

〈論 文〉

## 축대칭 셸의 음향방사 해석에 관한 연구

홍진선\* · 이장무\*\*

(1990년 3월 28일 접수)

### A Study on the Analysis of Acoustic Radiation of Axisymmetric Shells

Jin Sun Hong and Jang Moo Lee

**Key Words :** Acoustic Radiation(음향방사), Axisymmetric Shell(축대칭 셸), Acoustic Intensity(음향세기), Radiation Efficiency(방사효율), Finite Element Method(유한요소법)

#### Abstract

The problem of acoustic radiation of axisymmetric shells is studied by finite element formulations. Peripheral distribution of sound pressure is assumed and acoustic impedance is used for infinite area. By using two dimensional finite element method, acoustic intensity and radiation efficiency of an axisymmetric shell are analyzed. For a simple axisymmetric shell model, acoustic intensity due to vibrational modes is calculated and the computed results are compared with the experimental values.

#### 기 호 설 명

- $I$  : 음향세기 (acoustic intensity)
- $I_n$  : 면에 대한 수직방향의 음향세기
- $k$  : 음파의 웨이브 수 (wave number)
- $\{N_e\}$  : 유한요소에 대한 형상함수
- $\{N_i\}$  : 경계선에 대한 형상함수
- $P(r, \theta, z, t)$  : 음압
- $\hat{P}(r, \theta, z)$  : 좌표  $(r, \theta, z)$ 에서 음압의 진폭
- $p(r, z)$  : 좌표  $(r, z)$ 에서 음압의 진폭
- $\{p_e\}$  : 절점압력 벡터
- $V$  : 공기입자의 속도
- $\{v_e\}$  : 절점속도 벡터
- $Z_s$  : 음향 임피던스 (acoustic impedance)
- $\rho$  : 공기의 밀도
- $\sigma$  : 방사효율 (radiation efficiency)

#### 1. 서 론

대부분의 음원은 구조물요소의 진동에 의하여 음향에너지를 방사하게 된다. 그러나 구조물요소의 진동에도 불구하고 음향에너지를 방사하지 못하거나 극히 미세한 에너지만을 방사하는 경우가 많이 있으며, 스피커나 산업기계등에서 발생하는 음향에너지를 증가 또는 감소시키기 위해서는 우선 음압 분포, 음향세기(acoustic intensity), 방사효율(radiation efficiency)등 음향방사의 특성을 파악하여야 한다.

지금까지 구조물요소의 진동에 의한 음향방사에 관한 이론해석은 주로 구, 길이가 무한히 큰 원통, 평판등에 대하여 연구되어 왔으며<sup>(1~4)</sup>, 최근에 Yi<sup>(5)</sup>는 종의 형상을 회전타원체로 가정하여 종의 음향특성에 관한 연구를 수행한 바 있다. 구조물요소의 형상이 다소 복잡한 경우에는 유한요소법,

\*정회원, 서울대학교 공학연구소

\*\*정회원, 서울대학교 공과대학 기계설계학과

Kirchhoff-Helmholtz의 적분식<sup>(4)</sup>을 이용한 수치해석적인 방법, 이 적분법을 다소 변형한 경계요소법 등에 의존하고 있으며 Zienkiewicz등은 유한요소와 경계요소를 조합한 방법을 제안한 바 있다.

본 연구에서는 축대칭 셀의 고유모우드에 의하여 발생하는 음향의 방사특성을 유한요소법으로 구하고 실험을 수행하여 그 타당성을 검토하였다. 축대칭 셀에서 원주방향으로의 압력분포를 가정하여 2차원 문제로 단순화시키고 거리가 무한대인 영역은 음향 임피던스(acoustic impedance)를 이용하여 대체함으로써 축대칭 셀의 고유모우드에 의하여 발생하는 음향세기와 방사효율을 구하였다. 각각의 고유모우드에 의하여 방사되는 에너지는 서로 독립적이므로 강제진동에 의한 음향의 방사효율은 고유모우드에 의한 방사효율의 가중치에 의한 평균(weighted average)<sup>(3)</sup>을 취함으로써 구할 수 있다.

## 2. 운동방정식과 경계조건

구조물의 진동에 의한 음향특성을 구하기 위해서는 우선 구조물에 의하여 발생하는 음압의 분포를 파악하는 것이 필요하다. 공기를 비점성의 압축성 유체로 가정하고 그 운동방정식과 경계조건에 대하여 설명하기로 한다.

Fig. 1과 같이 부피가  $V$ 인 일부분의 공기에 대하여 생각하자. 여기에서 표면의 일부분인  $S$ 는 음향적으로 고정되어 있고  $S_V$ 는 면에 대한 수직 속도 성분  $V_n$ 을 가지고 진동하며  $S_D$ 는 음향 임피던스(acoustic impedance)가  $Z_s$ 인 흡음재로 구성되어 있다고 가정한다.

$V$ 내부에 있는 공기의 운동방정식은 아래의 헬름홀츠(Helmholtz)식으로 표현된다.

$$\nabla^2 \bar{P} + \left(\frac{\omega}{C}\right)^2 \bar{P} = 0 \quad (1)$$

여기서  $\omega$ 는 진동수이며  $C$ 는 음압의 전파속도이다. 경계면에 대한 수직방향의 공기입자의 속도는 경계면의 수직방향 속도 성분과 같으므로 공기의 밀도를  $\rho$ 라고 하면 경계조건은 아래의 식으로 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} &= 0 && \text{over } S \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} &= -j\rho\omega V_n && \text{over } S_V \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} &= -j\rho\omega \frac{\bar{P}}{Z_s} && \text{over } S_D \end{aligned} \quad (2)$$

위의 두 식에 대하여 가중치에 의한 변분법

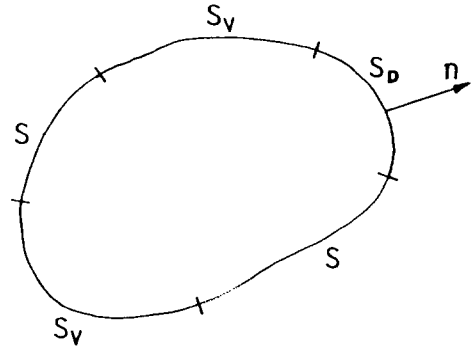


Fig. 1 Elements of air with non rigid walls

(variational principle)을 적용하면 아래의 식을 구할 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_V [(\nabla \bar{P})^2 - \left(\frac{\omega}{C}\right)^2 \bar{P}^2] dV \right. \\ \left. + \int_S j\rho\omega \bar{P} V_n dS + \int_{S_D} j\rho\omega \frac{\bar{P}^2}{Z_s} ds \right\} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

이제 축대칭 셀에서 반경, 원주, 그리고 회전축의 방향을 각각  $r, \theta, z$ 의 좌표로 나타내면 셀의 고유모우드에서 셀의 면에 대한 수직방향의 변위 성분  $V_n$ 은 아래의 식으로 표현할 수 있다.

$$V_n(r, \theta, z) = v_n(r, z) \cdot \cos[m(\theta - \theta_0)] \quad (4)$$

여기서  $m$ 은 고유모우드의 원주방향에 대한 조화수(harmonic number)를,  $\theta_0$ 는 상수를 나타낸다.

경계면  $S_V$ 에서의 수직방향 속도성분이 위의 식으로 주어지는 경계치문제의 해는 아래와 같이 가정할 수 있다.

$$\bar{P}(r, \theta, z) = p(r, z) \cdot \cos[m(\theta - \theta_0)] \quad (5)$$

식 (5)로 가정한 음압  $\bar{P}$ 를 식 (3)에 대입하고  $\theta$ 에 대한 적분을 수행하면 다음과 같이 축대칭 문제와 유사한 2차원 문제로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_A \left[ \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{m}{r}\right)^2 p^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\omega}{C}\right)^2 p^2 \right] r dA + j\omega \int_{L_v} \rho p v_n dL + \frac{j\omega}{2} \int_{L_d} \frac{\rho}{Z_s} p^2 r dL \right\} = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

여기서  $A, L_v$ , 그리고  $L_d$ 는  $\theta$ 가 일정한 단면적에서의 면적, 수직 속도성분을 가지는 경계선, 그리고 음향 임피던스  $Z_s$ 를 가지는 경계선을 나타낸다.

이제 음향 임피던스  $Z_s$ 의 크기를 구하기 위하여 구면좌표계( $\xi, \theta, \phi$ )를 도입하기로 한다. 셀의 단면에서의 최대치수에 비하여 상당히 멀리 떨어진

거리  $\xi$ 에서는 음압의 크기가  $\xi$ 에 반비례하게 되므로 음압  $p$ 는 아래의 식으로 나타낼 수 있다<sup>(7)</sup>.

$$p = \frac{1}{\xi} e^{j(\omega t - k\xi)} f(\theta, \phi) \quad (7)$$

여기서  $k$ 는 음파의 웨이브 수(wave number)이며 함수  $f(\theta, \phi)$ 는 음압의 방향성을 나타내는 함수이다.  $\xi$ 방향으로의 공기입자의 속도성분을  $u$ 라고 하면 이 방향으로의 힘의 평형조건식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

식 (7) 과 (8)로부터 음향 임피던스를 구하면 아래의 식으로 나타낸다.

$$Z_s = \frac{P}{u} = \rho C \frac{(k\xi)^2}{1 + (k\xi)^2} + j\rho C \frac{k\xi}{1 + (k\xi)^2} \quad (9)$$

따라서 경계면  $S_D$ 를 셀의 단면에서의 최대치수에 비하여 상당히 멀리 떨어진 구면으로 설정하면 식 (9)의 음향 임피던스를 적용할 수 있다.

### 3. 유한요소법에 의한 해석

식 (6)에 대한 근사해를 구하기 위하여 본 연구에서는 유한요소법을 이용하였다. 유한요소  $e$ 에 대하여 내부의 압력  $p$ 와 경계선에 대한 수직 속도 성분  $v_n$ 을 아래와 같이 형상함수(shape function)을 이용하여 가정한다.

$$p = [N_e] \{p_e\} \quad (10)$$

$$v_n = [N_i] \{v_e\} \quad (11)$$

위의 두 식을 식 (6)의 각 항에 대입하면 아래의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{A_e} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{m}{r} \right)^2 p^2 - \left( \frac{\omega}{C} \right)^2 p^2 \right] r dA \\ & = \int_{A_e} (r \{p_e\}^T [B_e]^T [B_e] \{p_e\} \\ & + \frac{n^2}{r} \{p_e\}^T [N_e]^T [N_e] \{p_e\}) dA \\ & - \int_{A_e} \frac{\omega^2}{C^2} r \{p_e\}^T [N_e]^T [N_e] \{p_e\} dA \\ & = \{p_e\}^T [k_e] \{p_e\} - \omega^2 \{p_e\}^T \{m_e\} \{p_e\} \quad (12) \end{aligned}$$

단,

$$[B_e] = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} [N_e] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} [k_e] &= \int_{A_e} r [B_e]^T [B_e] dA \\ & + n^2 \int_{A_e} \frac{1}{r} [N_e]^T [N_e] dA \quad (14) \end{aligned}$$

$$\{m_e\} = \frac{1}{C^2} \int_{A_e} r [N_e]^T [N_e] dA \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \int_{L_{i,v_e}} \rho p v_n r dL \\ & = \int_{L_{i,v_e}} \rho r \{p_e\}^T [N_i]^T \{v_e\} dL \\ & \equiv \{p_e\}^T [S_e] \{v_e\} \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{L_{i,d_e}} \frac{\rho}{Z_s} p^2 r dL \\ & = \int_{L_{i,d_e}} \frac{\rho}{Z_s} r \{p_e\}^T [N_i]^T [N_i] \{p_e\} dL \\ & \equiv \{p_e\}^T [d_e] \{p_e\} \quad (17) \end{aligned}$$

식 (11), (15), (16)을 모든 유한요소에 대하여 조합한 후 식 (6)에 적용하면 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$([K] + i\omega[D] - \omega^2[M]) \{p\} = -j\omega[S] \{v\} \quad (18)$$

셀의 진동수  $\omega$ 와 면에 대한 수직방향의 속도성분  $\{v\}$ 를 알고 있는 경우에는 식 (18)을 이용하여 음압  $\{p\}$ 를 구할 수 있다.

### 4. 음향세기(Acoustic Intensity)와 방사효율(Radiation Efficiency)

음향세기는 음파의 진행방향에 대하여 수직인 단면적을 통과하는 평균 일률의 크기를 가지는 벡터로서 구조물 요소의 진동에 의한 음향방사의 특성을 나타내는 중요한 척도이다. 음파의 주기를  $T$ 라고 하면 음향세기  $I$ 는 아래와 같이 정의된다<sup>(3,7)</sup>.

$$I = \overline{PV} = \frac{1}{T} \int_0^T PV dt \quad (19)$$

이제  $P = \text{Re}\{\hat{P}e^{j\omega t}\}$ ,  $V = \text{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t}\}$ 라고 하면 식 (19)를 아래의 식으로 간단히 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} (\text{Re}\{\hat{P}\} \cdot \text{Re}\{\hat{V}\} + I_m\{\hat{P}\} \cdot I_m\{\hat{V}\}) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\{\hat{P}\hat{V}^*\} \quad (20) \end{aligned}$$

여기에서  $\hat{V}^*$ 는  $\hat{V}$ 의 공액복소수를 나타낸다.

일반적으로 구조물요소의 진동과 방사되는 에너지와의 비율을 나타내기 위하여 아래의 식으로 정의된 방사효율을 이용한다<sup>(3)</sup>.

$$\sigma = \frac{H}{\rho CS \bar{V}^2} \quad (21)$$

여기서  $H$ 는 표면적이  $S$ 인 구조물에서 방사되는 일률이며,  $\bar{V}^2$ 은 진동하는 표면에 대한 수직방향의 속도의 제곱을 시간과 표면적에 대하여 평균한 값이다. 방사효율을 음압과 속도의 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma = \frac{\int_s I_n ds}{\rho C S \bar{V}^2} = \frac{\int_s \int_0^T P V dt ds}{\rho C \int_s \int_0^T V^2 dt ds} \quad (22)$$

윗 식에서  $I_n$ 은 면적성분  $ds$ 에 수직인 방향의 음향세기이다. 구조물의 진동에 의하여 발생하는 음압을 계산하면 식 (20), (22)를 이용하여 음향세기와 방사효율을 구할 수 있다.

### 5. 수치해석 결과 및 실험과의 비교

앞에서 제시한 음향해석의 이론에 따라 유한요소 해석 프로그램을 작성하였으며, 그 타당성을 검증하기 위하여 1 kHz의 주파수로 체적이 균일하게 진동하는 구의 음향세기와 방사효율을 계산하고 알려진 이론해와 비교하였다. 여기에서 구의 반경은 10cm이며 공기는 1기압, 20°C ( $\rho = 1.21\text{kg/m}^3$ ,  $C = 343\text{m/s}$ )로 가정하였다. 요소당 4개의 절점을 가지는 300개의 요소를 이용하였으며 구의 중심에서 가장 멀리 떨어진 절점까지의 거리는 30cm이다. 유한요소해석으로 구한 음향세기는 Fig. 2와 같으며 방사효율은 0.7704로 이론해에 의한 방사효율(0.7701)과 거의 일치하고 있다.

Fig. 3은 축대칭 셸의 모델을 보여주고 있으며, 2-1과 3-1 모우드의 진동특성은 Fig. 4와 같다. Fig. 5는 Fig. 3에 보인 셸 모델의 최하단 중심으로부터 가장 멀리 떨어진 절점까지의 거리  $L$ 의 크기를 변화시키면서 2-1 모우드에 의한 음향의 방사효율을 구한 결과로서  $L$ 이 커짐에 따라 방사효율이 점차 수렴해 간다는 것을 알 수 있다.  $L$ 을 2.5m, 절점간의 거리를 2.5cm로 하여 1440개의 요소를 이용하여 구한, 2-1 모우드와 3-1 모우드의 방사효율은 각각 0.0009와 0.1529로 나타났다. 셸 모델의

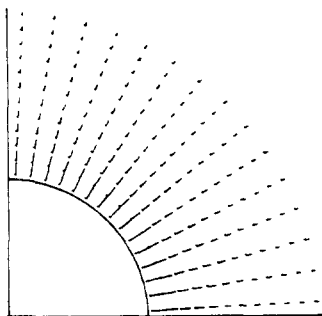


Fig. 2 Acoustic intensity from a breathing sphere

크기에 비하여 고유진동수가 비교적 낮으므로 2-1 모우드에 의한 음향의 방사효율이 상당히 작으며 따라서 이 모델은 2-1모우드에 의한 발음체로서는 적합하지 않다는 것을 알 수 있다.

셸 모델의 2-1모우드와 3-1모우드에 의하여 발생하는 음향세기 벡터의  $r$ - $z$ 면에서의 성분은 각각

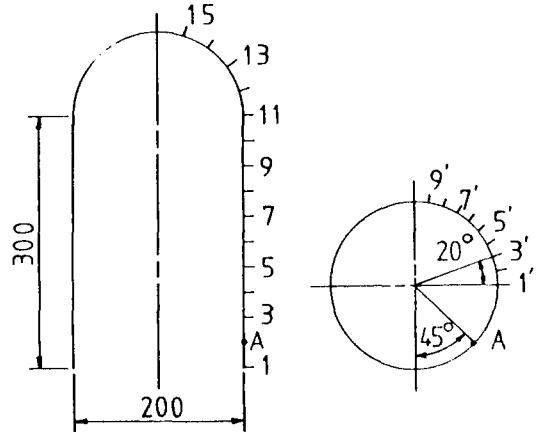


Fig. 3 Axisymmetric shell model

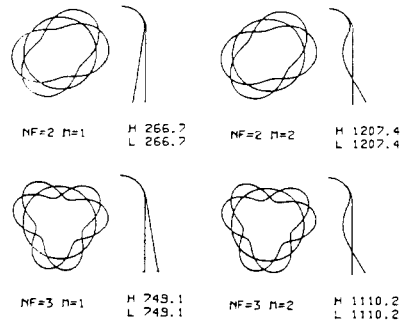


Fig. 4 Natural frequency and mode shape of the mode of Fig. 3

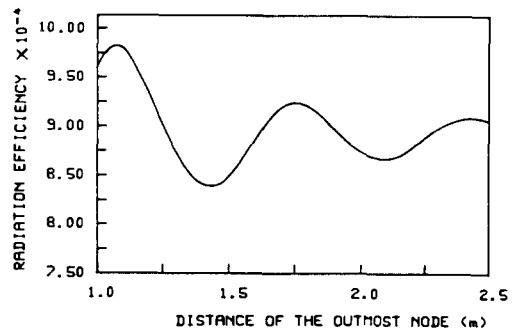


Fig. 5 Radiation efficiency with the distance of the outmost node

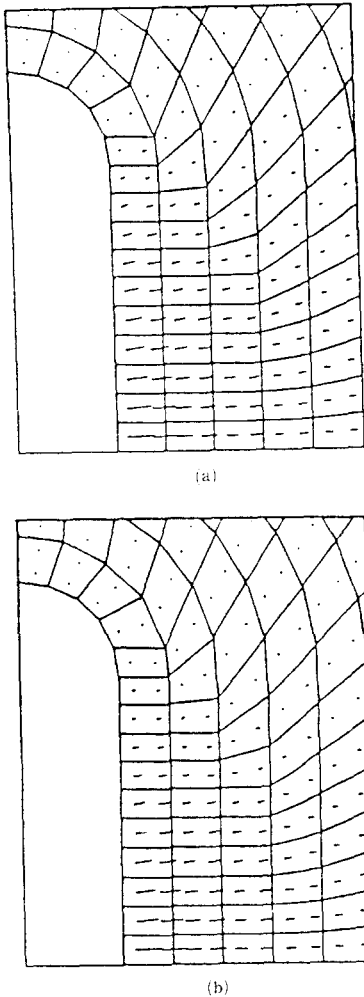


Fig. 6 Acoustic intensity vector in  $r-z$  plane

Fig. 6의 (a), (b)와 같이 구해졌으며 여기에서 음향 세기를 나타내는 선의 원점은 구조물을 향한 쪽이고 선의 길이는 음향세기의 크기를 나타낸다. Fig. 7은  $r-\theta$ 면에서의 음향세기를 구한 것이다.

음향세기를 측정하기 위한 실험장치의 개요도는 Fig. 8과 같다. 신호 발생기를 이용하여 셀 모델의 2-1모우드의 진동수를 가지는 정현파로 모델을 가진시키고 음향세기를 측정하였다. 모델의 진폭이 가장 큰  $r-z$ 면에서 모델과 30cm떨어진 지점에서의 높이에 따른  $r$ -방향 음향세기 벡터성분은 Table 1과 같이 구해졌으며, 높이 10cm의 단면에서 원주방향의 좌표  $\theta$ 에 따라 측정한  $r$ -방향 음향 세기는 Table 2와 같다. 여기에서 모델의 최대진

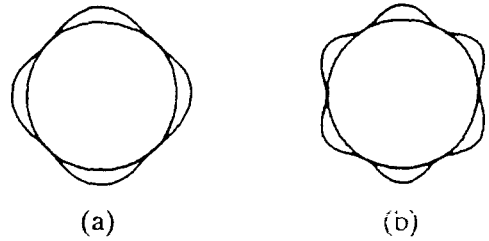


Fig. 7 Acoustic intensity in  $r-\theta$  plane

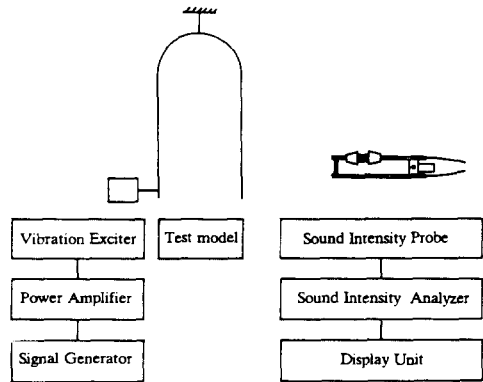


Fig. 8 Experimental set-up for measuring acoustic intensity

Table 1 Acoustic intensity with height

Height	Acoustic intensity ( $W/m^2$ )	
	Experiment	Analysis
10cm	0.0661	0.0626
20cm	0.0457	0.0457
30cm	0.0282	0.0276
40cm	0.0155	0.0122
50cm	0.0076	0.0061

Table 2 Acoustic intensity with peripheral angle

$\theta$ - coord.	Acoustic intensity ( $W/m^2$ )	
	Experiment	Analysis
60°	0.0096	0.0156
40°	0.0025	0.0019
20°	0.0398	0.0367
0°	0.0661	0.0626
-20°	0.0437	0.0367
-40°	0.0020	0.0019
-60°	0.0120	0.0156

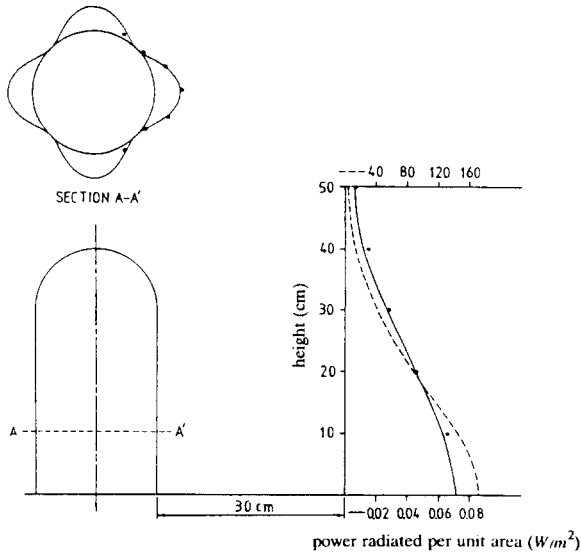


Fig. 9 Variation of acoustic intensity(—; 2-1 mode, ---; 3-1 mode, o; experiment of 2-1 mode)

폭은 1mm로 가정하였다. Fig. 9는 이 결과를 도시한 그림으로 실선과 점선은 각각 2-1모우드와 3-1모우드의 진동에 의하여 발생하는  $r$ -방향 음향세기를 수치해석적인 방법으로 구한 결과이다. 이 그림으로부터, 2-1모우드에 의하여 방사되는 일률은 3-1모우드에 의한 일률에 비하여 대략 1/2,000 정도로 매우 작다는 것을 알 수 있으며 따라서 앞에서 언급한 바와 같이 이 셀 모델은 2-1모우드에 의한 발음체로서는 적합하지 않다는 사실을 확인할 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 축대칭 셀의 진동에 의하여 발생하는 음향의 특성을 유한요소법으로 구하였다. 음향 임피던스를 이용하여 셀에서의 거리가 무한대인 영역을 처리하고 축대칭 셀의 고유모우드의 특성을 이용하여 2차원 유한요소해석의 과정을 유도하였

다. 유도된 식에 따라 수치해석 프로그램을 작성하고 축대칭 셀의 고유모우드에 의하여 발생하는 음향의 세기와 효율을 구하였다. 실험을 수행하여 음향세기를 구하고 유한요소법에 의한 결과와 비교한 바 만족할 만한 결과를 얻었다. 이 해석방법은 미소비대칭이 있는 축대칭 셀<sup>(\*)</sup>에 대해서도 효율적으로 음향방사의 특성을 구할 수 있다.

## 후 기

본 연구는 1988-1989년도 문교부 자유공모 과제의 연구비 지원에 의하여 수행되었으며 이에 관계자 여러분에게 감사의 뜻을 표한다.

## 참 고 문 헌

- (1) Ingard, K. U. and Akay, A., 1987, "Acoustic Radiation From Bending Waves of a Plate", Journal of Vibration, Acoustics, Stresses, and Reliability in Design, Trans. of ASME, Vol. 109, pp. 75~81.
- (2) Keltie, R. F. and Feng, H., 1987, "The Effects of Modal Coupling on the Acoustic Power Radiation From Panels", Journal of Vibration, Acoustics, Stresses, and Reliability in Design, Trans. of ASME, Vol. 109, pp. 48~54.
- (3) Cremer, L. and Heckl, M., 1973, Structure-Borne Sound, Springer-Verlag.
- (4) Fahy, F., 1985, Sound and Structural Vibration, Academic Press.
- (5) Yi, S. I., 1986, "A Study on the Radiation Characteristics and Acoustic Performance of Korean Bells", Ph. D. Thesis, KAIST.
- (6) Filippi, P., 1983, Theoretical Acoustics and Numerical Techniques, Springer-Verlag.
- (7) Kinsler, L. E., etc., 1982, Fundamentals of Acoustics, John Wiley and Sons.
- (8) 조선희, 이장무, 이교일, 정진태, 1985, "설계 및 가공공정 계획의 진산자동화에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제9권, 제5호, pp. 647~654.