡선의 일점에서 접선 벡터를 $\{t\}$ 이라 하면, 이것은 다음과 같이 표시된다.

$$\{t\}^{(1)} = [\{\Delta U_s\}^{(1)T}; \Delta \lambda_s^{(1)}] \quad (11)$$

$$\{\Delta U_s\}^{(1)} = \{\Delta U\}^{(1)} / U^* = \Delta \lambda^{(1)} \{U_s\}^{(0)} \quad (12)$$

여기서 $\{\Delta U_s\}^{(1)}$ 은 $\Delta \lambda_s^{(1)}$ 에 대응되는 무차원화된 증분변위로 식 (12)와 같은 관계가 있고, $\{U_s\}^{(0)}$ 은 단위 하중 파라미터 즉 하중 벡터 $\{P_0\}$ 에 의한 변위(무차원)를 나타낸다. 접선 벡터 $\{t\}^{(1)}$ 의 크기를 식 (13)과 같이 제한하고, 식 (11)을 식 (13)에 대입하여 $\Delta \lambda_s^{(1)}$ 를 구하면서 식 (14)와 같이 되고, $\Delta \lambda^{(1)}$ 은 식 (15)로 표시된다.

$$\{t\}^{(1)T} \{t\}^{(1)} = S_0^2 \quad (13)$$

$$\Delta \lambda_s^{(1)} = \left(\frac{S_0^2}{\lambda^{*2} \{U_s\}^{(0)T} \{U_s\}^{(0)} + 1} \right)^{1/2} \quad (14)$$

$$\Delta \lambda^{(1)} = \left(\frac{S_0^2}{\{U_s\}^{(0)T} \{U_s\}^{(0)} + 1 / \lambda^{*2}} \right)^{1/2} \quad (15)$$

즉, 반복단계 1에서는 곡선상의 일점으로 부터 하중 파라미터(scaled)는 $\Delta \lambda_s^{(1)}$ 만큼, 변위(무차원) 벡터는 $\{\Delta U_s\}^{(1)} = \Delta \lambda^{(1)} \{U_s\}^{(0)}$ 만큼 증가된 일점으로 이동하게 되고, 이 두점을 연결하는 벡터는 $\{t\}^{(1)}$ 이 된다. 이 다음의 각 반복단계에서는 $\{t\}^{(1)}$ 에 수직인 방향으로만 이동하게 되며, 이를 식으로 표시

하면 식 (16)과 같다.

$$\{t\}^{(i)T} \{\Delta S\}^{(i+1)} = 0 \quad (16)$$

여기서 $\{\Delta S\}^{(i+1)} = [\{\Delta U_s\}^{(i+1)T} ; \Delta \lambda_s^{(i+1)}]^T$ 로서 반복단계 $(i+1)$ 에서의 위치를 그 직전단계 i 를 기준으로 표시한 것이다. 식 (16)으로부터 $\Delta \lambda_s^{(i+1)}$ 을 구하는데 있어서 강성 매트릭스의 대칭성을 보존하기 위해 다음에서와 같이 두 부분으로 나누어 생각한다. 즉, 평형식 (1)을 하중 파라미터를 이용하여 표시하면 식 (17)이 되고, 이를 두 부분으로 나누어 표시하면 각각 식 (18) 및 (19)가 되며, $(i+1)$ 단계에서의 증분변위는 식 (20)과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \{t^{+dt} \circ K\}^{(i)} \{\Delta U\}^{(i+1)} &= \Delta \lambda^{(i+1)} \{P_0\} \\ &+ \lambda_s^{(i)} \{P_0\} + \{P\} - \{t^{+dt} \circ F\}^{(i)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\{t^{+dt} \circ K\}^{(i)} \{U_i\}^{(i+1)} = \{P_0\} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \{t^{+dt} \circ K\}^{(i)} \{\Delta U_{II}\}^{(i+1)} &= \lambda^{(i)} \{P_0\} \\ &+ \{P\} - \{t^{+dt} \circ F\}^{(i)} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\{\Delta U\}^{(i+1)} = \Delta \lambda^{(i+1)} \{U_i\}^{(i+1)} + \{\Delta U_{II}\}^{(i+1)} \quad (20)$$

식 (20)을 스케일링 및 무차원화하여 식 (16)에 대입하면 식 (21) 및 식 (22)의 관계가 얻어진다.

$$\Delta \lambda_s^{(i+1)} = - \frac{\{\Delta U\}^{(i)T} \{\Delta U_{II}\}^{(i+1)}}{\lambda^* \{\Delta U_s\}^{(i)T} \{U_{IS}\}^{(i+1)} + \Delta \lambda_s^{(i)}} \quad (21)$$

$$\Delta \lambda^{(i+1)} = - \frac{\{\Delta U_s\}^{(i)T} \{\Delta U_{II}\}^{(i+1)}}{\{\Delta U_s\}^{(i)T} \{U_{IS}\}^{(i+1)} + \Delta \lambda^{(i)}/\lambda} \quad (22)$$

수렴조건은 $\Delta \lambda^{(i+1)}/\Delta \lambda^{(i)} < \epsilon$ 으로 할 수 있으며 수렴 후의 변위 및 외력은 다음과 같다.

$$\{t^{+dt} U\} = \{t U\} + \{\Delta U\}^{(1)} + \{\Delta U\}^{(2)} + \dots \quad (23)$$

$$\{t^{+dt} P\} = \{t P\} + (\Delta \lambda^{(1)} + \Delta \lambda^{(2)} + \dots) \{P_0\} \quad (24)$$

식 (22)에서 $\{\Delta U_s\}^{(1)} = \{0\}$ 로 두면, $\Delta \lambda^{(i+1)}$ 은 식 (25)와 같이 되므로 Newton-Raphson 방법과 접근방법이 같아짐을 알 수 있고⁽¹²⁾, $\Delta \lambda^{(1)} = 0$ 으로 두면 식 (26)과 같이 되며, 특히 일점문제이고 하중작용점의 변위(자유도= j)만을 고려하면 식 (27)과 같이 되어 Batoz등⁽⁸⁾의 변위 제어법과 같아짐을 알 수 있다.

$$\Delta \lambda^{(i+1)} = 0 \quad (25)$$

$$\Delta \lambda^{(i+1)} = - \frac{\{\Delta U_s\}^{(i)T} \{\Delta U_{II}\}^{(i+1)}}{\{\Delta U_s\}^{(i)T} \{U_{IS}\}^{(i+1)}} \quad (26)$$

$$\Delta \lambda^{(i+1)} = - \Delta U_{ISj}^{(i+1)} / U_{ISj}^{(i+1)} \quad (27)$$

Riks 방법으로 스텝 백 현상이 있는 문제를 풀 경우, 변곡점 근처에서 수렴속도가 느리거나 발산하는 경우도 있는데, 이때 식 (25) 또는 식 (26)의 $\Delta \lambda^{(i+1)}$ 을 사용하여 수렴방향을 바꿈으로써 수렴속도를 높일 수가 있다. 즉 Riks 방법을 적용함을

원칙으로 하되, 접선 강성계수의 크기가 일정조건을 만족하면 식 (25) 또는 식 (26)의 증분 하중 파라미터를 취하여 빠른 속도의 수렴을 기할수 있다.

2.3 다점 변위 제어 문제

여기서는 구조물의 일점 혹은 그 이상의 점에 변위제어 조건이 주어지는 문제에 대한 해석 방법을 제안하고자 한다. 이 방법은 2.2. 절의 Riks 방법을 바탕으로 하여 유도될 수 있으며, 'Riks 형 방법(Riks' type method)'라 하기로 한다. 다음의 해석에 나오는 변위 및 하중은 식 (28), 식 (29)와 같이 각각 무차원화된 양을 사용한다.

$$\{U_s\} = \{U\} / U^* \quad (28)$$

$$\{P_s\} = \{P\} / P^* \quad (29)$$

여기서 U^* 는 변위 무차원계수이고, P^* 는 하중 무차원계수이다.

무차원 하중-변위 곡선상의 일점에서의 접선 벡터 $\{t\}^{(1)}$ 은 다음과 같이 표시된다.

$$\{t\}^{(1)} = [\{\Delta U_s\}^{(1)T} ; \{\Delta P_s\}^{(1)T}]^T \quad (30)$$

여기서 $\{\Delta U_s\}^{(1)}$ 은 증분변위 파라미터 $\Delta \mu^{(1)}$ 에 대응되는 무차원변위로 다음의 관계를 만족한다.

$$\{\Delta U_s\}^{(1)} = \Delta \mu^{(1)} \{U_s\}^{(0)} \quad (31)$$

여기서 $\{U_s\}^{(0)} = \{U\}^{(0)} / U^*$ 이고, $\{U\}^{(0)}$ 은 구조물에서 변위가 제어되는 점의 변위간의 비를 나타내는 단위벡터 $\{U_n\}$ 에 의해 다음 식에서 결정된다.

$$(\{t^{+dt} \circ K\}^{(0)} + \alpha [D_I]) \{U\}^{(0)} = \alpha \{U_n\} \quad (32)$$

여기서

$$\alpha \gg K_{jj}$$

$[D_I]$: 대각 행렬(diagonal matrix)

$$D_{kk} = 0 (k \neq j)$$

$$D_{jj} = 1$$

j = 변위제어점의 자유도 (degree of freedom of the displacement-controlled points)

그리고 식 (30)의 $\{\Delta P_s\}^{(1)}$ 은 $\{\Delta U_s\}^{(1)}$ 에 대응되는 무차원등가접점력으로 다음의 관계가 있다.

$$\{\Delta P_s\}^{(1)} = \Delta \mu^{(1)} [t^{+dt} \circ K]^{(0)} \{U\}^{(0)} / P^* \quad (33)$$

접선벡터 $\{t\}^{(1)}$ 의 크기를 식 (34)와 같이 제한하고, 식 (30)을 식 (34)에 대입하여 $\Delta \mu^{(1)}$ 을 구하면 식 (35)와 같다.

$$\{t\}^{(1)T} \{t\}^{(1)} = S_0^2 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mu^{(1)} &= S_0 / [\{U_s\}^{(0)T} \{U_s\}^{(0)} \\ &+ ([t^{+dt} \circ K]^{(0)} \{U\}^{(0)})^T ([t^{+dt} \circ K]^{(0)} \\ &\{U\}^{(0)}) / P^{*2}]^{1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

이 이후의 반복단계에서는 다음의 관계가 만족되어야 한다.

$$\{t\}^{(i)T} \{\Delta S\}^{(i+1)} = 0 \quad (36)$$

$$\{\Delta S\}^{(i+1)} = [\{\Delta U_S\}^{(i+1)T}; \{P_S\}^{(i+1)T}]^T \quad (37)$$

식 (36)으로 부터 $\Delta\mu^{(i+1)} (i=1, 2, \dots)$ 을 구하기 전에, 변위가 제어되는 문제의 평형식을 두 부분으로 나누어 표시하면 다음과 같다.

$$\{^{t+\Delta t}_0 K\} + \alpha \{D_i\} \{U_i\}^{(i)} = \alpha \{U_n\} \quad (38)$$

$$\{^{t+\Delta t}_0 K\}^{(i)} + \alpha \{D_i\} \{\Delta U_U\}^{(i+1)} = \{^{t+\Delta t} P\} - \{^{t+\Delta t}_0 F\}^{(i)} \quad (39)$$

여기서,

$$\alpha \gg K_{jj}$$

$\{D_i\}$: 대각 행렬

$$D_{kk} = 0 (k \neq j)$$

$$^{t+\Delta t} P_k (k \neq j)$$

$$^{t+\Delta t}_0 F_j = 0$$

j = 변위제어점의 자유도

$(i+1)$ 반복단계에서의 무차원중분변위 $\{\Delta U_S\}^{(i+1)}$ 은 다음 식으로 표시된다.

$$\{\Delta U_S\}^{(i+1)} = \Delta\mu^{(i+1)} \{U_{IS}\}^{(i)} + \{\Delta U_{US}\}^{(i+1)} \quad (40)$$

식 (33), 식 (37) 및 식 (40)을 식 (36)에 대입하고 $\Delta\mu$ 을 구하면, 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Delta\mu^{(i+1)} = & - [\{\Delta U_S\}^{(i)T} \{U_{US}\}^{(i+1)} \\ & + \{\Delta P_S\}^{(i)T} [^{t+\Delta t}_0 K]^{(i)} \{U_U\}^{(i+1)} / \\ & P^*] / [\{\Delta U_S\}^{(i)T} \{U_{IS}\}^{(i)} \\ & + \{\Delta P_S\}^{(i)T} [^{t+\Delta t}_0 K]^{(i)} \{U_I\}^{(i)} / P^*] \quad (41) \end{aligned}$$

수렴조건은 $\Delta\mu^{(i+1)} / \Delta\mu^{(i)} < \epsilon$ 으로 할 수 있으며, 수렴후의 변위 및 등가절점력은 다음과 같다.

$$\{^{t+\Delta t}_0 U\} \{^t U\} + \{\Delta U\}^{(1)} + \{\Delta U\}^{(2)} + \dots \quad (42)$$

$$\{^{t+\Delta t} P\} = \{^{t+\Delta t}_0 F\}^{(i+1)} \quad (43)$$

식 (41)에서 $\Delta\mu^{(i+1)}$ 은 $\{\Delta U_S\}^{(1)} = \{0\}$ 로 두면 식 (44)로 되고, $\{\Delta P_S\}^{(1)} = \{0\}$ 으로 두면 식 (45)로 되며, 식 (45)에서 변위 작용점의 변위만을 고려하면 식 (46)이 되어 페널티 방법과 같아짐을 알 수 있다.

$$\Delta\mu^{(i+1)} = \frac{\{\Delta P_S\}^{(i)T} [^{t+\Delta t}_0 K]^{(i)} \{\Delta U_U\}^{(i+1)}}{\{\Delta P_S\}^{(i)T} [^{t+\Delta t}_0 K]^{(i)} \{U_I\}^{(i)}} \quad (44)$$

$$\Delta\mu^{(i+1)} = - \frac{\{\Delta U_S\}^{(i)T} \{\Delta U_{US}\}^{(i+1)}}{\{\Delta U_S\}^{(i)T} \{U_{IS}\}^{(i)}} \quad (45)$$

$$\Delta\mu^{(i+1)} = 0 \quad (46)$$

변위제어가 있는 문제에서도, 스넵 백 현상이 있고 하중-변위곡선상에서 변곡점이 있을 경우에는 Riks 형 방법에 의한 계산의 수렴이 느리게 이루어 지거나 발산하는 경우가 있다. 이 경우 식 (44),

(45) 혹은 식 (46)의 $\Delta\mu^{(i+1)}$ 을 사용하여 접근방향을 달리함으로써 수렴속도를 크게 할 수가 있다.

3. 적용에 및 고찰

전술한 여러가지의 방법을 다섯가지 문제에 적용하고 기존의 해석결과와 비교하여 그 타당성 및 적용 가능성을 검토하고자 한다.

3.1 구면형 캡

Fig. 1에 가장자리가 고정된 축대칭 구면형 캡의 각종 자료가 나타나 있다. 이 문제의 해석에서는 같은 크기로 된 10개의 8절점 isoparametric 축대칭요소로 분할된 유한요소모델을 택하였으며, 중심부의 윗면에 하중 또는 변위부과 조건이 가해지고 있다. 하중이 가해진다고 본 경우에는 Newton-Raphson 방법과 Riks 방법으로 계산하고, 변위부과 조건이 주어진다고 본 경우에는 페널티 방법과 Riks 형 방법으로 각각 계산하였다.

계산결과와 참모문헌 (13)의 계산결과와 비교되었는데, Fig. 2에서 보는 바와 같이 각 방법들이 대체로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

계산량에 있어서는 각 방법들에 대한 계산 시간을 비교하여 본 결과 Table 1에서 보는 바와 같이 페널티 방법이 매우 효율적임을 알 수 있다.

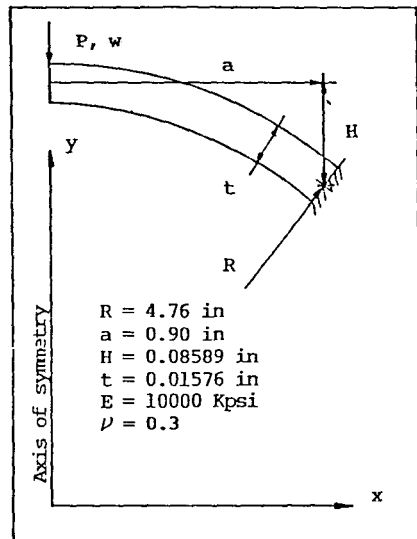


Fig. 1 Spherical cap

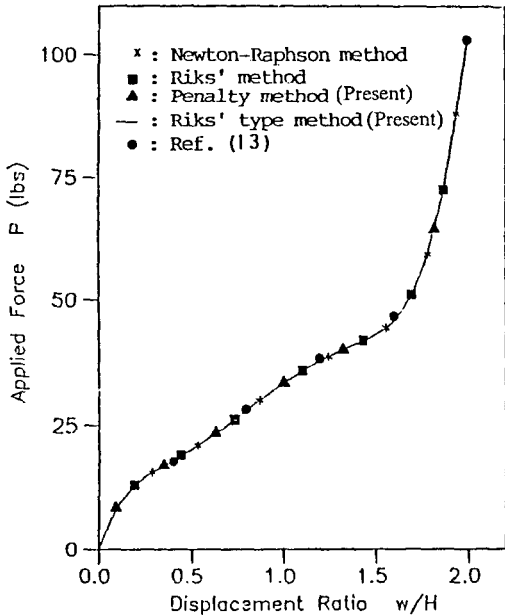


Fig. 2 Large displacement elastic static response of the spherical cap

Table 1 Comparison of time requirements for each methods

| Methods | CPU time |
|----------------------------------|-------------|
| Newton-Raphson method | 301.579 sec |
| Riks method | 266.836 sec |
| Penalty method (present study) | 186.073 sec |
| Riks type method (present study) | 287.410 sec |

3.2 직각 프레임

Fig. 3에 평면응력상태의 직각프레임의 형상 및 제원이 나타나 있다. 이 예에서는 11개의 8절점 isoparametric 요소로 분할된 유한요소 모델을 사용하였다. 이 문제는 스냅 스루 현상 및 스냅 백 현상을 나타내고 있으며, 보의 모델 (beam model)로 많이 연구되었다⁽¹⁴⁻¹⁶⁾.

먼저 스냅 스루 현상이 있으므로 Newton-Raphson 방법은 적용이 불가능하고, 또한 스냅 백 현상이 있으므로 페널티 방법도 적용이 불가능하다. 그래서 하중 작용의 경우는 Riks 방법으로, 변위부과 조건의 경우는 Riks 형 방법으로 각각 계

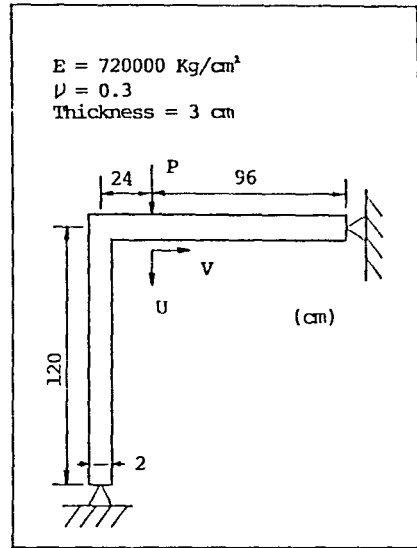


Fig. 3 Right-angle frame in plane stress condition

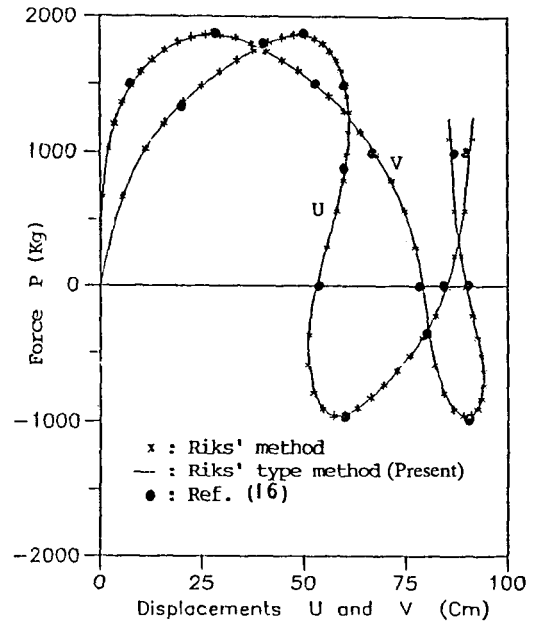


Fig. 4 Large displacement load-deflection curves of the right-angle frame

산되었다. 이 결과는 Fig. 4에서 보는 바와 같이 보를 모델로 하여 구한 기존의 결과와 비교 되었으며, 대체로 잘 일치함을 알 수 있다. 여기서 기존의 Riks 방법 및 식 (41)만을 사용한 Riks 형 방법이 모두 스냅 백 과정에서 변곡점 근처 ($U=56\text{cm}$, $P=300\text{kg}$)에서 발산 또는 반복계산수가 매우 커

짐을 유의해야 한다. 그래서 본 계산에서는 상대기울기 (R_{grad})를 구하여 Riks 방법의 경우, 이 값이 식 (47)의 범위일때는 식 (26)의 증분하중파라미터를 사용하였으며, Riks 형 방법의 경우에는 이 값이 식 (48)의 범위일때 식 (46)의 증분변위파라미터를 사용함으로써 발산을 방지하고 수렴속도를 크게 할 수 있었다.

$$0.5 \leq R_{grad} < 1.5 \quad (47)$$

$$R_{grad} \leq 1.0 \quad (48)$$

식 (47)과 식 (48)의 상대기울기는 다음과 같이 정의되었다.

$$R_{grad} = Grad / (Grad)_0 \quad (49)$$

$$Grad = P_{Sj}^{(0)} / U_{Sj}^{(0)} \quad (50)$$

$(Grad)_0 =$ 초기의 $Grad$

$j =$ 하중 작용점 (변위 부과점)의 자유도

3.3 좁은 아취

Fig. 5에 평면응력상태에 있는 아취의 제원이 나타나 있다. 이 문제는 12개의 8절점 isoparametric 요소로 분할되었으며, 3가지 경우로 나누어 해석될 수 있다. 즉 중앙부 상면에 하중이 작용하는 경우, 중앙부 상면에 변위부과 조건이 주어지는 경우, 그리고 중앙부 상하면에 변위부과 조건이 주어지고 그 크기가 동일한 경우이다. 첫번째 경우는 Riks 방법에 의해, 두번째 경우와 세번째 경우는 Riks 형 방법에 의해 계산되었다. Fig. 6은 이 결과들을 비교한 것으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있으며,

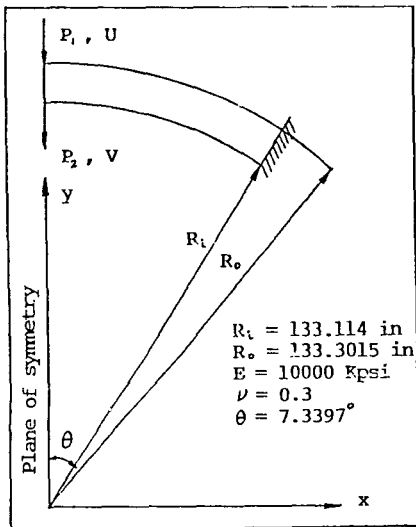


Fig. 5 Shallow arch

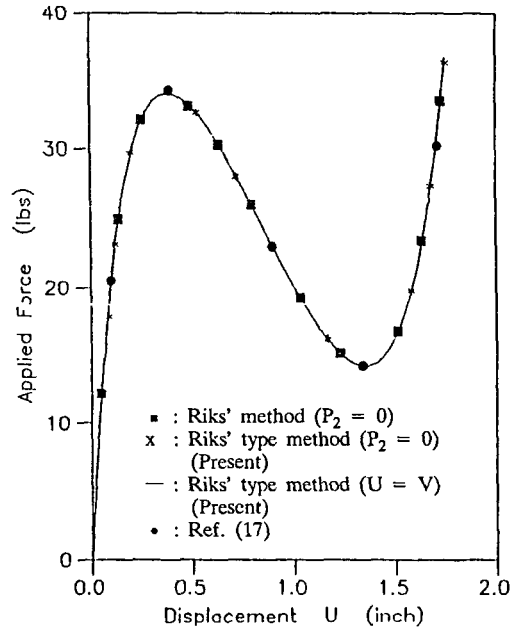


Fig. 6 Load-deflection curve of the shallow arch

상하면에 변위부과 조건이 주어지는 경우에는 등가 하중의 합을 작용력으로 표시하였다. 이 예를 통해서 다점 변위제어 문제에 대한 해석과정의 타당성을 확인할 수 있었다.

3.4 Belleville 스프링

Fig. 7에 축대칭 상태에 있는 Belleville 스프링

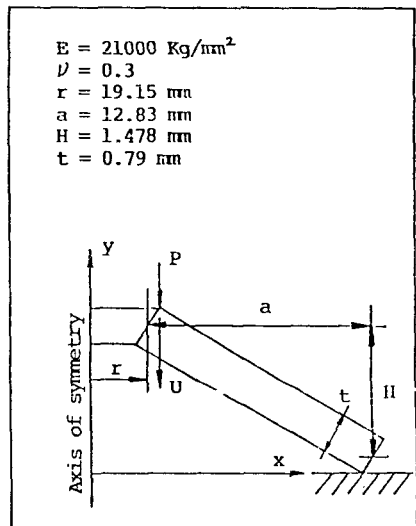


Fig. 7 Belleville spring

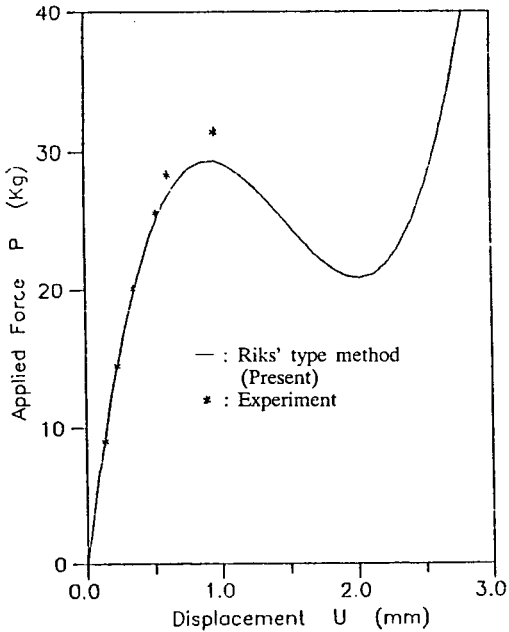


Fig. 8 Comparison of the load-deflection solution of the Belleville spring

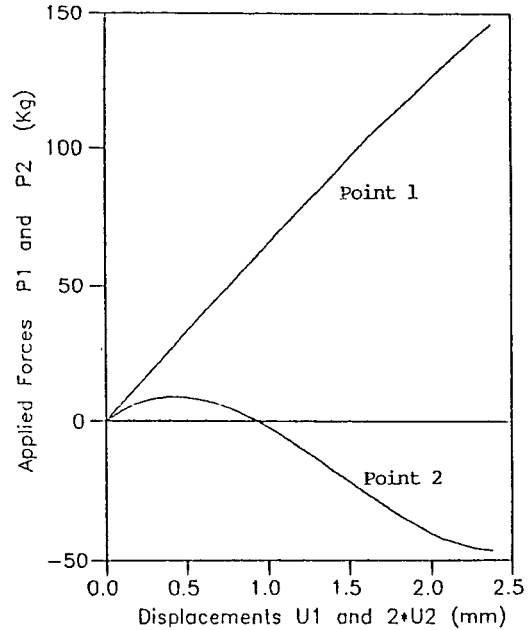


Fig. 10 Load-deflection curves of the Belleville spring under displacement control

의 제원이 나타나 있다. 이 문제는 5개의 8일점 isoparametric 요소로 분할된 모델을 두고, Riks 형 방법에 의해 해석 되었으며 실험결과와 Fig. 8에 비교되었다. 좌굴점에서의 하중은 계산치와 실험치의 차이가 6.7%로 이는 실험상의 오차 및 계

산상의 가정(마찰력을 무시하였음)에 의한 것으로 추정된다.

하중의 측정은 용량 100kg인 로드셀과 기록계에 의해서 수행되었고 변위는 다이얼 개이지에 의해 측정되었다.

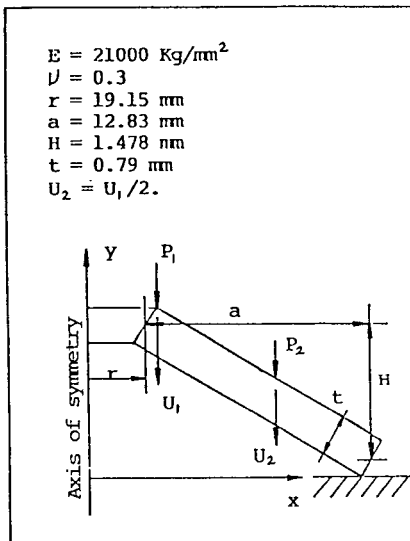


Fig. 9 Belleville spring under displacement control

3.5 2점 변위부과 조건이 주어지는 Belleville 스프링

Fig. 9에는 스프링의 2점에 변위부과 조건이 주어지는 Belleville 스프링의 제원이 나타나 있고, 1점과 2점의 변위비는 2:1로 주어져 있다. 유한요소 모델은 5개의 8절점 isoparametric 요소로 분할되었다. 이 문제는 기존의 Riks 방법 등으로는 해석이 곤란하며 3절의 Riks형 방법에 의해 해석될 수 있었다. Fig. 10에는 점 1 및 점 2의 하중-변위 곡선이 나타나 있으며, 수평축은 U 및 $2U$ 로 취하였다.

4. 결 론

대변위 문제에 대한 증분평형 반복형의 평형식으로부터 스냅 스루 현상 또는 스냅 스루 및 스냅 백 현상이 있는 문제를 효과적으로 해석하기 위한 방

법이 연구되었으며, 이들을 5가지의 문제에 적용하고 해석한 결과를 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 구조물의 일점에 하중 또는 변위부과조건이 주어지고 스넵 백 현상이 없는 문제에 대해서는 계산량이 적고 과정이 단순한 페널티 방법이 적합하다.

(2) 구조물의 일점 이상에 하중이 가해지는 경우에는 스넵 백 현상의 유무에 관계없이 Riks 방법을 사용할 수 있으나, 변곡점 근처에서 발산 또는 수렴 속도의 저하가 있을 수 있으므로 이때에는 식 (25) 또는 식 (26)의 증분하중계수를 취함이 좋다. 적용예 2의 경우에는 상대기울기 $0.5 < Rgrad \leq 1.5$ 의 범위에서 식 (26)의 증분하중 파라미터를 사용하여 발산을 없앨 수 있었다.

(3) 구조물의 일점 이상에 변위부과 조건이 주어지는 경우에는 기존의 Riks 방법 등으로는 해석이 곤란하며, 이러한 경우에 대해서는 2.3절에서 제안된 Riks형 방법이 적용될 수 있다. 적용예 3과 5에서는 2점 변위 부과조건이 주어지는 경우에 대한 해석이 수행된 바 있는데, 스넵 백 현상이 있는 경우에는 하중작용 문제에서와 유사하게 변곡점 근처에서의 계산이 효과적으로 수행되지 않는 수가 있으며, 이때에는 식 (44), 식 (45) 혹은 식 (46)의 증분변위 파라미터를 사용함이 좋다. 적용예 2의 경우, 상대기울기 $Rgrad \leq 1.0$ 의 범위에서 식 (46)의 증분변위파라미터를 사용하여 발산현상을 없앨 수 있었다.

적정한 하중 파라미터 또는 증분변위 파라미터의 선택을 위해서는 스케일링 계수, 무차원화시의 기준하중 및 기준변위의 선택과 함께 앞으로의 연구가 더 필요할 것으로 생각된다.

후 기

본 연구는 1988년도 문교부의 학술연구조성비로 연구비 지원을 받아 수행되었으며, 관계자 여러분들께 감사하는 바이다.

참 고 문 헌

- (1) Ramm, E., 1981, "Strategies for Tracing the Non-linear Response Near Limit Points", Proceedings of the Europe-U. S. Workshop on "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", Bochum, Germany, Springer-Verlag, pp. 63~89.
- (2) Bergan, P.G., 1979, "Solution Algorithms for Non-linear Structural Problems", Proceedings of the International Conference on "Engineering Applications of the Finite Element Method", Høvik, Norway, A.S., Computas, 13. 1~13.38.
- (3) Wright, E.W., and Gaylord, E.H., 1968, "Analysis of Unbraced Multistory Steel Rigid Frames", Proceedings of the ASCE, Journal of the Structural Division, 94, pp. 1143~1163.
- (4) Argyris, J.H., 1965 "Continua and Discontinua", Proceedings of 1st Conference on "Matrix Methods of Structural Mechanics", Wright-Patterson A.F.B., U.S.A., pp. 11~189.
- (5) Pian, T.H.H., and Tong, P., 1970, "Variational Formulation of Finite Displacement Analysis", IUTAM Symposium on "High Speed Computing of Elastic Structures", Liege, pp. 43~60.
- (6) Lock, A.C., and Sabir, A.B., 1973, "Algorithm for Large Deflection Geometrically Nonlinear Plate and Curved Structures", in "Mathematics of Finite Elements and Applications", Academic Press, N.Y., pp. 483~494.
- (7) Haisler, W., Stricklin, J., and Key, J., 1977, "Displacement Incrementation in Nonlinear Structural Analysis by the Self-Correcting Methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, pp. 3~10.
- (8) Batoz, J. -L., and Dhatt, G., 1979, "Incremental Displacement algorithms for Nonlinear Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14, pp. 1262~1267.
- (9) Riks, E., 1979, "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", International Journal of Solids and Structures, 15. pp. 529~551.
- (10) Crisfield, M.A., 1981, "A Fact Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through", Computers and Structures, 13, pp. 55~62.
- (11) Bathe, K.J., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall Inc., Chapter 6.
- (12) Simo, J.C., Wriggers, P., Schweizerhof, K.H., and Taylor, R.L., 1986, "Finite Deformation Post-Buckling Analysis Involving and Contact Constraints", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23, pp. 779~800.
- (13) Mondkar, D.P., and Powell, G.H., 1978, "Evaluation of Solution Schemes for Non-Linear Structures", Computers and Structures, pp. 223~236.

(1) Ramm, E., 1981, "Strategies for Tracing the Non-linear Response Near Limit Points", Proceedings of the Europe-U. S. Workshop on "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", Bo-

- (14) Frey, F., 1978, "L'Analyse Statique Non Lincaire des Structures par Laconstruction Metallique", Ph. D. Thesis, Universite de Liege.
- (15) Karamanlidis, D., Honecker, A., and Knothe, K., 1981, "Large Deflection Finite Element Analysis of Pre-and Postcritical Response of thin Elastic Frames", Proceedings of the Europe-U.S. Workshop on "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", Bochum, Germany, Springer-Verlag, pp. 217~234.
- (16) Koo, J.S., Lee, B.C., and Kwak, B.M., 1988, "A Study on Improving Efficiency in Computational Procedure of Finite Element Nonlinear Analysis of Plane Frame Structures", Transaction of the KSME, Vol. 12, No.4, pp. 631~641.
- (17) Padovan, J., and Tovichakchaikul, S., 1982, "Self-Adaptive Predictor-Corrector Algorithms for Static Non-linear Structural Analysis", Computer and Structures, 15, pp. 365~377.
- (18) Endo, T. Oden, J.T. Becker E.B. and Miller, T. 1984, "A Numerical Analysis of Contact and Limit-Point Behavior in a Class of Problems of Finite Elastic Deformation", Computers and Structures, 18, pp. 899~910.
- (19) Chróscielewski, J. Schmidt, R. 1985, "A Solution Control Method for Nonlinear Finite Element Post-Buckling Analysis of Structures", Post Buckling of Elastic Structures, Proceedings, of the EUROMECH Colloquium 200, pp. 19~33.
- (20) Riks, E. 1984, "Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 47, pp. 219~259.