

〈技術論文〉

## VAXIMA를 이용한 비선형 보존 동역학계의 해석

이 원 경\*

(1990년 3월 6일 접수)

### Analysis of a Nonlinear Conservative Dynamical System Using VAXIMA

Won Kyoung Lee

**Key Words :** Nonlinear Conservative Dynamical System(비선형 보존 동역학계), VAXIMA, Cubic and Quintic Nonlinear Terms(삼차 및 오차의 비선형항), Duffing Oscillator(Duffing 진동계), Period-Amplitude Characteristics(주기-진폭특성)

#### Abstract

VAXIMA is a computer software which gives us results in terms of parameters. We use VAXIMA to analyze quantitatively a conservative dynamical system with cubic and quintic nonlinear terms. The system is described by a nonlinear second-order autonomous ordinary differential equation. Using the Lindstedt-Poincaré method, we obtain period-amplitude characteristics. In order to check the validity of the approximate solution, we integrate numerically the equation of motion.

#### 1. 서 론

수치뿐만 아니라 매개변수를 포함하는 형태로 결과를 표출해내는 컴퓨터 소프트웨어인 MACSYMA는 많은 공학적 문제를 해결하는 데 이용되어 왔다<sup>(1)</sup>. 본 연구에서는 MACSYMA를 VAX컴퓨터용으로 개편한 VAXIMA를 이용하여, 3차 및 5차의 비선형항을 갖는 보존 동역학계를 정량적으로 해석하고자 한다. 이 동역학계는 2계 자율 상미분방정식(a second-order autonomous ordinary differential equation)에 의해 지배된다. 우선 일반화된 좌표의 기함수인 회복력을 가지는 동역학계를 생각해보자. Taylor 급수전개에 의하여 이 회복력을 5차항까지만 고려하면 평형점 근방에서는 원래의 계와 어느 정도 근사한 계를 얻을 수 있게 된다. 만약 이 5차항마저 무시한다면 그 계는 Duffing 진동계가 된다. 통상 비선형항을 많이 가

\*정회원, 영남대학교 공과대학 정밀기계공학과

질수록 해석하기가 어려워지는데, 이 점이 바로 Duffing 진동계가 5차항을 포함하는 계보다 열등한 근사임에도 불구하고 비선형 현상을 설명하는 데 있어서 수학적 모델로서 더 자주 이용되는 이유이다.

본 연구에서는 Lindstedt-Poincaré 방법을 이용하여, Duffing 진동계에 5차항을 포함시킴으로써 진폭이 더 큰 운동에도 타당성이 있는 근사해를 구하고자 한다. VAXIMA를 사용하여 해석하는 과정은 부록에 첨부되어 있으며 이 작업은 VAX 11/750 컴퓨터에서 수행된 것이다.

#### 2. 해 석

문제의 동역학계가 다음의 운동방정식

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^3 + bx^5) = 0 \quad (1)$$

에 의해 지배된다고 하자. 여기서  $\cdot$ 은 무차원시간  $\tau$ 에 대한 미분을 나타내며  $\varepsilon$ 과  $b$ 는 매개변수이다.  $b=0$ 인 경우에 이 동역학 계는 Duffing 진동계를

나타낸다. Lindstedt-Poincaré 방법<sup>(2)</sup>을 이용하여 초기조건  $x(0)=a$ 와  $\dot{x}(0)=0$ 을 만족하는 근사해를 구하기 위해 새로운 시간변수  $t=\omega\tau$ 를 도입한다.  $t$ 에 대한 미분꼴로 지배방정식 (1)을 다시 쓰게 되면 2차 도함수의 계수가  $\omega^2$ 이 되는데 이를 통해 진동수와 진폭이 서로 영향을 미치게 된다.

여기서  $\omega$ 는  $\epsilon$ 에 의존하는 미지의 함수이며 장차 secular term이 0이 되도록 함으로써 구할 수 있다. 초기조건  $x(0)=a$ 과  $\dot{x}(0)=0$ 을 만족하는 해를 구하기 위해 우선  $\epsilon=0$ 인 경우를 생각해보자. 이때  $x=a \cos \tau$ 가 (1)의 해가 되고 고유진동수는 1이 된다.  $\epsilon$ 이 0은 아니지만 충분히 작은 경우에 근사해를 구하기 위해 다음과 같은 전개가 가능하다고 가정하자.

$$\omega=1+\epsilon k_1+\epsilon^2 k_2+\dots \quad (2)^{(d45)*}$$

$$x(\tau; \epsilon)=a \cos t+\epsilon x_1(t)+\epsilon^2 x_2(t)+\epsilon^3 x_3(t)+\dots \quad (3)^{(d48)}$$

이 해는  $\epsilon=0$ 인 경우에  $\omega=1$ 과  $x=a \cos t$ 인 해를 주게 됨은 자명하다.

식 (2)와 (3)을 식 (1)에 대입하면

$$\begin{aligned} & (1+\epsilon k_1+\epsilon^2 k_2+\dots)^2 \frac{d^2}{dt^2}(a \cos t+\epsilon x_1 \\ & +\epsilon^2 x_2+\dots)+(a \cos t+\epsilon x_1+\dots) \\ & +\epsilon\{(a \cos t+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\dots)^3 \\ & +b(a \cos t+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\dots)^5\}=0 \end{aligned} \quad (4)$$

$\epsilon, \epsilon^2$  및  $\epsilon^3$  등의 계수를 0으로 두면 다음의 선형 비제차 상미분방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2}+x_1 & =-a^5 b \cos^5 t-a^3 \cos^3 t \\ & +2k_1 a \cos t \end{aligned} \quad (5)^{(d52)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2}+x_2 & =2k_1 a^5 b \cos^5 t \\ & -5a^4 b x_1 \cos^4 t+2k_1 a^3 \cos^3 t \\ & -3a^2 x_1 \cos^2 t-(-2k_2+3k_1^2) a \cos t \\ & +2k_1 x_1 \end{aligned} \quad (6)^{(d53)}$$

이 연구에서는 복잡함을 피하기 위하여  $\epsilon^2$ 항까지만 취하기로 한다. 식 (5)와 (6)으로부터  $x_1$ 과  $x_2$ 를 구하기 위하여 다음의 초기조건

$$x_i(0)=0, \dot{x}_i(0)=0, i=1, 2 \quad (7)$$

을 이용하면<sup>(2)</sup> 식 (3)과 (7)로 부터 초기조건  $x(0)=$

$a$ 와  $x(0)=0$ 이 만족됨을 확인할 수 있다.

식 (5)을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2}+x_1 & =-\frac{a^5 b \cos 5 t}{16} \\ & -\frac{1}{16}(5 a^5 b+4 a^3) \cos 3 t \\ & -\frac{1}{8}(5 a^5 b+6 a^3-16 k_1 a) \cos t \end{aligned} \quad (8)^{(d54)}$$

해의 유계조건(有界條件)을 만족시키기 위해  $\cos t$ 의 계수(secular term)는 0이 되어야 하므로

$$k_1=\frac{5 a^4 b+b a^2}{16} \quad (9)^{(d55)}$$

을 얻게 된다.

식 (9)를 식 (8)에 대입하고 일반해를 구한 후 초기조건 (7)에 의해 적분상수를 구하면  $x_1$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x_1(t) & =\frac{a^5 b \cos 5 t+(15 a^5 b+12 a^3) \cos 3 t}{384} \\ & -\frac{(4 a^5 b+3 a^3) \cos t}{96} \end{aligned} \quad (10)^{(d65)}$$

여기서  $\cos 5 t$ 와  $\cos 3 t$ 의 계수들은 비제차항에서 생겨난 것이며  $\cos t$ 의 계수는 초기조건 (7)에 의해 결정된 것이다.

식 (9)와 (10)을 식 (6)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2}+x_2 & =-\frac{5 a^9 b^2}{6144} \cos 9 t-\left(\frac{95 a^9 b^2}{6144}\right. \\ & \left.+\frac{3 a^7 b}{256}\right) \cos 7 t \\ & -\left(\frac{7 a^7 b}{512}+\frac{3 a^5}{128}\right) \cos 5 t+\left(\frac{5 a^9 b^2}{24}\right. \\ & \left.+\frac{205 a^7 b}{512}+\frac{3 a^5}{16}\right) \cos 3 t \\ & +\left(\frac{215 a^9 b^2}{1536}+\frac{19 a^7 b}{64}+\frac{21 a^5}{128}\right. \\ & \left.+2 k_2 a\right) \cos t \end{aligned} \quad (11)^{(d68)}$$

해의 유계조건에 의하면  $\cos t$ 의 계수는 0이 되어야 하므로

$$k_2=-\frac{215 a^9 b^2+456 a^7 b+252 a^5}{3072} \quad (12)^{(d69)}$$

을 얻게 된다.

식 (12)를 식 (11)에 대입하고 일반해를 구한 후 초기조건 (7)에 의해 적분상수를 구하면  $x_2$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

\*이하 d로 시작하는 번호(첨자)의 방정식은 부록의 것과 동일 함.

$$\begin{aligned}
 x_2(t) = & \{3a^3b^2 \cos 9t + (95a^3b^2 + 72a^7b) \cos 7t \\
 & + (168a^7b + 288a^5) \cos 5t \\
 & + (-7680a^9b^2 - 14760a^7b - 6912a^5) \\
 & \times \cos 3t\}/294912 \\
 & + \{(3791a^9b^2 + 7620a^7b + 3312a^5) \\
 & \times \cos t\}/147456 \quad (13)^{(d75)}
 \end{aligned}$$

따라서 식 (2), (3), (9), (11), (12), 및 (13)으로 부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 x(\tau; \epsilon) = & a \cos \omega\tau + \epsilon \{a^5b \cos 5\omega\tau + (15a^5b \\
 & + 12) \cos 3\omega\tau\}/384 \\
 & + \epsilon^2 \{ \{3a^9b^2 \cos 9\omega\tau + (95a^9b^2 \\
 & + 72a^7b) \cos 7\omega\tau \\
 & + (168a^7b + 288a^5) \cos 5\omega\tau \\
 & + (-7680a^9b^2 - 14760a^7b - 6912a^5) \\
 & \times \cos 3\omega\tau\}/294912 \\
 & + \{(3791a^9b^2 + 7620a^7b + 3312a^5) \\
 & \times \cos \omega\tau\}/147456 \} + O(\epsilon^3) \quad (14)^{(d77)}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\omega = 1 + \epsilon(6a^2 + 5a^4b)/16 + \epsilon^2(252a^4 + 456a^6b + 215a^8b^2)/3072 + O(\epsilon^3) \quad (15)^{(d76)}$$

식 (14)로 부터  $x$ 는 주기가

$$T_\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (16)$$

인 주기함수임을 알 수 있다.

### 3. 수치 예

VAXIMA를 이용해서 구한 근사해를 실제문제에 적용시키기 위하여 Fig. 1의 동역학계를 생각해 보자. 이 계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x(x^2 + 1)^{-1/2} \{ (x^2 + 1)^{1/2} - \lambda \} = 0 \quad (17)$$

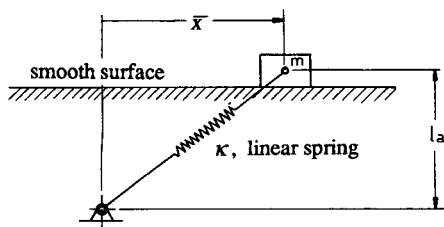


Fig. 1 Mass slides on a smooth surface while restrained by a linear spring

Table 1 Physical meaning of the system parameter  $\lambda$

	Spring force	
	$x=0$	$x \neq 0$
$\lambda < 1$	Tension	Tension
$\lambda = 1$	No force	Tension
$\lambda > 1$	Compression	Compression or Tension

여기서

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{k}{m}} \bar{t}, \quad x = \frac{\bar{x}}{l_a}, \quad \lambda = \frac{l_b}{l_a}$$

이며  $\bar{t}$ 는 시간을 나타내는 변수이고  $l_b$ 는 변형되지 않은 상태의 스프링의 길이를 나타낸다.  $\lambda$ 는 이 계의 특성을 결정하는 매우 중요한 매개변수이며 그 물리적 의미는 Table 1에 나타나 있다. 간단한 해석을 통하여 다음과 같은 사실을 쉽게 알 수 있다.

$\lambda \leq 1$ 일 때  $x=0$ 는 유일한 평형점으로서 안정한다.  $\lambda > 1$ 일 때 세계의 평형점, 즉  $x=0$  및  $x = \pm(\lambda^2 - 1)^{1/2}$ 은 안정한 평형점(center)이다.

본 연구에서는  $\lambda < 1$ 일 때의  $x=0$  즉 안정한 평형점(center) 근방에서의 주기운동에만 관심을 가지기로 한다. 따라서 운동방정식 (17)의 회복력을  $x=0$ 에 대한 Taylor 급수전개에 의하여 5차항까지만 전개하면 다음의 근사한 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1-\lambda)x + \frac{\lambda}{2}x^3 - \frac{3\lambda}{8}x^5 = 0 \quad (18)$$

이 식을 새로운 무차원 시간변수인  $\tau = (1-\lambda)^{1/2} \bar{\tau}$ 에 대하여 다시 정리 하면 식 (1)을 얻게된다. 그때

$$\epsilon = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)} \quad \text{및} \quad b = -\frac{3}{4} \quad \text{이 된다.}$$

$\lambda = 0.0, 0.3, 0.6$  및  $0.9$ 에 대해서 주기와 진폭의 관계가 Fig. 2에 도시되어 있다. 이 그림에서 실선은 수치적분에 의한 결과이며 쇄선은 근사해, 점선은  $b=0$ 인 경우 즉 Duffing 진동계로 근사한 경우의 근사해를 나타낸다.

우선  $\lambda=0.0$ 일때 이 계는 선형계로서 단순 조화운동을 하게 되므로 주기는 진폭에 무관한  $2\pi$ 가 된다. 근사해는  $\epsilon=0$  이므로 식(15)와 (16)으로부터 각각  $\omega=1$ 과  $T=2\pi$ 를 주므로 완전해와 일치하게

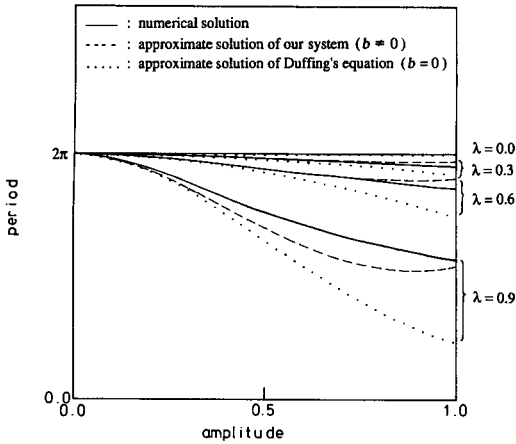


Fig. 2 Period-amplitude characteristics

된다.  $\lambda=0.3$ 일 때는  $\epsilon=0.214$ 에 해당하며 두 근사해( $b=0$  및  $b \neq 0$ 인 경우)가 완전해와 잘 일치함을 볼 수 있다.  $\lambda=0.6$ 일 때는  $\epsilon=0.75$ 에 해당하며 5차의 비선형항을 포함한 경우( $b \neq 0$ )의 근사해가 Duffing 진동계( $b=0$ )의 근사해보다 두드러지게 우월함을 알 수 있다.  $\lambda=0.9$ 일 때는  $\epsilon=4.5$ 에 해당되어  $\epsilon$ 이 충분히 적다고 볼 수 없으므로 Lindstedt-Poincaré방법에 의한 근사해의 의미가 적어진다. 그럼에도 불구하고 그림에 의하면 5차의 비선형항을 포함한 경우( $b \neq 0$ )의 근사해가 Duffing 진동계( $b=0$ )의 근사해보다 전반적으로 우월함을 알 수 있다.

이상에서 살펴본 모든  $\lambda$ 의 값에 대하여 운동이 적은 경우( $a \ll 1$ )에 주기가  $2\pi$ 에 접근함을 알 수 있다. 이 사실은 운동이 적은 경우에는 계 (1)의 선형화된 계 즉 단순진동계 (simple oscillator)

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{19}$$

가 운동을 지배하게 된다는 데서 쉽게 입증된다.

#### 4. 결 론

VAXIMA(매개변수를 포함하는 형태로 결과를 표출해 내는 컴퓨터 소프트웨어)를 이용하여 삼차 및 오차의 비선형항을 갖는 보존 동역학계의 주기-진폭특성을 근사적으로 구하였다. 해석 방법으로는 Lindstedt-Poincaré 방법을 사용하였으며 근사해의 타당성을 확인하기 위해 수치적분에 의한 결과와 비교하였다.

Duffing 진동계(삼차의 비선형항만 포함)의 근사해보다는 본 연구에서 구한 근사해가 우월함을 알 수 있었으며 복잡한 해석과정의 수고를 줄이는 데 VAXIMA가 얼마나 유익한지를 보여주었다.

#### 후 기

이 연구는 1989년도 영남대학교 교비 연구조성비의 지원으로 수행된 것임.

#### 참 고 문 헌

- (1) Rand, R., 1983, "MACSYMA, Applications in Science and Engineering", Pitman Press.
- (2) Nayfeh, A. H. and Mook, D.T., 1979, "Nonlinear Oscillations", John Wiley & Sons.

#### 부 록

- (d42) lp10
- (c43) derivabbrev : true\$
- (c44) w : 1+k[1]\*e+k[2]\*\*e\*\*2 ;
- (d44)  $k_2 e^2 + k_1 e + 1$
- (c45) w ;
- (d45)  $k_2 e^2 + k_1 e + 1$
- (d46) x : a\*cos(t) ;
- (d46)  $a \cos(t)$
- (c47) for i : 1 thru 2 do x : x+y[i](t)\*\*e\*\*i ;
- (c47) done
- (c48) x ;
- (c48)  $a \cos(t) + e^2 x_2(t) + e x_1(t)$
- (c49) diff(x, t, 2) + (x+e\*x\*\*3+e\*b\*x\*\*5)/w\*\*2 ;
- (d49)  $e^2 x_2(t)_{tt} + e x_1(t)_{tt} + (b e (a \cos(t) + e^2 x_2(t) + e x_1(t))^5 + e (a \cos(t) + e^2 x_2(t) + e x_1(t))^3 + a \cos(t) + e^2 x_2(t) + e x_1(t)) / (k_2 e^2 + k_1 e + 1)^2 - a \cos(t)$
- (c50) taylor(% , e, 0, 2) ;
- (d50)  $/T / (x_1(t)_{tt} + a^5 b \cos^5(t) + a^3 \cos^3(t) - 2k_1 a \cos(t) + x_1(t)) e + (x_2(t)_{tt} - 2 k_1 a^5 b \cos^5(t) + 5 a^4 b x_1(t) \cos^4(t) - 2 k_1 a^3 \cos^3(t) + 3a^2 x_1(t) \cos^2(t) + (-2k_2 + 3k_1^2) a \cos(t) + x_2(t) - 2 k_1 x_1(t)) e^2 + \dots$
- (c51) for i : i thru 2 do eq[i] : coeff(% , e, i) ;
- (d51) done

(d52)  $/R/x_1(t)_{tt} + a^5 b \cos^5(t) + a^3 \cos^3(t) - 2k_1 a \cos(t) + x_1(t)$

(c53) eq (2)

(d53)  $/R/x_2(t)_{tt} - 2k_1 a^5 b \cos^5(t) + 5a^4 b x_1(t) \cos^4(t) - 2k_1 a^3 \cos^3(t) + 3a^2 x_1(t) \cos^2(t) + (-2k_2 + 3k_1^2) a \cos(t) + x_2(t) - 2k_1 x_1(t)$

(c54) expand(trigreduce(expand(eq[1]))) ;

(d54)  $x_1(t)_{tt} + \frac{a^5 b \cos(5t)}{16} + \frac{5a^5 b \cos(3t)}{16} + \frac{a^3 \cos(3t)}{4} + \frac{5a^5 b \cos(t)}{8} + \frac{3a^3 \cos(t)}{4} - 2k_1 a \cos(t) + x_1(t)$

(c55) solve(coeff(% , cos(t)), k[1]) ;

gc : [ \* list : 949 {57%} ; fixnum : 51 {2%} ;  
ut : 73% ]

(d55)  $\left[ k_1 = \frac{5a^4 b + 6a^2}{16} \right]$

(c56) ev(d54, d55) ;

(d56)  $x_1(t)_{tt} + \frac{a^5 b \cos(5t)}{16} + \frac{5a^5 b \cos(3t)}{16} + \frac{a^3 \cos(3t)}{4} - \frac{a(5a^4 b + 6a^2 b) \cos(t)}{8} + \frac{5a^5 b \cos(3t)}{8} + \frac{a^3 \cos(3t)}{4} + x_1(t)$

(c57) ode2(% , y[1](t), t) ;

gc : [ \* list : 949 {58%} ; fixnum : 51 {2%} ;  
ut : 74% ]

gc : [ \* list : 949 {58%} ; fixnum : 51 {2%} ;  
ut : 73% ]

(d57)  $x_1(t) = \frac{a^5 b \cos(5t) + (15a^5 b + 12a^3) \cos(3t)}{384} + \% k_1 \sin(t) + \% k_2 \cos(t)$

(c58) ev(% , %k1 : r[1], %k2 : s[1]) ;

(d58)  $x_1(t) = \frac{a^5 b \cos(5t) + (15a^5 b + 12a^3) \cos(3t)}{384} + r_1 \sin(t) + s_1 \cos(t)$

(c59) rhs(% ) ;

(d59)  $\frac{a^5 b \cos(5t) + (15a^5 b + 12a^3) \cos(3t)}{384} + r_1 \sin(t) + s_1 \cos(t)$

(c60) solve(ev(% , t : 0), s[1]) ;

(d60)  $\left[ s_1 = \frac{4a^4 b + 3a^2}{96} \right]$

(d61) ev(d59, %) ;

(d61)  $\frac{a^5 b \cos(5t) + (15a^5 b + 12a^3) \cos(3t)}{384}$

$+ r_1 \sin(t) - \frac{(4a^5 b + 3a^3) \cos(t)}{96}$

(c62) diff(% , t) ;

(d62)  $\frac{-5a^5 b \sin(5t) - 3(15a^5 b + 12a^3) \sin(3t)}{384} + \frac{(4a^5 b + 3a^3) \cos(t)}{96} + r_1 \cos(t)$

(c63) solve(ev(% , t : 0), r[1]) ;

(d63) [ ]

(c64) ev(d58, d60, %) ;

(c64)  $x_1(t) = \frac{a^5 b \cos(5t) + (15a^5 b + 12a^3) \cos(3t)}{384} + r_1 \sin(t) - \frac{(4a^5 b + 3a^3) \cos(t)}{96}$

(c65) ev(% , r[1] : 0) ;

(d65)  $x_1(t) = \frac{a^5 b \cos(5t) + (15a^5 b + 12a^3) \cos(3t)}{384} - \frac{(4a^5 b + 3a^3) \cos(t)}{96}$

(c66) ev(eq[2], d55, d65) ;

gc : [ \* list : 949 {58%} ; fixnum : 51 {2%} ;  
ut : 73% ]

(d66)  $/R/(3072 x_2(t)_{tt} + (40a^9 b^2 \cos^4(t) + 24a^7 b \cos^2(t) - 5a^9 b^2 - 6a^7 b) \cos(5t) + ((600a^9 b^2 + 480a^7 b) \cos^4(t) + (360a^7 b + 288a^5) \cos^2(t) - 75a^9 b^2 - 150a^5 b - 72 a^5) \cos(3t) + (-2560 a^9 b^2 - 2784a^7 b \cos^5(t) + (-2304 a^7 b - 2592a^5) \cos^3(t) + (980a^9 b^2 + 2316a^7 b + 1368a^5 - 6144 k_2 a) \cos(t) + 3072 x_2(t))/3072$

(c67) ev(% , diff) ;

(d67)  $/R/(3072 x_2(t)_{tt} + (40a^9 b^2 \cos^4(t) + 24a^7 b \cos^2(t) - 5a^9 b^2 - 6a^7 b) \cos(5t) + ((600a^9 b^2 + 480a^7 b) \cos^4(t) + (360a^7 b + 288a^5) \cos^2(t) - 75a^9 b^2 - 150a^5 b - 73a^5) \cos(3t) + (-2560a^9 b^2) - 2784a^7 b \cos^5(t) + (-2304 a^7 b - 2592a^5) \cos^3(t) + (980a^9 b^2 + 2316a^7 b + 1368a^5 - 6144 k_2 a) \cos(t) + 3072 x_2(t))/3072$

(c68) expand(trigreduce(expand(%))) ;

gc : [ \* list : 949 {59%} ; fixnum : 51 {3%} ;  
ut : 73% ]

gc : [ \* list : 949 {59%} ; fixnum : 51 {3%} ;  
ut : 73% ]

gc : [ \* list : 949 {60%} ; fixnum : 51 {3%} ;  
ut : 73% ]

gc : [ \* list : 949 {60%} ; fixnum : 51 {3%} ;  
ut : 73% ]

$$(d68) \quad x_2(t)_{tt} + \frac{5a^9b^2 \cos(9t)}{6144} + \frac{95 a^9b^2 \cos(7t)}{6144} \\ + \frac{3 a^9b^2 \cos(7t)}{256} + \frac{7a^7b \cos(5t)}{512} \\ + \frac{3 a^5 \cos(5t)}{128} - \frac{5 a^9b^2 \cos(3t)}{24} \\ - \frac{205 a^7b \cos(3t)}{512} - \frac{3a^5 \cos(3t)}{16} \\ - \frac{215a^9b^2 \cos(t)}{1536} - \frac{19a^7b \cos(t)}{64} \\ - \frac{21a^5 \cos(t)}{128} - 2 k_2 a \cos(t) + x_2(t)$$

(c69) solvecoeff(% , cos(t)), k[2] ;  
gc : [ \* list : 949{59%} ; fixnum : 51{3%} ;  
ut : 71% ]

$$(d69) \quad \left[ k_2 = \frac{215 a^9b^2 + 456 a^9b + 252a^4}{3072} \right]$$

(c70) ev(d68, %);

$$(d70) \quad x_2(t)_{tt} + \frac{5a^9b^2 \cos(9t)}{6144} + \frac{95a^9b^2 \cos(7t)}{6144} \\ + \frac{3a^9b^2 \cos(7t)}{256} + \frac{7a^7b \cos(5t)}{512} + \frac{3a^5 \cos(5t)}{128} \\ - \frac{5a^9b^2 \cos(3t)}{24} - \frac{205 a^7b \cos(3t)}{512} - \frac{3a^5 \cos(3t)}{16} \\ + \frac{a(215a^9b^2 + 456a^9b + 252a^4)\cos(t)}{1536} \\ - \frac{205 a^7b \cos(3t)}{1536} - \frac{19a^7b \cos(t)}{64} \\ - \frac{21a^5 \cos(t)}{128} + x_2(t)$$

(c71) ode2(% , y[2](t), t);  
gc : [ \* list : 949{59%} ; fixnum : 51{3%} ;  
ut : 70% ]  
gc : [ \* list : 949{60%} ; fixnum : 51{3%} ;  
ut : 73% ]  
gc : [ \* list : 959{60%} ; fixnum : 51{3%} ;  
ut : 70% ]  
gc : [ \* list : 969{60%} ; fixnum : 51{3%} ;  
ut : 72% ]  
gc : [ \* list : 969{60%} ; fixnum : 51{3%} ;  
ut : 72% ]

$$(d71) \quad x_2(t) = (3a^9b^2 \cos(9t) + (95a^9b^2 + 72a^7b)\cos(7t) \\ + 168a^7b + 288a^5) \cos(5t) + (-7680a^9b^2 \\ - 14760a^7b - 6912a^5) \cos(3t)/294912 + \%k_1 \\ \sin(t) + \%k_1 \cos(t)$$

(c72) ev(% , %k1 : r[2], %k2 : s[2]);

$$(d72) \quad x_2(t) = (3a^9b^2 \cos(9t) + (95a^9b^2 + 72a^7b) \\ \cos(7t) + (168a^7b + 288a^5)\cos(5t) + (-7680a^9b^2 \\ - 14760a^7b - 6912a^5) \cos(3t))/294912 \\ + r_2 \sin(t) + s_2 \cos(t)$$

(c73) rhs(%);

$$(d73) \quad (3a^9b^2 \cos(9t) + (95a^9b^2 + 72a^7b) \cos(7t) + (168 \\ a^7b + 288a^5) \cos(5t) + (-7680a^9b^2 - 14760a^7b \\ - 6912a^5) \cos(3t))/294912 + r_2 \sin(t) + s_2 \cos(t)$$

(c74) solve(ev (% , t : 0), s[2]);

$$(d74) \quad \left[ s_2 = \frac{3791 a^9b^2 + 7260 a^7b + 3312 a^5}{147456} \right]$$

$$(d75) \quad (3a^9b^2 \cos(9t) + (95a^9b^2 + 72a^7b) \cos(7t) \\ + (168 a^7b + 288a^5) \cos(5t) + (-7680a^9b^2 \\ - 14760a^7b - 6912a^5) \cos(3t))/294912 \\ + \frac{(3791 a^9b^2 + 7260 a^7b + 3312 a^5) \cos(t)}{147456}$$

(c76) ev(d45, d55, d69);

$$(d76) \quad - \frac{(215a^9b^2 + 456a^9b + 252a^4)e^2}{3072} \\ - \frac{(5a^4b + 6a^2)e}{16} + 1$$

(c77) ev(d48, d65, d75);

gc : [ \* list : 969{58%} ; fixnum : 51{3%} ;  
ut : 72% ]

$$(d77) \quad e^2(3a^9b^2 \cos(9t) + (95a^9b^2 + 72a^7b) \cos(7t) \\ + (168 a^7b + 288a^5) \cos(5t) + (-7680a^9b^2 \\ - 14760a^7b - 6912a^5) \cos(3t)/294912 \\ + \frac{(3791 a^9b^2 + 7260 a^7b + 3312 a^5) \cos(t)}{147456} \\ + e \left( \frac{a^5b \cos(5t) + (15a^5b + 12a^3) \cos(3t)}{384} \right. \\ \left. - \frac{(4a^5b + 3a^3)\cos(t)}{96} \right) + a \cos(t)$$

(c78) closefile(lp10);