

〈論 文〉

정 4 각 덕트 입구영역에서 층류정상 유동특성에 관한 연구

박 길 문* · 고 영 하**

(1989년 12월 4일 접수)

A Study on Characteristics of Developing Laminar Steady Flows in a Square Duct

G. M. Park and Y. H. Koh

Key Words : Laminar Steady Flows(층류 정상유동), Entrance Length(입구길이), Velocity Waveforms(속도 파형), Velocity Profiles(속도 분포), Developing Flows(발달과정 유동)

Abstract

Flow characteristics of developing steady flow in a square duct were studied analytically and experimentally by hot-wire anemometer and oscillograph recording system. Velocity profiles, critical Reynolds number, and entrance length of steady flows were investigated in a square duct with $40\text{mm} \times 40\text{mm} \times 4,000\text{mm}$ (width \times height \times length). The results obtained from analytical and experimental studies are as follows; (1) The velocity profiles of developing steady duct flows are agreed with theoretical results obtained from the linearization of convective term in momentum equation. (2) The critical Reynolds number of laminar steady flow of $Re_{st. cr}$ was about 1,600 obtained from velocity waveforms. (3) The shear stress per unit length in entrance region has larger distribution than in fully developed region because of the inlet effect. (4) The entrance length (Le) of laminar steady duct flow was obtained by $(Le/Dh)/Re = 0.08$ from the velocity distribution and shear stress distribution of developing laminar flow.

기 호 설 명

a : 덕트단면의 반폭
 b : 덕트단면의 반높이
 D_h : 수력직경 ($=4ab/(a+b)$)
 Le : 입구길이
 l : 덕트시험부의 길이
 Re : 레이놀즈 수 ($=D_h \cdot U_m/\nu$)
 s : 라플라스 연산자
 s' : 무차원 라플라스 연산자 ($=b^2s/\nu$)

t : 시간
 u, v, w : x, y, z 축방향의 속도성분
 u', v', w' : x, y, z 축방향의 무차원 속도성분
 U_{cl} : 덕트의 중심속도
 x, y, z : 정사각덕트의 직각좌표
 x' : 무차원 x 좌표 ($(x/b)/(b \cdot U_m/\nu)$)
 y' : 무차원 y 좌표 ($=y/a$)
 z' : 무차원 z 좌표 ($=z/b$)
 α_m : $(2m+1)/2$
 β_n : $(2n+1)/2$
 γ : 종횡비 ($=a/b$)
 λ : 마찰계수

*정회원, 조선대학교 공과대학 기계공학과

**정회원, 조선대학교 대학원

- μ : 점성계수
 ν : 동점성계수
 ρ : 밀도
 τ_w : 벽면전단응력

하첨자

- c : 임계값
 cl : 덕트중심에 대한 값
 e : 발달하고 있는 유동에 대한 값
 fd : 완전발달된 유동에 대한 값
 m : 단면평균값

상첨자

- : 라플라스 영역에서의 양
 : 무차원 양

1. 서론

기계공업의 발달로 인하여 산업현장에서 유체기계에 연결된 덕트시스템의 설계에 기초가 되는 덕트입구영역의 유동해석은 덕트시스템의 최적설계에 필수적 자료이다. 덕트 설계에 있어서 유동특성을 정확하게 규명한 기초자료는 유체기계의 효율적 운전, 에너지 절약 및 덕트시스템의 최적설계에 매우 유용하게 사용되며, 덕트시스템의 최적설계는 장치효율, 안정성 및 경제성 등에 큰 영향을 미치게 되므로, 덕트시스템의 유동특성에 대한 이론적 및 실험적 연구가 필요하다⁽¹⁾.

덕트내의 유동특성에 대한 기존연구들을 정리하여 보면, 덕트 유동장의 단면형태에 따라 원형덕트, 3각단면덕트, 타원단면덕트, 4각 단면덕트 및 2중 동심 원형덕트 등으로 분류될 수 있고, 연구방법으로는 이론적, 수치적 및 실험적 연구 등으로 분류할 수 있다⁽²⁻⁶⁾. McComas⁽⁷⁾는 임의 단면(원형, 타원형, 2중 동심원형 및 3각형, 4각형 덕트 등)에 대하여 이론적인 해석방법으로 속도분포와 입구길이를 구하였고, Goldstein & Kreid⁽⁸⁾는 정 4각단면덕트의 입구영역에서 L.D.V.를 이용하여 속도분포를 측정하는 실험적인 연구를 하였으며 Fleming & Sparrow⁽⁹⁾는 4각단면덕트 및 3각단면덕트에 대하여 선형화시킨 운동량방정식을 구하여 속도분포와 압력분포를 이론적으로 연구하였고, Christiansen 등⁽¹⁰⁾은 원형덕트의 입구영역에서 운동량방정식을 수치해석에 의하여 속도분포, 입구길이와 압력구배를 해석한 수치해석적 연구를 하였다.

그러나, 이들 기존 연구들은 거의 2차원 유동이 이루어지는 완전발달된 유동영역에 대하여 연구하였고, 3차원 유동이 이루어지는 입구영역의 유동영역에 대해서는 자세하고 정확한 연구가 이루어지지 않았으며, 특히, 정 4각단면 덕트내의 입구영역에서 층류정상유동에 대한 유동해석으로 입구길이를 규정한 연구결과는 많지 않은 것으로 사료된다.

본 연구는 정 4각 단면덕트의 입구영역에서 층류 정상유동의 유동특성을 이론적 및 실험적인 방법으로 속도파형과 속도분포를 얻어서 유동이 발달되고 있는 유동특성과 입구길이를 규정하였다. 이론적인 방법으로는 덕트입구영역에서 공기유동에 대한 운동량방정식을 유도한 후, 운동량방정식 중의 비선형인 대류항을 선형화시켜서 Laplace변환으로 속도 분포식의 해를 구하였고, 실험적인 방법으로는 시험덕트의 크기가 40×40×4,000mm(가로×세로×높이)인 정 4각단면덕트에 송풍기로 공기를 흡입하여 정상유동을 얻었고, 열선유속계에 의하여 속도파형과 속도분포 등의 측정된 결과를 이론식과 비교검토하였다.

2. 이론 해석

2.1 지배 방정식

정 4각 단면 덕트내의 입구 영역에서 층류 정상유동에 대한 유동특성을 이론적으로 규명하기 위하여 Fig. 1과 같이 좌표계(coordinate system)를 설정하여 x , y , z 축 방향의 속도성분을 각각 u , v , w 라 하였다. 본 연구에서 선정한 작동유체는 공기이므로, 외력을 무시한 비압축성 유동($\rho = \text{constant}$)이라 가정할 때 운동량 방정식과 연속 방정식은 다음과 같다.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1-a)$$

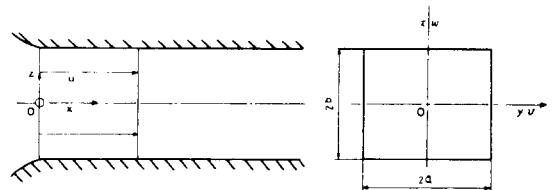


Fig. 1 The coordinate system of square duct

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1-b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1-c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

y축 방향인 속도성분, v와 z축 방향의 속도성분, w는 x축 방향의 속도성분, u에 비해서 대단히 작기 때문에 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 또는 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 조건을 적용하고, y축 방향과 z축 방향의 속도성분들을 무시하여 정리하면 운동량 방정식은 다음과 같다.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

유체가 덕트내에 유입되는 입구영역에서 해를 구하기 위하여 운동량 방정식 중의 대류항을 연속 방정식을 이용하여 정리하고 덕트 단면에 대하여 적분을 하면 다음과 같다.

$$\int_A \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} dA = \int_A \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial y} - u \frac{\partial w}{\partial z} \right\} dA \quad (4)$$

벽면에서 u, v, w는 0이므로 Von Karman의 적분 방정식과 Green정리를 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_A \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} dA = \int_A \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dA \quad (5)$$

여기서 $u^2 = u_m \cdot u$ 로 선형화해서 정리하면 다음과 같다.

$$\int_A \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} dA \cong \int_A u_m \frac{\partial u}{\partial x} dA \quad (6)$$

식 (6)을 식 (3)에 대입하여 정리하면 선형화된 운동량 방정식은 다음과 같다.

$$\int_A u_m \frac{\partial u}{\partial x} dA = \int_A \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right\} dA \quad (7)$$

여기서, y축과 z축 방향의 속도성분들은 무시하고 주요동 방향에 대한 속도성분만을 고려했기 때문에

$$\int_A u_m \frac{\partial u}{\partial x} dA = u_m \frac{\partial u}{\partial x} A \text{가 된다.}$$

2.2 속도 분포식

덕트내의 층류 정상유동에 대하여 선형화시킨 위의 운동량방정식 (7)에서 압력항을 덕트 축방향 길이만의 함수, 즉, $p = p(x)$ 로 가정하고, 단면적에 대하여 적분한 다음 정리하면 다음과 같다.

$$u_m \frac{\partial}{\partial x} \int_A u dA = \int_A -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dA + \nu \int_A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dA \quad (8)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\nu}{A} \int_A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dA \quad (9)$$

식 (9)를 식 (7)의 우변에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\int_A u_m \frac{\partial u}{\partial x} dA = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\nu}{ab} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dy dz \quad (10)$$

식 (10)에서 변수들을 다음과 같이 무차원화 시킨다.

$$u' = \frac{u}{u_m}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad z' = \frac{z}{b}, \quad x' = \frac{\nu}{u_m \cdot b^2} x$$

$$\gamma = \frac{a}{b} \quad (1 \leq \gamma \leq \infty) \quad (11)$$

식 (11)을 식 (10)에 대입하여 정리한 무차원 식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) dy' dz' \quad (12)$$

이 식에서 경계조건을 $x'=0$ 와 $u'=1$ 을 사용하여 x' 에 대하여 Laplace변환을 시키면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z'^2} - s \bar{u}' = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z'^2} \right) dy' dz' - 1 \quad (13)$$

관벽에서 경계조건은 다음으로 주어진다.

$$\left. \begin{aligned} y' = \pm 1 : u' = 0 \\ z' = \pm 1 : u' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

위의 경계조건을 만족하는 식 (13)의 해는 변수분리법을 사용하여 정리하면 다음과 같이 된다^(10,13).

$$\bar{u}' = \left\{ 1 - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z'^2} \right) dy' dz' \right\}$$

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \cos \alpha_m y' \cdot \cos \beta_n z'}{(2m+1)(2n+1)(\alpha_m^2 + \gamma^2 \beta_n^2 + s)} \quad (15)$$

여기서, $\alpha_m = \frac{2m+1}{2}\pi$, $\beta_n = \frac{2n+1}{2}\pi$ 이다.

식(15)에서 $\left\{1 - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}'}{\partial z'^2} \right) dy' dz' \right\}$ 를 소거하기 위하여 단면적분하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\tilde{u}' = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{s} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \cos \alpha_m y' \cdot \cos \beta_n z'}{(2m+1)(2n+1)(\alpha_m^2 + \gamma^2 \beta_n^2 + s)}}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2(2n+1)^2(\alpha_m^2 + \gamma^2 \beta_n^2 + s)}} \quad (16)$$

식(16)은 2중급수가 되므로 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \frac{\pi}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \beta_n \cdot \cos \beta_n z'}{(2n+1)} \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{1}{\zeta_n^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \zeta_n y'\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \zeta_n\right)} \right\} \right] / \\ &\quad \left[s \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \zeta_n^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \zeta_n^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2} \zeta_n\right)}{\left(\frac{\pi}{2} \zeta_n\right)} \right\} \right] \quad (17) \end{aligned}$$

여기에서 $\zeta_n = \gamma^2(2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2}s$ 이고, $s=0$ 의 경우와 $\zeta(s)=0$ 의 경우를 생각할 수 있는데, $s=0$ 를 만족하는 급수는 완전 발달된 구역에서의 속도분포로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u'_{s=0} &= \left[1 - z' - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \right. \\ &\quad \left. \frac{\cosh(\beta_n \cdot \gamma \cdot y') \cos(\beta_n \cdot z')}{\cosh(\beta_n \cdot \gamma)} \right] / \\ &\quad \left[\frac{2}{3} - \frac{128}{\pi^5} \frac{1}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(\beta_n \gamma)}{(2n+1)^5} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

그리고, $\zeta(s)=0$ 를 만족하는 급수는 입구영역에서의 속도분포로서, $\zeta(-\gamma^2 a_i^2)=0$, 즉, $s=-\gamma^2 a_i^2$ 에 극(pole)이 있으므로 그 급수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u'_e &= \left[\frac{\pi^6}{128} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^4} \left(1 - \frac{\cos \alpha_i z'}{\cos \alpha_i} \right) + \frac{\pi^3}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_i} \right. \\ &\quad \left. \frac{(-1)^n \cosh\left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i} y'\right) \cos \beta_n z'}{(2n+1) \lambda_i \cosh\left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i}\right)} \right] / \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \lambda_i^2} \left[\frac{3}{2} \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i}\right)}{\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i}} - 1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i}\right) \right] \right\} \exp(-\gamma^2 a_i^2 x') \quad (19) \end{aligned}$$

여기에서 $\lambda_i = (2n+1)^2 - \left(\frac{\pi}{2} a_i\right)^2$ 이다.

$$\begin{aligned} &\frac{\pi^2}{8} \left\{ 1 - \frac{\tan \alpha_i}{\alpha_i} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ \frac{1}{(2n+1)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(2n+1)^2 - \left(\frac{2}{\pi} \alpha_i\right)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. \frac{\tanh\left\{ \frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{(2n+1)^2 - \left(\frac{2}{\pi} \alpha_i\right)^2} \right\}}{\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{(2n+1)^2 - \left(\frac{2}{\pi} \alpha_i\right)^2}} \right] \quad (20) \end{aligned}$$

여기서 α_i 는 뒷식에서 i 번째 얻은 근이고, 덕트의 입구영역에서 층류정상유동에 대한 속도 분포식은 $s=0$ 일때의 급수와 $\zeta(s)=0$ 일때의 급수의 합이 된다.

$$u = u'_{s=0} + u'_e \quad (21)$$

그러므로, 덕트입구영역에서 층류정상유동의 속도 분포식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= \left[1 - z' - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \right. \\ &\quad \left. \frac{\cosh(\beta_n \cdot \gamma \cdot y') \cos(\beta_n \cdot z')}{\cosh(\beta_n \cdot \gamma)} \right] / \\ &\quad \left[\frac{2}{3} - \frac{128}{\pi^5} \frac{1}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(\beta_n \gamma)}{(2n+1)^5} \right] \\ &\quad + \left[\frac{\pi^6}{128} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^4} \left(1 - \frac{\cos \alpha_i z'}{\cos \alpha_i} \right) + \frac{\pi^3}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_i} \right. \\ &\quad \left. \frac{(-1)^n \cosh\left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i} y'\right) \cos \beta_n z'}{(2n+1) \lambda_i \cosh\left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i}\right)} \right] / \\ &\quad \left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \lambda_i^2} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i}\right)}{\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\lambda_i}\right) \right\} \right] \exp(-\gamma^2 a_i^2 x') \quad (22) \end{aligned}$$

3. 실험

본 실험에 사용한 실험장치의 개략도는 Fig. 2에

도시하였다. 본 실험에 사용된 시험덕트는 매끄러운 아크릴로 정밀하게 제작하였고, 흡입형 덕트로써 시험덕트의 횡단면($2a \times 2b$)은 $40 \times 40\text{mm}$ 이고, 길이가 $4,000\text{mm}$ 인 시험덕트를 사용하였다.

작동유체는 저속이므로 비압축성 유동으로 가정할 수 있는 공기유동으로서, 송풍기에 의하여 흡입 유동을 발생시켰다. 덕트입구에는 매끄러운 유입관

(bell mouth)을 설치하여 공기의 유입을 원활하게 하고, 균일유동이 이루어지도록 하였으며 유량조절을 위해 유량제어밸브를 설치하였다.

시험덕트는 열선유속계의 열선 지지대를 삽입하기 위하여 Fig. 3에 표시된 것처럼 직경 5.4mm 의 구멍을 덕트 중심선 상($y'=0$)에서 축방향을 따라 덕트윗면에 $x/D_h=0 \sim 100$ 사이에 $5D_h$ 의 등간격으로

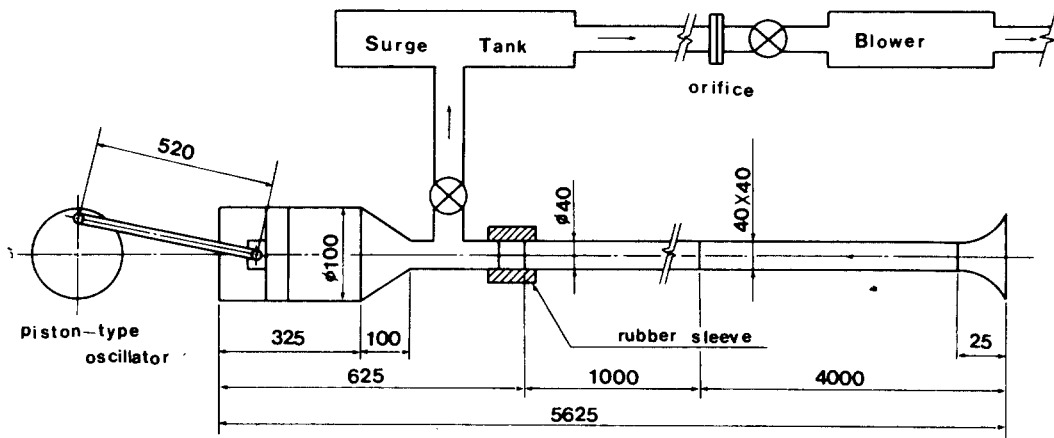


Fig. 2 The schematic diagram of experimental apparatus

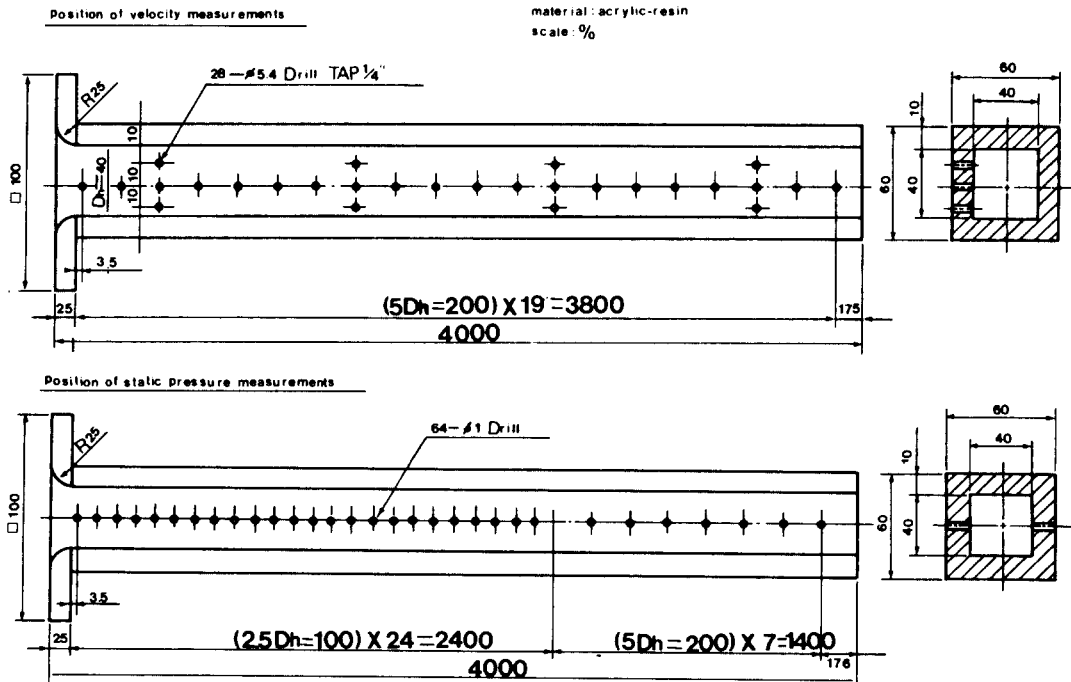


Fig. 3 The position of velocity and static pressure measurements

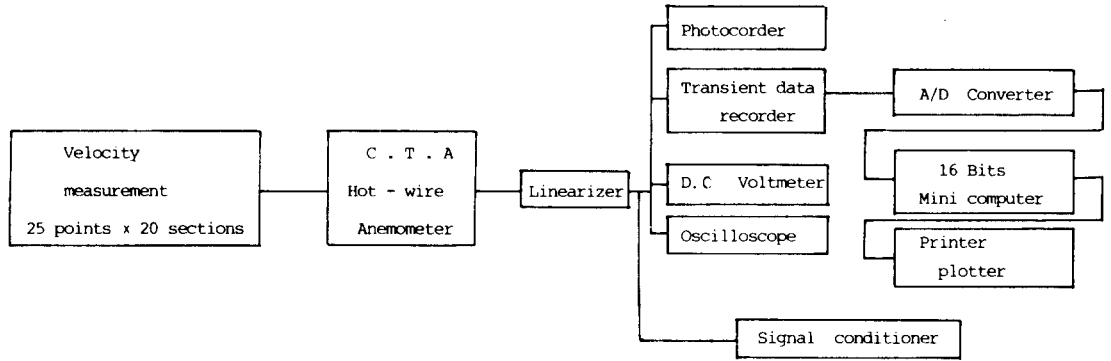


Fig. 4 The diagram of data acquisition and processing system

로 20개 지점에 구멍을 만들었고, 유동의 대칭성을 조사하기 위하여 축방향으로 $x/D_h = 10, 35, 60, 85$ 지점에서 덕트중심의 가로방향으로 10mm떨어진 위치($y' = \pm 0.5$ 지점)에 5.4mm열선지대 삽입구를 만들어서 속도를 측정할 수 있도록 제작하였다. 본 실험에서 얻어진 자료를 처리하기 위한 자료처리 시스템은 Fig. 4에 도시하였다. 시험덕트내의 입구영역에서 정상유동의 특성은 레이놀즈수와 덕트입구에서 덕트축방향의 위치(x')에 따라 속도분포가 발달되어가므로 층류정상유동의 발달과정을 고찰하기 위하여 레이놀즈수를 1050으로 하여 덕트축방향의 거리(x/D_h)가 0.075, 10, 50, 60, 70, 80, 90위치에서 덕트중심으로부터 z 축 방향으로 17분할한 지점에서 층류정상유동의 속도분포를 정온 열선 유속계(C.T.A. Hotwire Anemometer)의 선형기, 신호 안정기를 거쳐서 오실로 그래프에 기록하여 정상유동 순간속도의 속도파형을 고찰하고, 속도분포는 자료처리 시스템에 의하여 컴퓨터에서 계산한 후 자료를 얻어서 그래프에 도시하였다. 본

실험에서의 층류정상유동에 대한 실험조건은 Table 1에 표시하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 속도파형 및 임계 레이놀즈수

정상유동에서 열선 유속계의 열선센서로부터 얻은 속도파형을 층류유동, 천이유동, 난류유동으로 구분하여 Fig. 5(a)~(c)에 덕트 축 중심에서 관벽쪽으로 위치를 변화시켜가면서 나타내었다.

또한, 덕트 중심($z'=0$)과 덕트 벽부근($z'=0.9$)에서 덕트입구로부터 덕트 축방향에 따라 변화하는 속도파형을 Fig. 6(a), (b)에 도시하였다. 이들 속도파형을 고찰하여 보면, 층류, 천이류 및 난류유동이 뚜렷이 구분되고, 덕트 입구에서 덕트 축 방향을 따라 하류로 유동하여 감에 따라 간헐적인 난류성분이 많이 나타나는 것은 덕트의 입구부근에서는 층류유동이 안정되고 있으나, 하류로 유동하여 감에 따라 난류성분이 형성되어 성장되어감을 알 수 있다.

층류정상유동의 임계레이놀즈수 결정은 완전 발달된 유동영역에 대하여 덕트 축 중심에서 열선 유속계의 열선으로부터 얻은 속도파형에 난류성분이 순간적으로 나타나기 시작한 순간의 유동에 대하여 5회 이상의 반복된 실험결과에서 정량적인 변화를 고찰한 다음, 평균속도를 계산하였다. 이때의 정상유동에 대한 유량을 오리피스로 측정하여 단면 평균속도(u_m)를 계산하여 정확성을 검토한 후 다음과 같은 식으로 임계레이놀즈수를 결정하였다.

$$Re_{st, cr} = \frac{U_m \cdot D_h}{\nu} \quad (23)$$

즉, 난류성분이 나타나기 시작한 유동의 단면평균

Table 1 Experimental conditions of developing laminar steady flow

Run	x/D_h	Reynolds number	$\frac{L_e/D_h}{Re_{st}}$	$\nu \times 10^5$ (m ² /s)	y'
1-1	0	1050	0.018	1.65	0.00
1-2	10				
1-3	50				
1-4	60				
1-5	70				
1-6	80				
1-7	90				

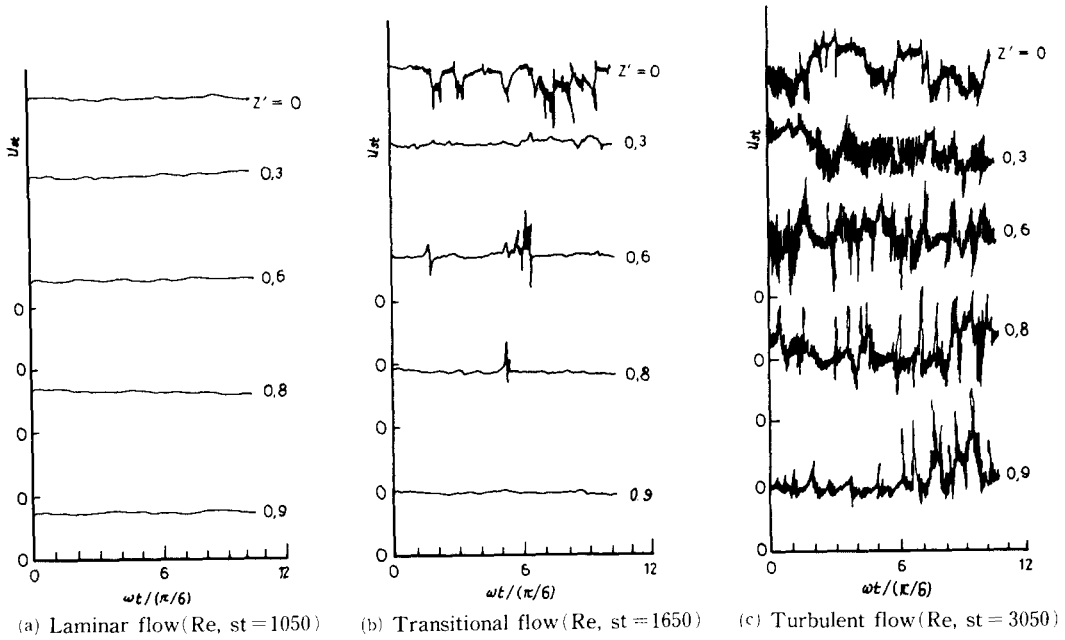


Fig. 5 The velocity waveforms of steady flow

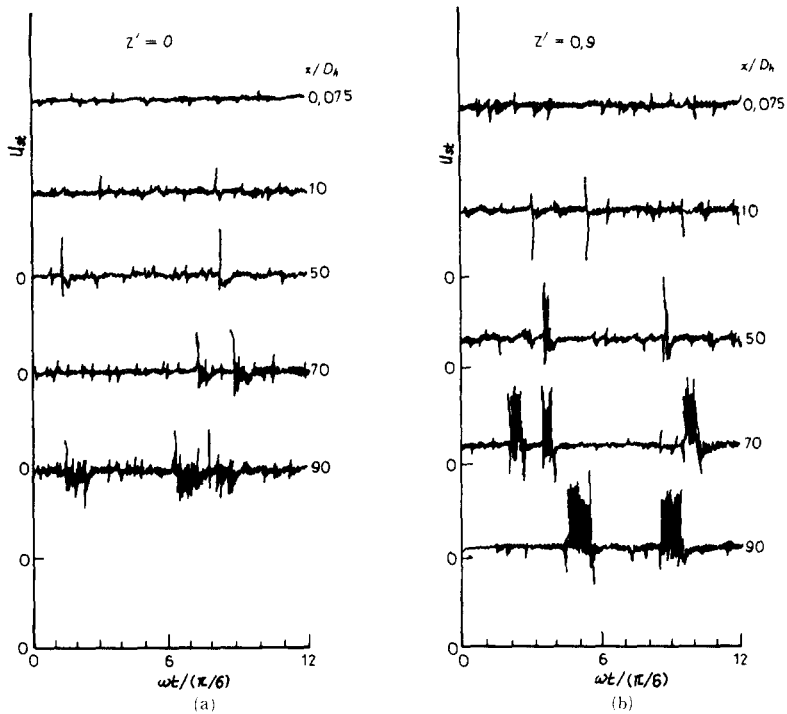


Fig. 6 Velocity waveforms of laminar steady flow along the x/D_h and z' variation ($Re, st = 1050$)

속도를 계산하여 식 (23)로부터 계산한 덕트내의 층류정상유동에서 천이정상유동으로 변화되는 임계 레이놀즈수는 $Re_{st,cr} \approx 1,600$ 정도이었다.

4.2 속도분포와 전단응력분포

덕트내의 층류정상유동에 대한 대칭성을 조사하기 위하여 덕트중심에서 양쪽 관벽으로 10mm떨어진 위치($y' = \pm 0.5$)에서 z 축 방향에 따라 속도분포를 측정된 실험결과를 Fig. 7에 나타냈는데, 실선은 덕트중심에서 측정값과 비교를 나타낸 것이고 점선은 덕트중심에서 양쪽관벽쪽으로 10mm떨어진 위치에서 측정값과 비교를 나타낸 것이다. 층류정상유동은 덕트중심을 기준으로 y 축과 z 축 방향으로 유동의 대칭성이 이루어지는 것을 확인하였다.

층류정상유동의 완전발달된 유동영역에서 속도분포를 덕트중심에서 z 축 방향을 따라 도시한 것을 Fig. 8에 나타내었는데, 이들 속도분포를 고찰하여 보면 포물선 형태에 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다.

이들 결과를 덕트의 입구영역에서 층류정상 유동의 발달과정에 있는 속도분포와 비교하여 검토하였다.

레이놀즈수가 1050인 경우의 덕트입구 구역에서 발달과정에 있는 층류 정상유동에 대하여 덕트입구로부터 무차원 축방향의 거리(x/D_h)가 0.075, 10, 50, 60, 70, 80, 90인 위치에서 덕트 중심으로부터 z 축 방향에 따라 속도분포를 측정하여 표시한 실험결과와 이론해석에서 얻은 층류정상유동의

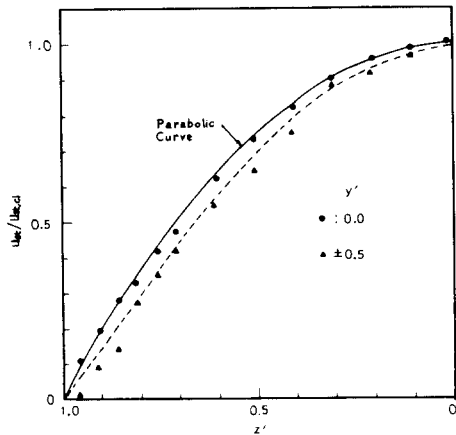


Fig. 7 Velocity profiles of laminar steady flow ($Re_{st} = 1050$)

속도분포식(22)과 비교를 Fig. 9에 도시하였다. 덕트입구로부터 무차원 축방향 거리의 변화[(x/D_h)/(Re_{st})]에 대하여 속도분포를 Han⁽¹¹⁾의 이론결과

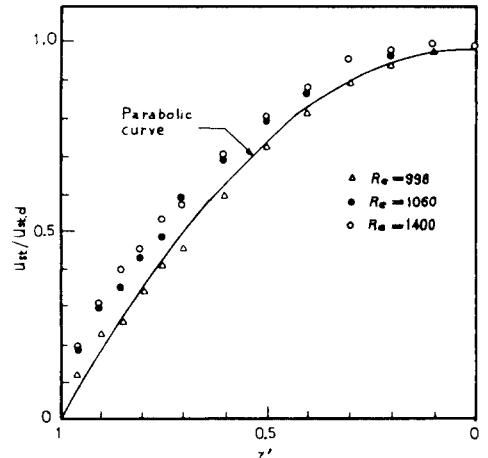


Fig. 8 Velocity profiles of fully developed laminar steady flow

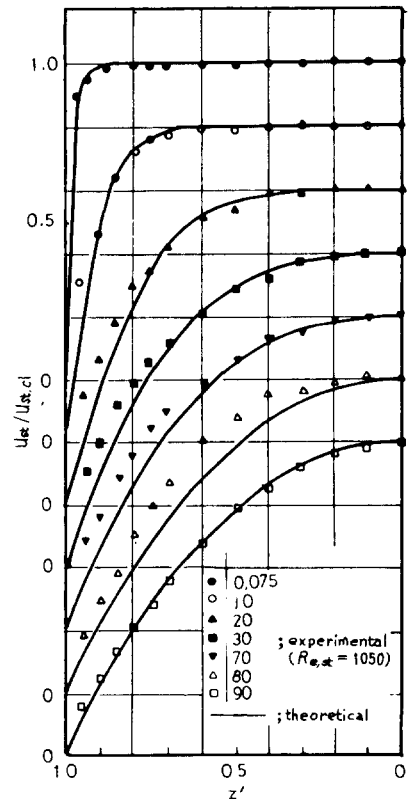


Fig. 9 Developing velocity profiles of steady laminar flow in run 1

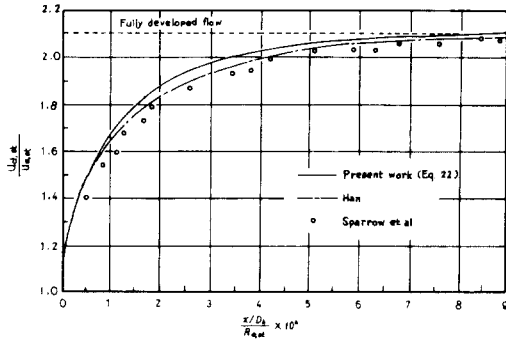


Fig. 10 Developing velocity profiles at duct center

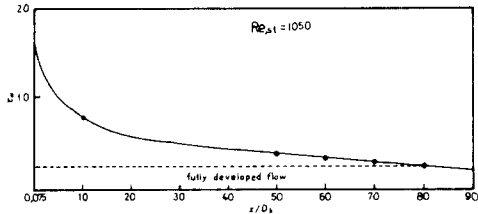


Fig. 11 Wall shear stress variation along the duct axis in run 1

와 Sparrow의 실험결과⁽¹²⁻¹⁴⁾를 비교하여 Fig. 10에 나타내었다.

이들의 결과를 고찰하여 보면 덕트입구에서 균일 유동이 유입되어 경계층이 덕트벽면으로부터 하류의 유동에 따라 발달되고 있는 현상을 고찰할 수 있고, 본 실험에서 덕트의 무차원 축방향거리(x/D_h)가 80~90부근에서 포물선 형태에 가까운 완전 발달된 유동이 이루어짐을 알 수 있고, 입구 부근과 완전 발달된 유동영역 부근에서 이론과 실험결과가 잘 일치하고, 중간유동 부근에서 잘 일치하지 않고 있는 이유는 유동이 발달되고 있는 과정에서 운동량 방정식의 대류항을 선형화한 것과의 측정오차로 사료된다.

덕트축방향 위치변화에 대한 벽면 전단응력은 Fig. 11에 도시하였는데, 점선이 완전 발달된 유동을 나타낸 것이다. 이들의 결과를 고찰하여 보면 덕트 축방향의 위치가 80~90에서 벽면전단응력이 거의 일정한 분포를 나타내고 있는데, 완전 발달된 유동영역에서 단위길이당 전단응력은 입구유동영역에서 단위길이당 전단응력보다 작다는 것을 알 수 있다. 이 현상은 덕트입구의 유동영향을 받아 입구영역에서 전단응력과 압력손실이 크게 되기 때문이라고 사료된다.

4.3 입구길이

덕트의 입구영역에서 발달과정에 있는 층류정상 유동의 속도분포와 전단응력분포 등을 고찰하여 입구길이를 결정하였다. 먼저, 층류정상유동의 레이놀즈수가 1050일때 덕트입구로부터 무차원 축방향 위치(x/D_h)가 0.075, 10, 50, 60, 70, 80, 90인 위치에서 덕트중심의 z 축 방향에 따라 속도분포에 대한 이론과 실험결과를 도시한 Fig. 9를 고찰하여 보면 덕트입구에서 균일유동이 덕트내로 유입하여 덕트입구로부터 경계층이 발달되고 있는 현상을 고찰 할 수 있고, 무차원 축방향 위치(x/D_h)가 80부근에서 거의 완전 발달하여 85.90지점에서는 속도분포의 변화가 거의 없었으므로, x/D_h 가 80~90부근에서 포물선 형태에 가까운 완전 발달된 층류운동의 속도분포가 이루어짐을 알 수 있었다. 그리고, 무차원 덕트 축방향의 위치 $[(x/D_h)/(Re_{st})]$ 의 변화에 따른 덕트 축중심에 대한 속도 분포를 Fig. 10에 도시하였는데, 이들 속도분포의 발달과정을 Han과 Sparrow등의 이론과 실험 결과를 비교하여 고찰하여 보면, 이들의 결과와도 거의 정량적으로 일치함을 알 수 있고, 층류정상유동에 대한 정 4각 단면 덕트의 무차원 입구길이 $[(L_e/D_h)/(Re_{st})]$ 는 약 0.08이 됨을 알 수 있다. 본 연구의 운동량 방정식에서 비선형인 대류항을 선형화시켜서 이론적으로 구한 속도 분포식과 측정된 속도 분포식의 실험결과가 비교적 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다. 그리고, 덕트입구구역에서 발달과정에 있는 층류정상유동의 속도분포로부터 입구길이는 덕트수력직경(D_h)과 레이놀즈수(Re_{st})에 관계됨을 알 수 있고, 본 연구로부터 정 4각단면 덕트내의 층류정상유동에 대한 무차원 입구길이 관계식은 $[(x/D_h)/(Re_{st})] \approx 0.08$ 을 얻었다.

5. 결 론

정 4각 단면 덕트 내에서 층류정상유동에 대한 임계레이놀즈수, 속도분포, 전단응력분포, 입구길이 등을 이론 및 실험의 결과로부터 비교, 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 덕트내의 층류정상유동에 대한 열선신호로부터 얻어진 속도파형에 의하면 입구에서 무차원 축방향 거리(x/D_h)가 증가할수록, 천이 및 난류성분이 나타남을 알 수 있었고, 완전 발달된 유동영역에서 층류정상유동의 속도분포가 포물선 형태에 잘

일치함을 알았다.

(2) 본실험에서 층류정상유동에서 천이정상유동으로 변화되는 임계레이놀즈수($Re_{st, cr}$)는 약 1,600 정도이었다.

(3) 덕트입구영역에서 운동량방정식 중 대류항을 선형화시켜서 이론적으로 얻어진 속도분포식과 실험결과를 비교 검토한 후 거의 일치하므로 덕트 입구영역에서 발달 과정에 있는 속도 분포식을 제안하였다.

(4) 덕트의 입구길이는 덕트의 수력직경, 레이놀즈수의 변수들에 의하여 결정됨을 알았고, 본 실험에서 얻은 층류정상유동에 대한 입구길이의 실험식은 $(L_e/D_h)/(Re_{st}) \approx 0.08$ 이었다.

참 고 문 헌

- (1) Shan, R.K. and London, A.L., 1978, "Advances in Transfer", Academic Press, London, Supplement 1, Chapter 7, pp. 196~222.
- (2) Park, G.M. 1987, "Flow Characteristics of Developing Laminar Unsteady Flows in a Square Duct", Ph. D., Thesis, Korea Univ.
- (3) Carlson, G.A. and Horbeck, R.W., 1973, "A Numerical Solution for Laminar Entrance Flow in a Square Duct", J. Appl. Mech., Vol. 40, pp. 25~30.
- (4) Fargie, D. and Martin, B.W., 1971, "Developing Laminar Flow in a Pipe of Circular Cross-section", Proc. Roy. Soc. London. A, Vol. 321, pp. 461~476.
- (5) Lakshmana, Rao, N.S. and Sridharan, K., 1971, "Laminar Flow Development at Conduit Entrance", J. Inst. Eng.(India), Vol. 51, No. 5, pp. 50~60.
- (6) Murakawa, K., 1960, "Theoretical Solutions of Heat Transfer in the Hydrodynamic Entrance Length of Double Pipes", Bull. JSME. Vol. 3, No. 11, pp. 340~345.
- (7) McComas, S.T., 1967, "Hydrodynamic Entrance Lengths for Ducts of Arbitrary Cross Section, J. Basic Eng., Vol. 89, pp. 847~850.
- (8) Goldstein, R.J. and Kreid, D.K., 1967, "Measurement of Laminar Flow Development in a Square Duct Using a Laser-Doppler Flowmeter", J. Appl. Mech., Vol. 34, pp. 813~818.
- (9) Fleming, D.P. and Sparrow, e.M., 1969, "Flow in the Hydrodynamic Entrance Region of Ducts of Arbitrary Cross Section", J. Heat Transfer, Vol. 91, pp. 345~354.
- (10) Christiansen, E.B. and Lemmon, H.B., 1965, "Entrance Region Flow", A.I. Ch. E.J., Vol. 11, No. 6, pp. 995~998.
- (11) Han, L.S., 1960, "Hydrodynamic Entrance Length for Incompressible Laminar Flow in Rectangular Ducts", J. Appl. Mech., Vol. 27, pp. 403~409.
- (12) Beavers, G.S., Sparrow, E.M. and Megnuson, R. A., 1970, "Experiments on Hydrodynamically Developing Flow in Rectangular Duct of Arbitrary Aspect Ratio", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 13, pp. 689~702.
- (13) Sparrow, E.M., Hixon, C.W., and Shavit G., 1967, "Experiments on Laminar Flow Development in Rectangular Ducts", J. Basic Eng., Vol. 89, pp. 116~124.
- (14) Sparrow, E.M. and Lin, S.H., 1964, "The Developing Laminar Flow and Pressure Drop in the Entrance Region of Annular Ducts", J. Basic Eng., Vol. 86, pp. 827~834.