

〈論 文〉

Burgers의 난류유동장을 표현하는 $K-L$ 전개와 푸리에 전개의 특성에 관한 연구

박신배* · 성형진** · 정명균**

(1990년 3월 6일 접수)

A Study on the Characteristics of the $K-L$ and the Fourier Expansions of a Burgers' Turbulent Flow Field

Shin-Bae Park, Hyung-Jin Sung and Myung-Kyoon Chung

Key Words: Characteristic Eddy Decomposition(특성 에디 분해법), Random Forcing(랜덤 력), Velocity Correlation(속도상관관계), Inhomogeneous(비등질성), Eigenvalue(고유치), Eigenfunction(고유함수)

Abstract

A characteristic eddy decomposition is applied to extract the coherent structure of random turbulent flow field. The characteristics of Karhunen-Loeve($K-L$) expansion and Fourier expansion are compared on the convergence of their expansions in representing inhomogeneous instantaneous turbulent flows. The model turbulence is generated by solving the Burgers' equation with random forcing. The coefficients of the Fourier expansion are determined by a Galerkin approach. When the Burgers' turbulent flow field is represented by the $K-L$ expansion and the Fourier expansion, the RMS error increases with an increase of Reynolds number. The RMS error of the $K-L$ expansion is always smaller than that of the Fourier expansion by a Galerkin approach. The results show the superiority of the $K-L$ expansion, especially, for high Reynolds number flows.

———— 기 호 설 명 ————		$\phi(x), \varphi(x)$: 고유함수	
A	: 진폭	λ	: 고유치
$a_n(t)$: $K-L$ 전개계수	δ_{mn}	: Kronecker 델타 함수
B_{kmn}, D_{kn}, S_k	: 상미분 방정식에 있는 계수들	하 첨 자	
$C_n(t)$: 푸리에 전개계수	N	: 부분전개항수
Re	: 레이놀즈	n	: 무한전개항수
$u(x,t)$: 무차원 속도	t	: 시간 미분
t	: 무차원 시간	x	: 1차 미분
x	: 무차원 좌표	xx	: 2차 미분
$\Phi(x,y)$: 랜덤력		

*한국과학기술원 기계공학과
 **정회원, 한국과학기술원 기계공학과

1. 서 론

컴퓨터 용량이 커지고 계산 비용이 감소함에 따라서 어떤 이상적인 난류 유동장을 지배하는 Navier-Stokes 방정식을 직접 수치적으로 푸는 것이 가능하게 되었다. 그러나 이와같은 경우 수많은 수치적인 계산 결과를 물리적으로 해석하는 것이 어려운 문제로 남게 되었으며, 이와같은 거대한 양의 데이터를 분석하기 위한 체계적인 방법의 필요성이 대두되었다. 특히 계산영역에서 모든 순간 속도분포로부터 난류유동장의 난류구조를 해석하고 그 유동장의 시간에 따른 난류구조를 얻기 위해서는 가장 빨리 수렴하는 직교함수가 필요하다.

1967년에 Lumley⁽¹⁻³⁾는 순간속도 난류유동장에서 얻은 평균속도 상관관계를 이용하여 난류구조를 해석하는 방법으로서 특성에디 분해법(characteristic eddy decomposition)을 처음으로 제안하였다. 이와같이 특성에디 분해법은 수치적인 계산 데이터를 이용하여 난류유동장의 구조를 분석하는 방법으로 최근에 활발한 연구가 진행되고 있다. 그 중에서도 특히 비등질성의 난류유동장을 잘 나타내는 것을 Karhunen-Loeve전개(이하 $K-L$ 전개로 줄여서 씀)에 대한 관심이 고조되고 있다.

Moin⁽⁴⁾과 Sirovich⁽⁵⁾는 2차원 채널유동에 대한 수치적인 계산 데이터를 가지고 해석한 결과 $K-L$ 전개를 적용하는 Lumley의 특성에디 분해법이 수많은 수치적인 계산 데이터로부터 난류구조를 해석하는데 가장 좋은 방법이라는 것을 보여주었다. 또한 Aubry등⁽⁶⁾은 난류경계층의 벽 근처에서 난류구조를 해석하기 위하여 $K-L$ 전개를 이용하였다.

최근에 Chambers등⁽⁷⁾은 비등질성 랜덤 난류유동장에서 수치적으로 계산하여 얻은 평균속도 상관관계를 이용하여 $K-L$ 전개의 특성을 자세히 조사하였다. 이때 난류모델은 랜덤력을 갖는 1차원 Burgers 방정식에서 수치적으로 계산하여 얻었다. 그들은 이것을 이용하여 비등질성의 난류 유동장에서 서로 다른 레이놀즈 수에 대하여 $K-L$ 전개의 영향, 난류길이척도의 성질 그리고 $K-L$ 전개의 수렴성등을 체계적으로 연구하였다. 그 결과 $K-L$ 전개의 고유함수(eigenfunction)는 벽 근처에서 얇은 경계층의 구조를 가지고 있으며, 중간 영역(outer region)에서는 레이놀즈 수에 무관한 난류구조를 이루고 있다는 것을 보여 주었다. 즉 이 영

역에서는 레이놀즈 상사성이 존재하였다. 또한 고유치(eigenvalue)인 스펙트럼은 처음 몇개의 고유값에서 대부분의 에너지를 포함하고 있다는 것을 발견했다. 그리고 총에너지의 90%에 도달하는데 필요한 $K-L$ 전개항의 수는 레이놀즈 수가 클수록 증가함을 보여주었는데 예를들면 $Re=1654$ 일때 6개, $Re=6616$ 일때 9개항이 필요하였다.

본 논문에서는 임의의 순간에서 난류유동장의 난류구조를 해석하기 위하여 Lumley의 특성 에디 분해법을 이용하였다. 이때 난류구조의 해석은 비등질성의 $K-L$ 전개와 등질성의 푸리에 전개로 표현하여 그 수렴성, 레이놀즈 수의 영향등 여러가지 특성을 연구하였다. 본 연구에서 선정한 비등질성 난류유동장은 Chambers등⁽⁶⁾이 연구한 랜덤력을 갖는 Burgers 방정식을 수치적으로 풀어서 얻었다. 이와같은 난류유동장을 $K-L$ 전개와 푸리에 전개로 표현할 때에 수렴성은 레이놀즈 수가 서로 다르고 또한 전개항의 수가 다를 때에 RMS 오차를 가지고 비교하였다. 여기서 푸리에 전개 계수들은 Galerkin 방법으로 구하였다.

2. 본 론

2.1 Burgers 난류모델

비등질성 난류유동장을 얻기 위해서는 비등질성을 강하게 나타내는 난류모델이 필요하다. Burgers 방정식은 레이놀즈 수가 큰 경우 초기조건 및 경계조건에 따라서 벽면근처 혹은 내부영역에서 강력한 비등질성층(shock layer)을 가지고 있다. 그러나 초기치 문제(initial value problem)로서 Burgers 방정식은 시간이 지날수록 소멸되는 성질을 가지고 있다. 따라서 임의의 정지된 난류장(stationary random turbulent field)을 얻기 위해서는 이 소멸항을 보완하는 생성항을 인위적으로 만들어야 한다. 이를 위하여 랜덤력(random forcing)을 생성시켜 수치계산을 수행함으로써 Burgers 난류유동장을 얻는다. 랜덤력을 가지는 Burgers 방정식의 수치적인 해는 Chambers등⁽⁷⁾에 의하여 연구되었으며 무차원화된 방정식과 경계조건 및 초기조건은 다음과 같다.

$$u_t + uu_x = \frac{1}{Re} u_{xx} + \Phi(x, t) \quad (1)$$

$$\langle \Phi^2(x, t) \rangle = 1 \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (3)$$

$$u(x,0)=0 \quad (4)$$

여기서 $u(x,t)$ 는 순간속도, Re 는 레이놀즈 수이다. 그리고 $\Phi(x,t)$ 는 랜덤력으로 어떤 주어진 조건을 만족하는 푸리에 계수로서 구성되며, 이에 대한 자세한 유도과정 및 결과 분석은 Chambers등⁽⁷⁾에 언급되어 있다. 이와 비슷한 형태의 랜덤력 구성은 Hoskawa와 Yamamoto⁽⁸⁾에 의하여 1975년에 시도된 바 있으며, 랜덤수(white noise)의 발생은 컴퓨터에서 쉽게 얻을 수 있다.

방정식(1)을 풀기위한 수치적인 방법은 예측수정 시간 단계법(predictor-corrector time stepping scheme)으로 방정식의 세트(set)가 많은 경우 수치적인 해의 안정성이 비교적 좋다⁽²⁾. 본 연구에서는 Chambers등⁽⁷⁾이 사용한 동일한 방법으로 Burgers 난류유동장을 수치적으로 구하였으며(CRAY-2) 평균 공간속도 상관관계(ensemble average of spatial velocity correlation)를 얻기 위하여 반복횟수를 40960회 이상 수행하였다.

2.2 Karhunen-Loeve전개

$K-L$ 전개는 실제치와 전개 평균치와의 오차를 평균자승하는 의미에서 평균자승오차(mean square error)를 최소화 하고, 어떤 랜덤장에서 직교성을 만족하는 기본함수로서 표현하는 가장 일반적인 푸리에 전개의 일종이다. 따라서, $K-L$ 전개로 어떤 유한영역내의 랜덤장을 나타내는 하나의 방법으로 사용되며 그 고유치와 선형 결합으로 나타낼 수 있다. 만일 직교함수가 기존의 잘 알려진 푸리에 모우드(sine 또는 cosine 함수)일 경우 $K-L$ 전개는 바로 푸리에 전개가 되며 이때 $K-L$ 전개는 푸리에 전개를 포함하고 있다. 이와 같은 일반적인 $K-L$ 전개는 다음과 같이 표시된다.

임의의 순간속도장 $u(x,t)$ 는 일반적인 푸리에 전개로서

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \varphi_n(x) \quad (5)$$

로 표시되며, 이 경우 $a_n(t)$ 는 일반적인 푸리에 계수로서 다음과 같이 주어진다.

$$a_n(t) = \int_0^1 u(x,t) \varphi_n(x) dx \quad (6)$$

여기서 $\varphi_n(x)$ 는 n 번째의 직교함수로서 이는 다음과 같이 직교성(orthonormality)을 만족한다.

$$\int_0^1 \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (7)$$

여기서 δ_{mn} 는 Kronecker 델타 함수이다. 만일 u_N

(x,t) 을 N 항까지 구성된 부분 합(전개평균치)이라고 하면 실제치인 $u(x,t)$ 와 전개평균치인 $u_N(x,t)$ 의 평균자승 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$e_N \equiv \int_0^1 \langle [u(x,t) - u_N(x,t)]^2 \rangle dx \quad (8)$$

여기서 직교성을 만족하는 $\varphi_n(x)$ 을 구하기 위하여 평균자승오차 e_N 이 최소화되도록 변분법(calculus of variation)을 적용하면 고유치 문제(eigenvalue problem)로 바뀌게 되어^(1,4), 다음과 같은 제 2종의 Fredholm 적분방정식을 얻게된다.

$$\int_0^1 R(x,x') \varphi_n(x') dx' = \lambda_n \varphi_n(x) \quad (9)$$

여기서 $R(x,x') = \langle u(x)u(x') \rangle$ 은 난류유동장에서 거리속도 상관관계(spatial velocity correlation)의 ensemble평균이다. 이때 직포함수 $\varphi_n(x)$ 는 $K-L$ 전개의 기본함수로서 고유치인 λ_n 과 1:1 대응된다. 적분방정식에 있는 $R(x,x')$ 은 Kerner로서 Hilbert-Schmidt이론에 의하여 해가 존재하며 x, x' 에 대하여 대칭이고 양의 함수이다⁽⁹⁾. 또한 Mercer이론에 의하여 $R(x,x')$ 은 직교성을 이용하면 고유치와 고유함수의 단순 전개로 다음과 같이 표현할 수 있다⁽⁹⁾.

$$R(x,x') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \varphi_n(x') \quad (10)$$

여기서 고유치인 λ_n 은 방정식(5)에 있는 전개계수 $a_n(t)$ 의 평균자승과 같으며, 전개계수 $a_n(t)$ 는 상호 상관관계가 없는(mutually uncorrelated) 2차 랜덤 변수이다.

$$\langle a_m a_n \rangle = \lambda_n \delta_{mn} \quad (11)$$

고유치와 고유함수를 구하기 위하여 제2종의 Fredholm 적분방정식을 풀어야 한다. 이때 적분방정식은 사다리꼴 공식을 이용하여 풀었으며 이 때에 고유함수 값은 Burgers 방정식의 해를 구한 것과 같은 격자점에서 구하였다⁽⁷⁾. Burgers난류유동장에서 수치계산하여 얻은 $R(x,y)$ 을 이용하여 고유치와 고유함수를 구할 수 있는데, 여기서 고유함수는 Burgers 난류유동장의 난류구조(coherent structure)를 나타내고 고유치는 그 구조에 대한 난류운동에너지를 의미한다.

2.3 푸리에 전개(Galerkin 접근)

$K-L$ 전개는 평균자승의 의미에서 보면 Burgers 방정식의 비등질성 난류유동장을 가장 잘 나타내는 전개라고 할 수 있다. 이때 $K-L$ 전개에서 구한 고유함수와 고유치를 이용하면 Burgers 난류유동

장의 구조해석, 레이놀즈의 영향, 전개의 수렴도 그리고 난류의 길이척도해석등 많은 정보를 얻을 수 있다⁷⁾. 그러나 이 고유치와 고유함수를 얻기위해서는 많은 노력이 필요함을 알 수 있다. 그러므로 기존의 잘 알려진 직교함수인 푸리에 모우드 (Fourier mode)를 사용하여 Burgers 방정식을 풀어 보면 K - L 전개와 푸리에 전개와의 수렴도 및 다른 특성을 비교할 수 있다. 이를 위하여 가장 일반적인 푸리에 전개를 이용하여 Galerkin 방법으로 Burgers 방정식을 해석하여 보면 다음과 같다.

일반적인 푸리에 전개는 유한영역 $\{0,1\}$ 에서 푸리에 모우드 (sine함수)로 구성되어 있다고 있다고 하면 다음과 같이 표시한다.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \phi_n(x) \quad (12)$$

여기서 $\phi_n = A \sin(n\pi x)$ 로 표시할 수 있으며 A 는 계수이다. 위의 방정식에 있는 푸리에 계수들을 구하기 위하여 랜덤력을 갖는 Burgers 방정식에 대입하면 그 전개계수에 대하여 다음과 같은 시간중속 상미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \phi_n(x) \right]_t + \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_m(t) \phi_m(x) \right] \\ & \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \phi_n(x) \right]_x = \frac{1}{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \phi_n(x) \right]_{xx} \\ & + \Phi(x,t) \end{aligned} \quad (13)$$

위의 방정식은 푸리에 전개계수 $c_n(t)$ 에 대해서 아래와 같은 방정식이 된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dc_n(t)}{dt} \phi_n(x) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m(t) c_n(t) \phi_m(x) \frac{d\phi_n(x)}{dx} \\ & = \frac{1}{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} + \Phi(x,t) \end{aligned} \quad (14)$$

위의 방정식에 $\phi_k(x)$ 를 곱하고 유한 영역내 ($0 \leq x \leq 1$)에서 x 에 대하여 적분하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dc_n(t)}{dt} \int_0^1 \phi_k(x) \phi_n(x) dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) c_n(t) \int_0^1 \phi_k(x) \phi_m(x) \frac{d\phi_n(x)}{dx} dx \\ & = \frac{1}{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \int_0^1 \phi_k(x) \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} dx \\ & + \int_0^1 \phi_k(x) \Phi(x,t) dx \end{aligned} \quad (15)$$

또한 방정식 (7)에 있는 함수의 직교성을 이용하면 위의 방정식은 간결하게 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dc_n(t)}{dt} \delta_{kn} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m(t) c_n(t) B_{kmn}(x) \\ & = \frac{1}{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) D_{kn}(x) + S_k(x,t) \end{aligned} \quad (16)$$

위의 방정식을 다시 이항정리하면 최종적으로 다음과 같은 시간중속 상미분 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{dc_k(t)}{dt} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m(t) c_n(t) B_{kmn}(x) \\ & + \frac{1}{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) D_{kn}(x) + S_k(x,t) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$B_{kmn}(x) = \int_0^1 \phi_k(x) \phi_m(x) \frac{d\phi_n(x)}{dx} dx \quad (18)$$

$$D_{kn}(x) = \int_0^1 \phi_k(x) \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} dx \quad (19)$$

$$S_k(x,t) = \int_0^1 \phi_k(x) \Phi(x,t) dx \quad (20)$$

따라서 위의 방정식은 푸리에 전개계수에 대한 다음과 같은 일반적인 형태의 상미분 방정식이 된다.

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = F(c_n,t) \quad (21)$$

위의 방정식은 3차 Runge-Kutta법을 적용하여 푸리에 전개계수를 구할 수 있으며 B_{kmn} , D_{kn} , S_k 의 계수들은 비등간격 격자에 대한 사다리꼴 적분공식을 적용하여 구하였다.

3. 결과 및 검토

공간 영역(space domain)내에서 어떤 랜덤 프로세스는 K - L 전개와 푸리에 전개로 표현할 수 있다. 여기서 K - L 전개는 고유치문제를 풀어야 하며, 푸리에 전개는 기존의 알려진 푸리에 모우드를 사용함을 말해준다. K - L 전개는 비등질성 난류유동장을 표현할 때 평균자승오차를 최소화 하였기 때문에 가장 빨리 수렴한다. 그 수렴성을 보여주기 위하여 Galerkin 방법에 의하여 Burgers 난류유동장을 해석한 일반적인 푸리에 전개 계수를 구하였다. 여기서 K - L 전개는 직교성을 만족하는 고유의 함수를 가지고 있으며 푸리에 전개는 일반적인 sine 혹은 cosine함수이다.

Fig. 1은 랜덤력을 갖는 Burgers 방정식에 의하여 수치적으로 얻은 Burgers 난류유동장의 해를 서로 다른 레이놀즈 수 ($Re=413.5, 1654, 6616$)에 대하여 보여준 것이다. 레이놀즈 수가 작은 경우 ($Re=413.5$)는 충격파(internal shock)를 발견할 수 없지만, 레이놀즈 수가 증가하면 ($Re=1654$,

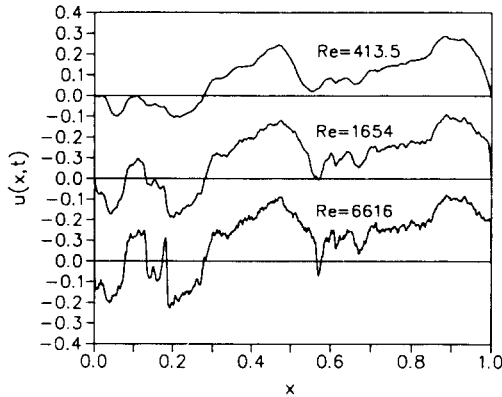


Fig. 1 A sample solution to Burgers' equation with random forcing

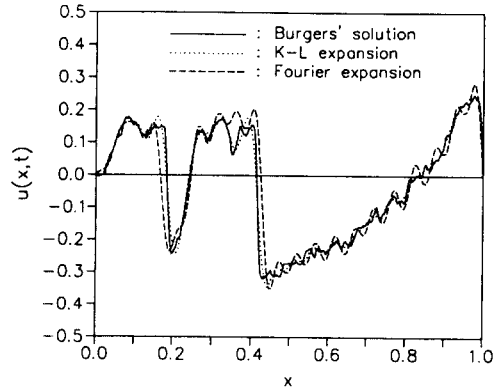


Fig. 3 The comparison between the $K-L$ expansion and the Fourier expansion of $u(x,t)$ at $t=1$ & $Re=1654$ with $n=40$

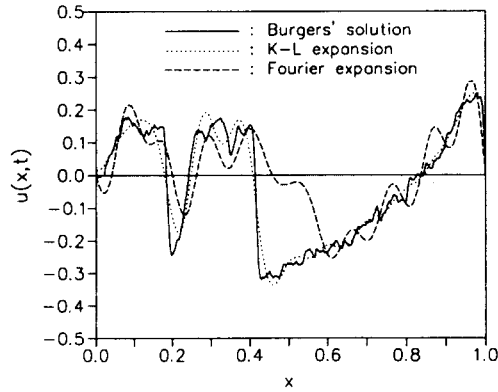


Fig. 2 The comparison between the $K-L$ expansion and the Fourier expansion of $u(x,t)$ at $t=1$ & $Re=1654$ with $n=20$

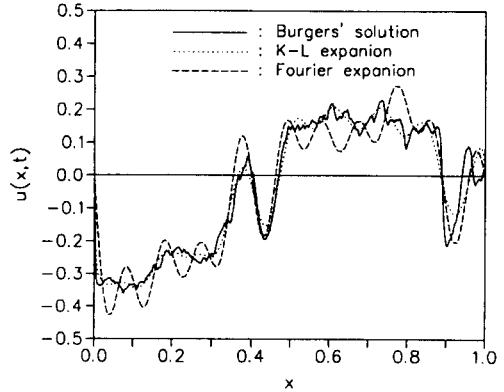


Fig. 4 The comparison between the $K-L$ expansion and the Fourier expansion of $u(x,t)$ at $t=2$ & $Re=1654$ with $n=20$

6616) 충격파가 발생한다. 이때 내부영역내에서 계속 발생하는 충격파는 평균속도를 가지고 벽쪽으로 움직이다가 벽면을 만날 경우 갇히게되어 경계충을 형성하게 된다. 그 두께는 $1/Re$ 정도의 크기 (order)이다. 그러므로 $Re=413.5$ 일때는 $Re=6616$ 일때보다 벽면에서 보다 두꺼운 경계층이 형성됨을 알 수 있다. 이와같은 비등질성의 충격파가 레이놀즈 수가 큰 난류유동장인 경우 계속해서 발생되므로 등질성인 푸리에 전개보다 비등질성인 $K-L$ 전개가 더욱 필요하게 된다.

Fig. 2는 랜덤력은 갖는 Burgers 방정식을 수치적으로 풀어서 얻은 비등질성 난류유동장을 $K-L$ 전개와 푸리에 전개로 표현할 때에 그 수렴성을 비교한 것이다. Burgers 방정식의 해는 레이놀즈 수가 1654이고 어떤 시간($t=1$)일때 얻은 하

나의 보기(sample)이며, $K-L$ 전개와 푸리에 전개는 각각 20개의 항까지($n=20$) 부분합을 한 것이다. 그림에서 보여준 바와같이 공간영역 내부에서 충격파가 발생한 영역($x=0.4$ 근처)에서는 푸리에 전개는 수렴정도가 상당히 느리다. 그러나 전개항의 수가 증가할 때는($n=40$) Burgers 방정식의 해와 어느정도 일치함을 보여준 것이 Fig. 3이다. 전개항의 수를 증가시키면 약한 충격파(weak shock)가 발생한 구간에서 $K-L$ 전개나 푸리에 전개의 차이는 크지 않다. 이것은 전개항이 많을수록 진동수가 높은(high wavenumber) 고유함수를 포함하기 때문이다.

Fig. 4는 시간이 증가할 때에($t=2$) $K-L$ 전개와 푸리에 전개를 같은 레이놀즈 수에 대하여 비교한 것이다. 이때 $K-L$ 전개는 푸리에 전개보다 더 빠

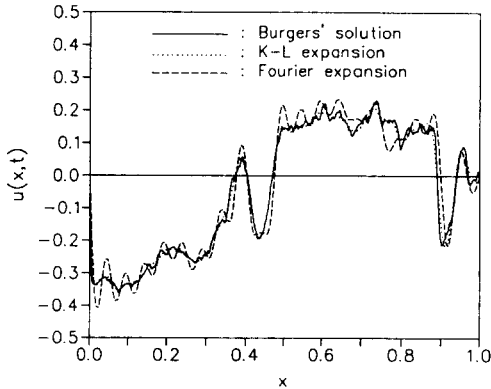


Fig. 5 The comparison between the $K-L$ expansion and the Fourier expansion of $u(x,t)$ at $t=2$ & $Re=1654$ with $n=40$

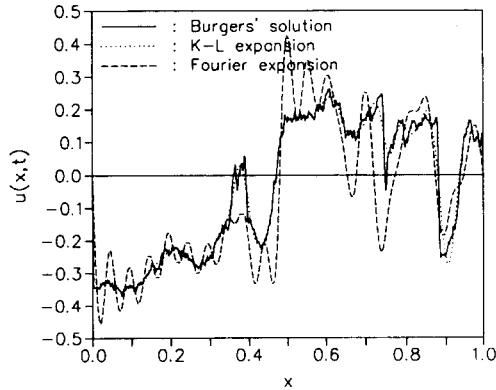


Fig. 6 The comparison between the $K-L$ expansion and the Fourier expansion of $u(x,t)$ at $t=2$ & $Re=6616$ with $n=40$

리 수렴한 것을 알 수 있다.

Figs. 5와 6은 레이놀즈 수가 증가할 때에 $K-L$ 전개와 푸리에 전개를 비교한 것이다. 이때 Burgers 방정식의 해는 레이놀즈 수가 각각 1654와 6616 이고, 같은 조건 ($t=2.0$, $n=40$) 일때 얻은 하나의 보기이다. 그림에서 본 바와같이 레이놀즈 수가 클때 강한 충격파가 발생하는데 이것은 Burgers 방정식의 특성이며 푸리에 전개는 상당히 불안정하다. 따라서 레이놀즈 수가 큰 비등질성 난류유동장을 푸리에 전개로 표현할 때는 전개항 수를 많이 해야한다. 특히 $K-L$ 전개는 균일 수렴성(uniform convergence)을 가지고 있지만 푸리에 전개는 큰 비등질성인 경우 고유의 Gibbs현상을 보여주고 있다.

Table 1 The comparison of RMS between the $K-L$ expansion and the Fourier expansion for $Re=1654$

#of term	RMS Error for $Re=1654$			
	$t=1.0$		$t=2.0$	
	$K-L$ expansion	Fourier expansion	$K-L$ expansion	Fourier expansion
10	1.3	4.3	1.3	2.9
20	0.9	2.8	0.9	1.6
40	0.5	1.3	0.4	1.0

Table 2 The comparison of RMS between the $K-L$ expansion and the Fourier expansion for $Re=6616$

#of term	RMS Error for $Re=1654$			
	$t=1.0$		$t=2.0$	
	$K-L$ expansion	Fourier expansion	$K-L$ expansion	Fourier expansion
10	1.6	6.8	1.6	7.0
20	1.2	5.1	1.1	5.2
40	0.8	4.5	0.7	2.7

Tables 1과 2는 레이놀즈 수와 전개항의 수에 따른 RMS(root mean-square) 오차를 비교한 것이다. 이때 RMS 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$RMS \text{ 오차} = \sqrt{\sum_{n=1}^n [u(x,t) - u_n(x,t)]^2}$$

여기서 n 은 전개항의 수이며 무한대 값을 가질 수 있다.

Tables에서 본 바와 같이 $K-L$ 전개에 의한 RMS 오차는 레이놀즈 수와 전개 항의 수에 관계 없이 푸리에 전개보다 항상 더 적다. 그러나 두 전개의 RMS 오차는 레이놀즈 수가 증가하면 커지기 때문에 푸리에 전개로 레이놀즈 수가 큰 비등질성 난류유동장을 표현할 때는 전개항의 수를 많이 해야한다. 따라서 $K-L$ 전개는 이와같은 난류 유동장을 표현할 때에 가장 빨리 수렴함을 발견할 수 있다.

4. 결 론

랜덤력을 갖는 Burgers 방정식을 수치적으로 풀어서 얻는 비등질성 1차원 난류유동장을 $K-L$ 전

개와 푸리에 전개로 표현하여 수렴성을 비교하였다. $K-L$ 전개의 기본함수는 Fredholm 적분방정식을 고유치 문제로 풀어서 얻었고, 푸리에 전개계수는 Gaerkin 방법을 이용하여 구하였다.

비등질성 난류유동장을 표현하는 $K-L$ 전개의 RMS 오차는 레이놀즈 수가 증가함에 따라 커지고 전개항의 수가 클수록 적어진다. $K-L$ 전개와 푸리에 전개의 RMS 오차는 레이놀즈 수가 증가할수록 커진다. 따라서 레이놀즈 수가 큰 비등질성 난류유동장은 $K-L$ 전개가 가장 빨리 수렴하며, 푸리에 전개로 표현할 경우 $K-L$ 보다 더 많은 항을 필요로 한다.

참 고 문 헌

- (1) Lumley, J. L., 1981, "Stochastic Tools in Turbulence", Academic Press, New York, pp. 80~82, 113~121.
- (2) Bakewell, H.P. and Lumley, J.L., 1967, "Viscous Sublayer and Adjacent Wall Region in Turbulent Pipe Flow", Physics of Fluids, Vol. 10, pp. 1880~1889.
- (3) Payne, F.R., and Lumley, J.L., 1967, "Large Eddy Structures of the Turbulent Wake behind a Circular Cylinder", Physics of Fluids, Vol. 10, S1946.
- (4) Moin, P. 1984, "Probing Turbulence by Large Eddy Simulation", AIAA-84-0174.
- (5) Sirovich, L., 1987, "Turbulence and The Dynamics of Coherent Structures Part I : Coherent Structures", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XLV, Number 3, pp. 573~582.
- (6) Aubry, N., Holesms, P., Lumley, J.L., and Stone, E., 1988, "The Dynamics of Coherent Structures in the Wall Region of a Turbulent Boundary Layer", J. Fluid Mechanics, Vol. 192, pp. 115~173.
- (7) Chambers, G.H., Adrian, R.J., Moin, P., and Sung, H.J., 1988, "Karhunen-Loeve Expansion of Burgers' Model of Turbulence", Vol. 31(9), pp. 2573~2582.
- (8) Jeng, D.T., 1967, "Forced Model Equation for Turbulence", Physics of Fluids, Vol. 12(10), pp. 2006~2010.
- (9) Hildebrand, F.B., 1965, Methods of Applied Mathematics, second ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.Y.
- (10) Glauser, M.N., Leib, S.J., and George, W.K., 1986, "Coherent Structure in the Axisymmetric Turbulent Jet Mixing Layer", Proceedings of the 5th Turbulent Shear Flow Symposium, Cornell, New York, pp. 4.12~4.26.
- (11) Long, D.F., and Arndt, R.E.A., 1986, "The Orthogonal Decomposition of Pressure Fluctuation Surrounding a Turbulent Jet", Proceedings of the 5th Turbulent Shear Flow Symposium, Cornell, New York, pp. 4.27~4.32.