

(論 文)

수치조화균형법에 의한 마찰진동 해석

김 현 진* · 최 연 선**

(1990년 3월 5일 접수)

Analysis of General Friction-Induced Vibration Using Numerical Harmonic Balance Method

Hyun-Jin Kim and Yeon-Sun Choi

Key Words : Friction-Induced Vibration(마찰 진동), Numerical Harmonic Balance Method(수치조화균형법), FFT, Coulomb Friction(쿨롱 마찰), Stick/Slip

Abstract

Friction occurs on any relatively moving parts in mechanical systems and results the dissipation of energy, wear, and inaccurate positioning since friction force is highly velocity dependent and reaches its maximum value at the instance of zero velocity. In numerous friction studies friction force has been considered as a piecewise-linear one, for example, Coulomb friction, to avoid the difficulties in analytical study. In this study, vibratory systems having Coulomb and general velocity dependent friction force are analyzed using numerical harmonic balance method utilizing the Fast Fourier Transform. It is proved that this method is very powerful and exact for the both mass and base-excited systems.

1. 서 론

실제 기계에서는 부품 상호간에 상대운동을 일으키는 작용면이 많이 존재하며 작용면에서의 마찰은 기계계의 감쇠성분으로 작용하여 에너지의 감소, 마모, 소음을 발생시킬 뿐만 아니라 실제 운동과 설계상에 주어진 요구운동과의 차이를 나게함으로써 기계의 정밀도를 떨어뜨리는 주요원인이 되어 기계의 성능 향상과 관련 기계계의 마찰은 중요한 연구 과제이다.

마찰에 기인한 진동해석은 기계장치의 미끄럼판⁽¹⁾, 터빈날개(turbine-blade)⁽²⁾, 동흡振器⁽³⁾, 브레이크소음⁽⁴⁾, 바이올린현⁽⁵⁾ 등 다수의 공학계에 적용되고 있어 Den Hartog⁽⁶⁾ 이래 많은 연구가 진

행되어 왔다. 마찰관련 진동은 마찰계수가 속도와 수직항력의 함수로서 자려진동(self-excited vibration) 특성을 갖고 있으며, 起振력을 받고 있는 상태에서 정지 혹은 미끄러지는 바, 이러한 비선형 동적 특성을 명확히 규명하기에는 어려움이 있다.

일반적으로 정지점 부근에서의 마찰력은 동적상태의 마찰력보다 커지며 동적 마찰력은 속도의 함수로서 실제 마찰력을 고려한 동적해석은 强非線型(strong nonlinear)의 문제로서 해법에 상당한 어려움이 있다. 따라서 單純片的線型(piecewise-linear)의 가정인 쿨롱 마찰에 대한 해석에 많은 관심을 기울여 왔다. 즉 調和均衡法⁽⁷⁾을 사용하여 基本 調和振動만을 고려한 계의 응답을 구하거나^(8,9) 高次 調和振動을 고려한 수식전개상 쿨롱마찰만을 해석할 수 있는 IHB法(Incremental Harmonic Balance Method)⁽¹⁰⁾이 응용되었다.

이러한 관점에서 FFT(Fast Fourier Trans-

*성균관대학교 대학원

**정회원, 성균관대학교 공과대학 기계설계학과

form)^(12,13)를 이용한 數值調和均衡法(NHB ; Numerical Harmonic Balance Method)은 비선형진동의 정상해법인 調和均衡法(Harmonic Balance method)에 기초를 둔 것으로서 쿨롱마찰은 물론 실제 마찰력을 고려한 동적해석 및 마찰에 의한 비선형 요소를 포함한 기계계의 해석에 효과적으로 비선형 응답을 보다 명료하게 기술할 수 있다.

이에 본 연구는 마찰에 의한 기계계의 진동을 단순 쿨롱마찰의 경우와 마찰계수가 속도의 함수인 일반마찰이 존재하는 기계계의 응답특성을 수치조화균형법을 이용하여 해석 및 예측하고자 한다.

2. 운동 방정식

2.1 쿨롱 마찰

채터링이 발생할 수 있는 공작기계에서 절삭기구와 작업물을 Fig. 1(a)와 같이 모델화하고 물체와 바닥면 사이에 존재하는 마찰력을 片的線型(piecewise-linear) 형태인 Fig. 2(a)의 쿨롱 마찰로 가정하고 힘 $F_0 \cos \omega t$ 가 물체에 加振되는 경우, 계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz + F_c \operatorname{sgn}(\dot{z}) = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

단,

$$F_c = \mu_k N$$

$$\operatorname{sgn}(\dot{z}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \dot{z} \geq 0 \\ -1 & \text{if } \dot{z} < 0 \end{cases}$$

식 (1)을 無次元化하기 위하여 무차원 변수를 아래와 같이 정의하고 식 (1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x &= \frac{kz}{F_0} \\ f &= \frac{F_c}{F_0} \\ \ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega_0^2 x + \omega_0^2 f \operatorname{sgn}(\dot{x}) &= \omega_0^2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

단,

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\zeta = \frac{c}{C_{cr}}$$

$$\theta = \omega t$$

또한 시간을 무차원화 하기 위해 θ 를 아래와 같이 정의하고 식 (2)에 대입하면 다음과 같다.

$$x'' + 2\zeta \frac{1}{Q} x' + \frac{1}{Q^2} x + \frac{1}{Q^2} F_N = 0$$

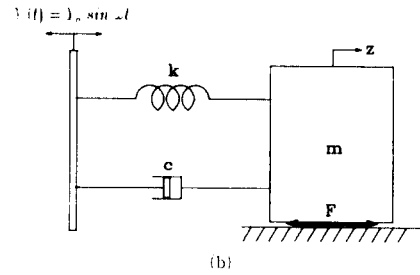
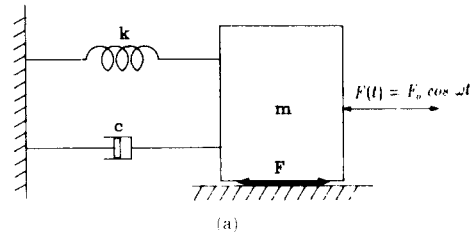


Fig. 1 Vibratory systems with friction

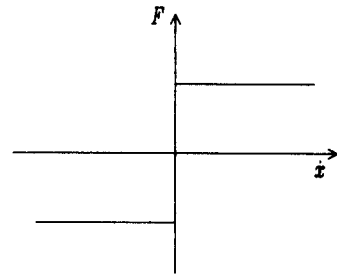


Fig. 2 Models of friction (a) Model considered Coulomb friction (b) Model considered static and dynamic friction (c) Model considered general friction

$$= \frac{1}{Q^2} \cos \theta \quad (3)$$

단,

$$F_N = f \operatorname{sgn}(x')$$

$$Q = \frac{\omega}{\omega_0}$$

여기서 “”은 무차원 시간 θ 에 대한 일차, 이차 미분을 의미한다.

Stick/slip이 발생할 수 있는 공작기계에서 미끄럼판의 모델을 Fig. 1(b)와 같이 물체와 바닥면 사이에 쿨롱 마찰이 존재하고 $Y_0 \sin \omega t$ 로 베이스가 加振되는 경우의 운동 방정식은 아래와 같다.

$$m\ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{Y}) + k(z - Y) + F_c(\dot{z}) = 0 \quad (4)$$

단,

$$Y = Y_0 \sin wt$$

무차원화시키기 위하여 아래와 같이 무차원변수들을 정의하면 계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$x = \frac{z}{Y_0}$$

$$\theta = w_0 t$$

$$f = \frac{F_0}{kY_0}$$

$$x'' + 2\zeta x' + x + F_N = 2\zeta\Omega \cos \Omega\theta + \sin \Omega\theta \quad (5)$$

$$F_N = f \operatorname{sgn}(x')$$

$$\Omega = \frac{w}{w_0}$$

2.2 일반적인 마찰을 고려한 경우

쿨롱 마찰은 마찰력이 속도의 크기에 관계없이 일정하다고 보았으나 실제로 모든 마찰력은 정적 상태에서 최대가 되며 속도가 증가함에 따라 감소하는 것이 일반적이다. 다만, 접촉면의 윤활상태에 따라 마찰력은 속도의 함수 형태로 나타나게 된다.

실제적으로 마찰력의 변화는 실험으로부터 구하여야하나 본 연구는 일반적인 마찰력의 변화에 대한 해법에 관심을 두고 있으므로 Fig. 3과 같은 속도의 2차함수 형태로 가정한다.

$$F = ax'^2 + bx' + c \quad (6)$$

상수 a , b 와 c 는 아래의 3개의 경계조건을 이용하여 구한다.

$$(i) \quad x' = 0 \quad F = F_s$$

$$(ii) \quad x' = p \quad F = F_a \quad (7)$$

$$(iii) \quad x' = p \quad \frac{dF}{dx'} = 0$$

식 (6), (7)로부터 상수 a , b 와 c 는 각각 아래와 같이 결정되어 마찰력은 속도의 2차함수 형태로 표시될 수 있다.

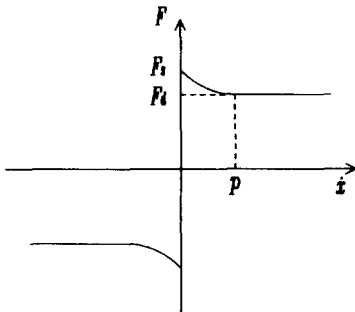


Fig. 3 Model of general friction

$$F = \frac{F_s - F_a}{p^2} x'^2 + \frac{2(F_a - F_s)}{p} x' + F_s \quad (8)$$

物體加振모델과 베이스 加振모델에서 쿨롱 마찰만을 고려한 운동방정식

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz + F(\dot{z}) = F(t)$$

에서 마찰력 $F(\dot{z})$ 를 속도의 2차함수 형태로 보면 아래와 같다.

$$F(\dot{z}) = \begin{cases} -F_s & : \text{if } \dot{z} < -p \\ a\dot{z}^2 + b\dot{z} - F_s & : \text{if } -p \leq \dot{z} < 0 \\ -a\dot{z}^2 + b\dot{z} + F_s & : \text{if } 0 \leq \dot{z} < p \\ F_s & : \text{if } p \leq \dot{z} \end{cases}$$

단,

$$a = \frac{F_s - F_a}{p^2}$$

$$b = \frac{2(F_a - F_s)}{p}$$

또한, 物體加振 모델에서 무차원 마찰력 F_N 은 변위 및 시간의 무차원화에 따라 아래와 같이 표시된다.

$$F_N = F \left(\frac{w F_0 x'}{k} \right)$$

마찬가지로 베이스 加振모델에서의 무차원 마찰력은 아래와 같다.

$$F_N = F(Y_0 w_0 x')$$

3. 수치조화균형법

운동방정식 (3)에서 수치조화균형법을 써서 정상해를 구하기 위해 미지 미지의 변위와 마찰력 즉, 비선형항을 각각 후리에 급수로 가정하면 아래와 같다.

$$x(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (9)$$

$$F_N(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta)$$

여기서 N 은 고려하고자 하는 조화함수의 수이다.

식 (9)를 식 (3)에 대입하면 아래와 같다.

$$\sum_{n=1}^N (-n^2 a_n \Omega^2 \cos n\theta - b_n^2 \Omega^2 \sin n\theta) \quad (10)$$

$$+ \sum_{n=1}^N (-2\zeta \Omega a_n \sin n\theta + 2\zeta \Omega b_n \cos n\theta)$$

$$+ a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$+ c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) = \sin \theta$$

윗식에서 상수항, cosine항, sine항을 비교 정리하면 아래와 같이 미지수 $4N + 2$ 개가 있는 $2N + 1$ 개의 非線型 聯立方程式을 얻을 수 있다.

상수항 :

$$a_0 + c_0 = 0 \quad (11 \cdot a)$$

cosine항 :

$$(1 - n^2 Q^2) a_n + 2n \zeta \Omega b_n + c_n = \begin{cases} 1 : \text{if } n=1 \\ 0 : \text{if } n \neq 1 \end{cases} \quad (11 \cdot b)$$

sine항 :

$$-2n \zeta \Omega a_n + (1 - n^2 Q^2) b_n + d_n = 0 \quad (11 \cdot c)$$

단, $n=1, 2, 3, \dots, N$

c_0, c_n 과 d_n 은 a_0, a_n, b_n 의 함수이므로 a_0, a_n, b_n 이 결정되면 식 (10)으로 부터 c_0, c_n, d_n 즉, 비선형항의 값을 구할 수 있다. 즉, a_0, a_n, b_n 이 주어지면 IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)로 부터 $x(\theta)$ 를 계산할 수 있고 이를 식 (10)에 대입하여 마찰력의 시간에 대한 변화 즉, F_N 을 알 수 있다. Discrete time data F_N 을 DFT (Discrete Fourier Transform)변환 시키면, c_0, c_n, d_n 값을 알 수 있게 된다. 이때 효율적인 DFT수행하기 위해 FFT방법을 사용한다. 이로써 F_N 의 후리에 계수 c_0, c_n, d_n 과 a_0, a_n, b_n 의 관계를 나타내는 $2N+1$ 개의 등식이 생성되고 식 (11)에는 a_0, a_n, b_n 의 $2N+1$ 개의 미지수가 남게 된다.

이러한 과정을 통하여 구한 $2N+1$ 개의 비선형 연립방정식을 풀기 위해 Newton-Raphson방법을 쓰면 $2N+1$ 개의 a_0, a_n, b_n 값을 계산할 수 있게 된다. 만일 초기값이 적절하게 주어졌을 경우, 해는 매우 빨리 수렴하게 된다. 초기값은 임의로 줄 수도 있으나 해를 쉽게 수렴시키기 위해 마찰력항을 무시한 선형진동식으로부터 정상해를 구한 값을 초기값으로 사용한다.

a_0, a_n, b_n 에 대해 초기값을 각각 a_0^0, a_n^0, b_n^0 으로 가정하고, Newton-Raphson의 반복 수행에 따른 증분값을 각각 $\Delta a_0, \Delta a_n, \Delta b_n$ 라고 하고 연립 방정식을 풀어 증분값을 계산한다.

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0^0 + \Delta a_0 \\ a_n &= a_n^0 + \Delta a_n \\ b_n &= b_n^0 + \Delta b_n \end{aligned} \quad (12)$$

단, 윗첨자 '0'는 반복 수행을 처음할 때는 초기값을 의미하고 다음의 반복 수행 때에는 앞에서 계산된 값을 의미한다.

마찬가지로 비선형항의 후리에 계수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c_0 = c_0^0 + \Delta c_0$$

$$c_n = c_n^0 + \Delta c_n \quad (13)$$

$$d_n = d_n^0 + \Delta d_n$$

단, $n=1, 2, 3, \dots, N$

이때 c_0, c_n, d_n 은 a_0, a_n, b_n 의 함수이고 따라서 $\Delta c_0, \Delta c_n, \Delta d_n$ 은 아래와 같은 전미분 형태로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta c_0 &= \frac{\partial c_0}{\partial a_0} \Delta a_0 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial c_0}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial c_0}{\partial b_n} \Delta b_n \right) \\ \Delta c_n &= \frac{\partial c_n}{\partial a_0} \Delta a_0 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial c_n}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial c_n}{\partial b_n} \Delta b_n \right) \\ \Delta d_n &= \frac{\partial d_n}{\partial a_0} \Delta a_0 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial d_n}{\partial a_n} \Delta a_n + \frac{\partial d_n}{\partial b_n} \Delta b_n \right) \end{aligned} \quad (14)$$

이로 부터 구한 행렬은 아래와 같다.

$$[K] \{\Delta g\} = [R] \quad (15)$$

단,

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_0}{\partial a_0} & \frac{\partial c_0}{\partial a_1} & \frac{\partial c_0}{\partial b_1} & \frac{\partial c_0}{\partial a_2} & \frac{\partial c_0}{\partial b_2} & \dots \\ \frac{\partial c_1}{\partial a_0} & \frac{\partial c_1}{\partial a_1} + (1-Q^2) & \frac{\partial c_1}{\partial b_1} + 2\zeta\Omega & \frac{\partial c_2}{\partial a_2} & \frac{\partial c_2}{\partial b_2} & \dots \\ \frac{\partial d_1}{\partial a_0} & \frac{\partial d_1}{\partial a_1} + (-2\zeta\Omega) & \frac{\partial d_1}{\partial b_1} + (1-Q^2) & \frac{\partial d_2}{\partial a_2} & \frac{\partial d_2}{\partial b_2} & \dots \\ \frac{\partial c_2}{\partial a_0} & \frac{\partial c_2}{\partial a_1} & \frac{\partial c_2}{\partial b_1} & \frac{\partial c_2}{\partial a_2} + (1-4Q^2) & \frac{\partial c_2}{\partial b_2} + 4\zeta\Omega & \dots \\ \frac{\partial d_2}{\partial a_0} & \frac{\partial d_2}{\partial a_1} & \frac{\partial d_2}{\partial b_1} & \frac{\partial d_2}{\partial a_2} + (-4\zeta\Omega) & \frac{\partial d_2}{\partial b_2} + (1-4Q^2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta g\}^T = [\Delta a_0, \Delta a_1, \Delta b_1, \Delta a_2, \Delta b_2]$$

$$\{R\} = \begin{bmatrix} -a_0^0 - c_0^0 \\ -(1-Q^2)a_1^0 - 2\zeta\Omega b_1^0 - c_1^0 + 1 \\ 2\zeta\Omega a_1^0 - (1-Q^2)b_1^0 - d_1^0 \\ -(1-4Q^2)a_2^0 - 4\zeta\Omega b_2^0 - c_2^0 \\ 4\zeta\Omega a_2^0 - (1-4Q^2)b_2^0 - d_2^0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

식 (15)를 Gauss소거법으로 풀고 $\Delta a_0, \Delta a_n, \Delta b_n$ 이 0(영)에 수렴할 때까지 반복하여 구한 해를 다음의 진동수비에서 초기조건으로 준다.

베이스 가진 모델에 대해서도 변위와 마찰력을 후리에 급수로 가정하여 물체가진 모델의 경우와 같이 수식을 전개해 나갈 수 있다.

수치조화균형법의 알고리즘을 흐름도로 나타내면 다음과 같고 FFT수행시 나타나는 aliasing효과를 피하기 위해 전체 조화성분 중 1/4만을 선택한다.

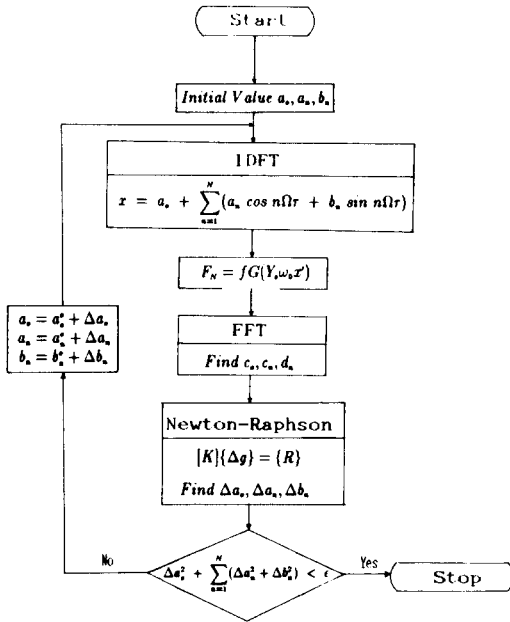


Fig. 4 Flow chart of Numerical Harmonic Balance method

4. 수치 해석 및 평가

후리에 계수를 각각 4/16, 2/8, 2/4개를 이용하여 구한 Fig. 5는 2/4개를 사용했을 경우에 공진영역에서 응답이 약간 크게 나타나고 있으며 4/16개로 구한 해가 불연속곡선으로 나타나는 곳에 2/8개와 2/4개의 교차점이 나타나는 것은 보다 고차원 조화함수가 포함되어 있음을 의미한다.

쿨롱 마찰만을 고려한 Fig. 1(a)의 모델로부터

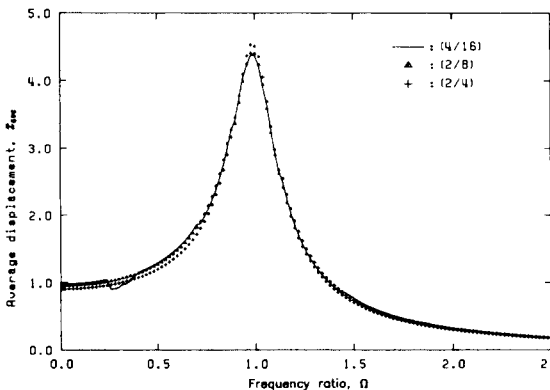


Fig. 5 Effect of retained number of Fourier coefficients for NHB ($f=0.1, \zeta=0.1$)

구한 Fig. 6은 stick/slip이 없는 영역인 진동수비가 1.0일때의 진동형상으로 Runge-Kutta-Gill法の 해와 4/16개의 요소로 계산한 수치조화균형법의 결과를 비교한 것으로 4/16의 조화성분으로도 정확한 해를 구할 수 있음을 나타낸 것이다. Fig. 7은 4/16개와 8/32개의 해와 수치해석의 해를 비교한 것으로서 stick/slip이 있는 경우 급격한 불연속응답으로 인하여 더 많은 조화성분을 고려하여야 함을 보여주지만 적은 수의 조화성분을 고려한 경우라도 근사하는 구할 수 있었다. Fig. 8은 진동수비와 진폭에 대한 점성감쇠의 영향으로 각각 Fig. 1(a)의 모델로부터 얻은 것이다. 대부분 점성감쇠가 증가할수록 진폭은 감소하는 경향을 보여주고 있다. 진동수비가 0.3근처에서 불연속곡선이 나타나는 것은 비선형응답이 발생하고 있음을 보여주고 있다.

마찰의 변화에 대한 주파수 응답은 Fig. 9에 보

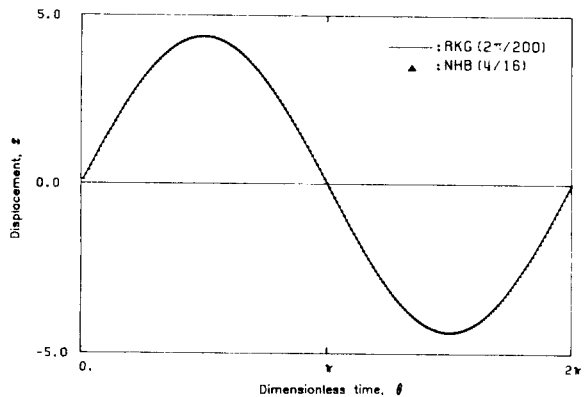


Fig. 6 Time histories at continuous motion ($\zeta=0.1, f=0.1, Q=1.0$)

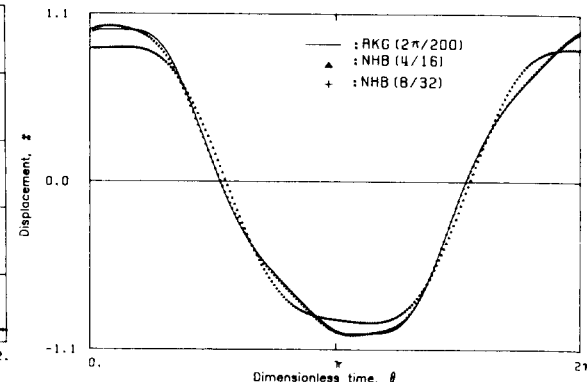


Fig. 7 Time histories at Stick/slip motion ($\zeta=0.1, f=0.1, Q=0.26$)

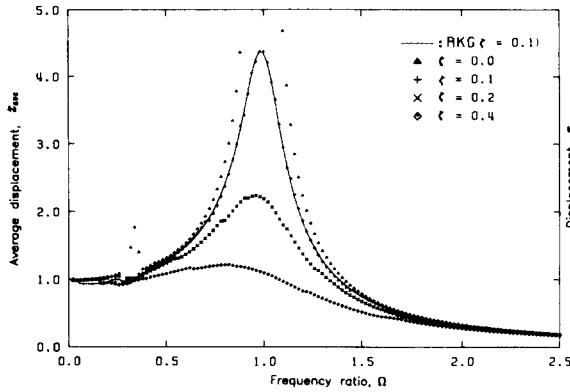


Fig. 8 Viscous damping effect in mass excitation model ($f=0.1$)

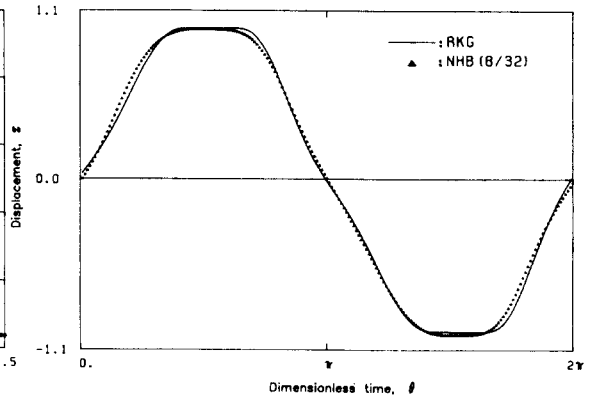


Fig. 11 Time histories in general friction model ($\zeta=0.1, F_s=0.1, F_a=0.033, \Omega=0.20$)

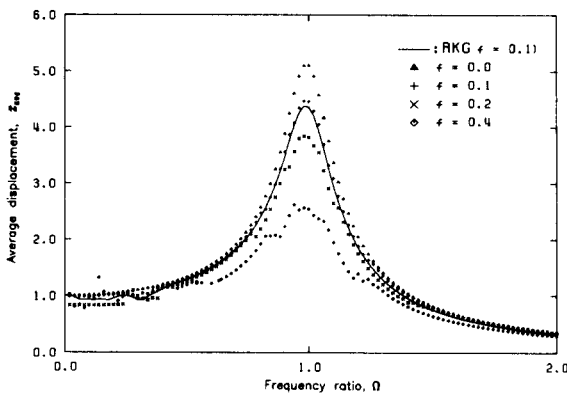


Fig. 9 Friction force effect in base excitation model ($\zeta=0.1$)

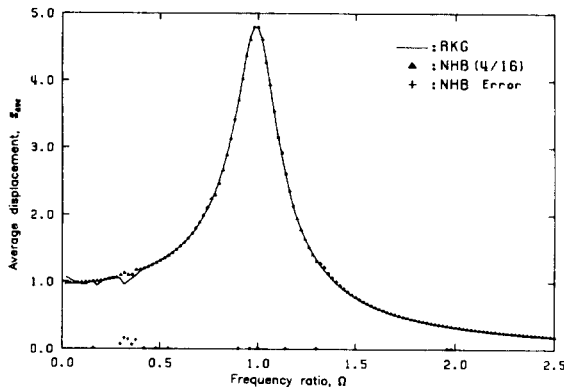


Fig. 10 Frequency responses of general friction model ($\zeta=0.1, f_s=0.1, F_a=0.033$)

인 바와 같이 마찰력 증가에 따라 전체적으로 진폭이 감소하고 있고 저주파 영역에서 stick/slip영역이 넓어지고 있으며 강한 비선형성으로 인해 불연속곡선이 더 크게 나타나고 있다.

일반적인 마찰을 고려한 모델로 부터 구한 Fig. 10은 본 연구 방법으로 가능한 해로서 쿨롱 마찰의 경우와 전체적인 응답곡선은 大同小異하였으나 stick/slip영역이 약간 넓어 지고 있음을 보여주고 있고 Fig. 11은 일반적인 마찰을 고려한 경우에 stick/slip이 존재하는 주파수영역에서 8/32개, 즉 7차 조화함수까지 사용하여 구한 해와 Runge-Kutta-Gill법으로 구한 해로서 쿨롱마찰의 경우와 마찬가지로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

수치조화균형법은 컴퓨터를 이용하여 효율적으로 일반 비선형진동계의 정상해를 구하는 방법으로서 본 연구에서는 이를 마찰에 기인한 비선형진동의 정상해를 구하고 매개변수해석을 수행하였다.

해를 비교하기 위해 사용한 Runge-Kutta-Gill법의 결과와는 큰 차이가 나타나지 않았다. 많은 연구자들이 비선형 해법의 난해성으로 인하여 간단한 片的線型(piecewise linear)형태인 쿨롱 마찰을 가정하여 해를 구하였으나 본 연구에서 이용한 수치조화균형법을 사용할 경우 쿨롱 마찰은 물론, 변위와 속도에 따라 마찰력이 변화하는 경우에도 해를 구할 수 있었고 따라서 정적 마찰과 동적 마찰을 동시에 고려한 해가 가능하였다. 다만 stick/slip이

발생하는 경우 급격한 불연속응답이 발생하게 되어 유한한 푸리에 계수만을 사용하는 수치조화근형법으로서는 불연속응답을 완전히 나타낼 수는 없었으나 이는 수치계산상 계산시간이 급격하게 증가 하지만 더 많은 후리에 계수를 사용함으로써 해를 향상시킬 수 있었고, 비록 적은 수의 후리에 계수를 고려한다 해도 충분한 근사해를 구할 수 있었다.

진동수비가 작은 영역에서 stick/slip이 나타나며 감쇠비가 증가하면 거의 모든 진동수비영역에서 응답이 작아지나 stick/slip이 나타나는 영역에서는 응답에 큰영향을 주지 못했다. 마찰력의 증가는 모든 진동수비 영역에서 응답이 작아지며 stick/slip이 낮은 진동수비 영역으로 이동하는 현상을 나타내었다. 마찰력이 클수록 높은 진동수비 영역에서도 stick/slip이 나타난다는 관계도 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) Kato, S., et al., 1974, "Stick-Slip Motion of Machine Tool Slideway", ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol. 96, No 2, pp. 557~566.
- (2) Sinha, A., 1984, "Effects of Static Friction on the Forced Response of Frictionally Damped Turbine Blades", ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 106, pp. 65~69.
- (3) Yositake, et al., 1988, "Analysis of Vibrational System with Coulomb Friction", 日本機械學會論文集(C編), Vol. 54, p. 2654.
- (4) Hagedorn, P., 1982, "Non-Linear Oscillations," Oxford University Press, pp. 119~123.
- (5) Maezawa, E., and Temma, K., 1984, "擦弦の振動", 日本機械學會論文集(C編), 第50卷, 第455號, pp. 1183~1986.
- (6) Den Hartog, J.P., 1930, "Forced Vibrations with Combined Coulomb and Viscous Friction", Transaction of ASME, Vol. 53, pp. 107~115.
- (7) Meckens, R.E., 1984, "Comments on the Method of Harmonic Balance", Journal of Sound and Vibration, Vol. 94, pp. 456~460.
- (8) Jezequel, L., 1982, "Structural Damping by Slip Joints", ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 49, pp. 849~853.
- (9) Sinha, A., and Griffin, J.H., 1983, "Friction Damping of Flutter in Gas Turbine Engine Airfoils", AIAA Journal of Aircraft, Vol. 20, No. 4, pp. 382~376.
- (10) Lau, S.L., Cheung, Y.K., and Wu, S.Y., 1983, "Incremental Harmonic Balance Method with Multiple Time Scales for Aperiodic Vibration of Non-linear Systems", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 871~876.
- (11) Choi, Y.S., and Noah, S.T., 1988, "Forced Periodic Vibration of Unsymmetric Piecewise-linear Systems", Journal of Sound and Vibration, Vol. 121, No. 1, pp. 117~126.
- (12) Choi, Y.S., and Noah, S.T., 1987, "Nonlinear Steady-State Response of a Rotor Support System", Journal of Vibration, Stress, and Reliability in Design, Vol. 109, pp. 255~261.