

〈論 文〉

# 유한요소법을 이용한 집중하중을 받는 임의단면형상부재에서 응력집중현상과 소멸현상에 관한 연구

최종근\* · 이종재\*\* · 김동현\*\*\*

(1990년 4월 25일 접수)

## A Study on the Stress Concentration and Diminishing in Structural Member with Arbitrary Section Using Finite Element Method

Jong-Geun Choi, Chong-Jae Lee and Dong-Hyun Kim

**Key Words :** Energy Orthogonal Functions(에너지 직교함수), Stress Concentration Effect(응력집중효과), Loading Area(하중작용면적), Stress Function(응력함수)

### Abstract

It is shown that the performance of finite element based on energy orthogonal functions may be superior to conventional formulation for plane stress problem. Using this finite element, it is then attempted to show the distribution of stress concentration effect for subsurface under loading point. It turned out that the stress concentration effect for subsurface is not dependent on the width of the member but the loading area. And then it is shown that the solution attained by taking the stress function as a Fourier series is not satisfactory in  $y < 0, 1B$ .

### 1. 서 론

대부분의 기계나 구조물은 구성요소의 결합으로 접촉면을 형성하고 힘과 모멘트의 전달로 접촉영역에서 국부적인 응력집중현상을 유발한다. 접촉문제의 출발은 1882년 Hertz<sup>(1)</sup>가 포면이 매끄러운 2차 곡면을 가진 두개의 등방성 탄성체가 마찰을 무시한 수직하중을 받을때의 접촉문제를 해석하여 접촉면적, 접촉응력분포 및 탄성체의 변위를 구한 것이다.

그후 많은 학자들이 이 문제를 계속하여 연구하였는데 탄성체의 변위에 따른 접촉면적의 변화와 그에 따른 접촉응력의 분포에 관한 연구가 주된

연구대상이었다.

본 연구에서는 위와같이 접촉표면에서의 압력이 일정한 영역에 걸쳐서 집중하중형태로나 분포하중의 형태로 작용할 때 유한한 부재(subsurface)내의 응력집중의 크기와 하중작용점에서 멀어짐에 따라 응력집중이 어떻게 소멸되는가에 대하여 유한요소법을 이용하여 고찰하고자 한다.

집중하중부근에서의 응력분포는 1892년 Boussinesq<sup>(2)</sup>가 반무한판(semi infinite plate)에 대하여 응력함수(stress function)을 극좌표의 증조화함수로 가정하여 해석하였다.

이것은 응력함수의 계수를 반무한판에 대한 경계조건으로 구하였기 때문에 하중작용점 부근에서는 잘 일치하지만 하중작용점에서 멀어지면 유한 부재에 적용하기는 문제점이 있다.

유한부재에 대하여 1890년 Mathiew<sup>(2)</sup>가 2차원 평면응력문제의 사각형보에 대하여 응력함수를

\* 정회원, 한양대학교 대학원

\*\* 정회원, 수원공업전문대학 기계설계과

\*\*\* 정회원, 원광대학교 공과대학 기계공학과

Fourier급수로 가정하고 하중을 양단전체에 걸친 분포하중의 사인함수(sine function)로 가정하여 해를 구하였다.

하중영역이 작은 경우에 대하여 1903년 Filon<sup>(3)</sup>이 반무한 평행부재(semi-infinite strip)에 대하여 Fourier급수를 이용하여 해를 구하였고 동일한 문제를 1907년 Timpe<sup>(4)</sup>가 해석하였다.

1959년과 1964년에 Theocaris<sup>(3,4)</sup>는 반무한 평행부재(Semi-infinite strip)와 사각형부재(rectangular bar)에 대하여 Fourier급수를 이용하여 응력분포를 구하였다.

그러나 이들 응력함수를 Fourier급수로 가정하여 구한 값들은 하중작용점에서 아주 가까운 부근에서는 잘못지 않는 것으로 알려져 있다<sup>(2)</sup>.

본 논문의 연구목적은 평면응력 및 평면변형률 문제의 유한요소법해석에 있어서 기존의 면적좌표를 이용한 삼각형요소나 4절점 isoparametric 사변형요소보다도 정확도가 높은 에너지 직교함수(energy orthogonal function)에 의한 사변형요소를 개발하고 이 유한요소 프로그램을 이용하여 사각형 부재내의 집중하중과 분포하중에 의한 응력집중현상과 소멸현상을 고찰하는데 있다.

본 연구에서 작성된 에너지 직교함수(energy orthogonal function)에 의한 유한요소 프로그램은 기존의 요소보다 높은 정확도와 수렴성을 지니고 있어 베어링의 접촉문제해석, 치차해석, 등의 평면응력 및 평면변형률의 구조해석문제에 정확한 해석결과를 제시하여 설계에 응용할 수 있을 것이다.

## 2. 이 론

2.1 에너지 직교함수에 의한 유한요소 강성행렬 임의 유한요소의 변위장은

$$u = N_{rc}q_{rc} \tag{1}$$

과 같이 쓸 수 있고 절점좌표를 대입하여 절점변위와 관계를 지으면

$$v = G_{rc}q_{rc} \tag{2}$$

로 표시된다.

요소 강성행렬에 수렴조건을 구속시킨 선형구속방정식<sup>(6)</sup>은

$$KG_{rc} = P_{rc} \tag{3}$$

과 같이 쓸 수 있다.

강성행렬을 rc-모드(rigid body, constant strain mode)와 h-모드(higher order mode)로 표시하면

$$K = K_{rc} + K_h \tag{4}$$

로되고 식 (3)은 다음의 두 방정식으로 표시된다.

$$K_{rc}G_{rc} = P_{rc} \tag{5}$$

$$K_h G_{rc} = 0 \tag{6}$$

h-모우드를 포함한 유한요소의 변위장은 아래와 같고

$$u = Nq = N_{rc}q_{rc} + N_h q_h \tag{7}$$

절점변위와 관계를 지으면

$$v = Gq = G_{rc}q_{rc} + G_h q_h \tag{8}$$

과 같다.

각 모드가 선형적으로 독립이라면 식 (8)의 역행렬은 존재하고

$$q = G^{-1}v = \begin{bmatrix} H_{rc} \\ H_h \end{bmatrix} v \tag{9}$$

으로 쓸 수 있다.

식 (8)과 (9)에서

$$\begin{aligned} H_{rc}G_{rc} &= I, & H_h G_h &= I \\ H_{rc}G_h &= 0, & H_h G_{rc} &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

의 관계식을 얻을 수 있다.

식 (5)에서

$$K_{rc} = P_{rc}H_{rc} \tag{11}$$

를 얻고 대칭행렬이기 위한 조건으로 직교행렬 G를 이용한다.

$$\begin{aligned} G^T K_{rc} G &= \begin{bmatrix} G_{rc}^T K_{rc} G_{rc} & G_{rc}^T K_{rc} G_h \\ G_h^T K_{rc} G_{rc} & G_h^T K_{rc} G_h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{rc}^T P_{rc} & 0 \\ G_h^T P_{rc} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

절점력에 의한 외부일과 내부에너지의 동가원리로  $G_{rc}^T P_{rc}$ ,  $G_h^T P_{rc}$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} W_e &= \delta V^T T_{rc} = \delta V^T P_{rc} q_{rc} \\ &= \delta q_{rc}^T G_{rc}^T P_{rc} q_{rc} + \delta q_h^T G_h^T P_{rc} q_{rc} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} W_i &= \int_V \delta \epsilon^T \sigma_{rc} dV \\ &= \delta q^T \int_V (\Delta N)^T C (\Delta N_{rc}) dV q_{rc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \delta q_{rc}^T \int_V (\Delta N_{rc})^T C (\Delta N_{rc}) dV q_{rc} \\
 &+ \delta q_h^T \int_V (\Delta N_h) C (\Delta N_{rc}) dV q_{rc} \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서  $C$ 는 구성행렬(constitution matrix)이다. 식 (13) = (14)에서 다음을 얻을 수 있다.

$$G_{rc}^T P_{rc} = \int_V (\Delta N_{rc})^T C (\Delta N_{rc}) dV \quad (15)$$

$$G_h^T P_{rc} = \int_V (\Delta N_h) C (\Delta N_{rc}) dV \quad (16)$$

식 (12)이 대칭행렬이기 위하여  $G_h^T P_{rc} = 0$ 이어야 하고 이것이  $rc$ -모드와  $h$ -모드 사이의 에너지 직교성(energy orthogonality)을 의미한다.

식 (11)을 변형하면

$$\begin{aligned}
 K_{rc} &= P_{rc} H_{rc} \\
 &= (G_{rc} G_{rc}^{-1})^T P_{rc} H_{rc} \\
 &= H_{rc}^T G_{rc}^T P_{rc} H_{rc} \\
 &= H_{rc}^T K_{qrc} H_{rc} \quad (17)
 \end{aligned}$$

여기서  $K_{qrc} = G_{rc}^T P_{rc}$ 이다.

$h$ -모드 강성행렬은  $K_h G_{rc} = 0$ 을 만족해야 하고 식 (10)으로부터

$$K_h = H_h^T K_{qh} H_h \quad (18)$$

와 같이 표현할 수 있다.  $h$ -모드( $q_{rc} = 0, q_h = 0$ )에서 강성행렬에서 계산된 에너지와 변위장에서 계산된 에너지가 동가이어야 한다는 조건으로 아래와 같이  $K_{qh}$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U_h &= \frac{1}{2} V^T K V = (U)_{rc\text{모드}} + (U)_{h\text{모드}} \\
 &= \frac{1}{2} q_h^T G_h^T K_{rc} G_h q_h + \frac{1}{2} q_h^T G_h^T K_h G_h q_h \\
 &= \frac{1}{2} q_h^T K_{qh} q_h \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_h &= \frac{1}{2} \int_V (\Delta u)^T C (\Delta u) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V q_h^T (\Delta N_h)^T C (\Delta N_h) dV q_h \quad (20)
 \end{aligned}$$

식 (19) = (20)에서

$$K_{qh} = \int_V (\Delta N_h)^T C (\Delta N_h) dV \quad (21)$$

따라서 요소강성행렬은 아래와 같이 기술된다.

$$K = K_{rc} + K_h = H_{rc}^T K_{qrc} H_{rc} + H_h^T K_{qh} H_h \quad (22)$$

여기서  $K_{qrc}, K_{qh}$ 는 아래와 같다.

$$K_{qrc} = \int_V (\Delta N_{rc})^T C (\Delta N_{rc}) dV$$

$$K_{qh} = \int_V (\Delta N_h)^T C (\Delta N_h) dV$$

요소강성행렬을 이용한 변위, 변형률, 응력의 산출은 다음과 같다.

요소강성행렬과 변위벡터와 힘벡터 사이의 관계식

$$K V = F \quad (23)$$

에서 변위를 구하고 이를 이용하여 식 (8)에서의 계수벡터  $q$ 를

$$\begin{aligned}
 q &= G^{-1} V \\
 \begin{bmatrix} H_{rc} \\ H_h \end{bmatrix} V & \quad (24)
 \end{aligned}$$

에서 구한다.

변형률은 식 (7)에서

$$\delta = \Delta u = \Delta N q \quad (25)$$

에서 구하고 응력은

$$\sigma = C \epsilon \quad (26)$$

에서 구한다.

## 2.2 평면응력 및 평면변형률 문제에의 사변형요소의 적용

변위장의 가정을  $u = N q$ 에서

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= [N] \{q\} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & \vdots & x & 0 & y & \vdots & xy & -\frac{1}{2}y^2 \\ 0 & 1 & x & \vdots & 0 & y & x & \vdots & -\frac{1}{2}x^2 & xy \end{bmatrix} \{q\} \quad (27)
 \end{aligned}$$

과 같이 한다.

평면응력 문제의 변형률 미분연산자  $\{A\}$ 와 구성행렬  $\{C\}$ 는

$$\{A\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

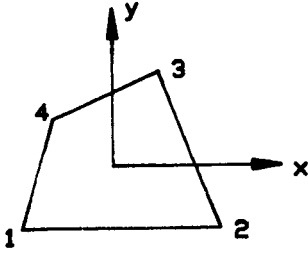


Fig. 1 Four node plane isoparametric element in  $xy$  space

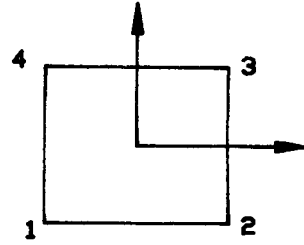


Fig. 2 Four node plane isoparametric element in space

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

이 고 변형률과 응력은

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= [A][N]\{q\} \\ \{\sigma\} &= [C]\{\epsilon\} \end{aligned} \quad (28)$$

과 같다.

임의의 사변형요소의 수치적분을 위해 사상함수(mapping function)과 Jacobian을 이용하여 아래와 같이 강성행렬을 구한다.

Fig. 1과 Fig. 2에서의 사상함수는  $x = N_i x_i$ ,  $y = N_j y_j$ 이며 여기서

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (29)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

와 같이 하고 Jacobin행렬식(determinant)은

$$\det J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \quad (30)$$

와 같이 된다.

요소강성행렬은  $K = H_{rc}^T K_{qrc} H_{rc} + H_h^T K_{qh} H_h$ 에서

$$\begin{aligned} K_{qrc} &= \int_V (\Delta N_{rc})^T C (\Delta N_{rc}) dV \\ &= t (\Delta N_{rc})^T C (\Delta N_{rc}) \int_A \det J d\xi d\eta \\ K_{qh} &= \int_V (\Delta N_h)^T C (\Delta N_h) dV \\ &= t \int_V (\Delta N_h)^T C (\Delta N_h) (\Delta N_h) \det J d\xi d\eta \end{aligned} \quad (31)$$

이 고 1차원 Gauss-Legendre 구적공식(quadrature formula)<sup>(11)</sup>을 이용하여 수치적분이 가능하다.

### 2.3 전산 프로그램 구성

본 논문의 전산 프로그램은 주 프로그램과 14개의 보조프로그램으로 구성되어 있고 프로그램의 구조는 Fig. 3에 나타내었으며 그 개요는 다음과 같다. PDATA에서 물성치, 물성치수, 요소의 수, 질저수, 경계조건 등을 입력한다.

GAUSSP에서 Gauss point의 값을 설정한다.

DMATRIX에서 구성행렬을 평면응력과 평면변형

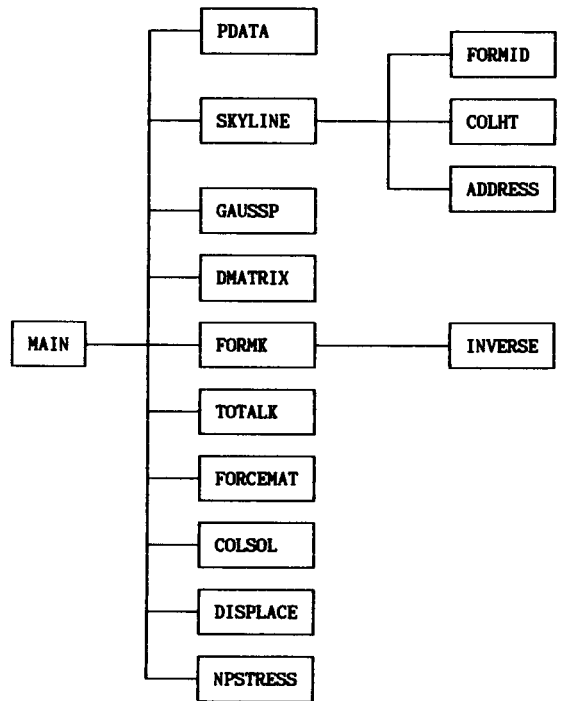


Fig. 3 The program structure

률에 대하여 각각 구성한다.  
 FORMK에서 요소강성행렬을 구성한다.  
 TOTALK에서 요소강성행렬을 계 전체에 대하여 조합한다.  
 FORCEMAT에서 외력벡터를 구성한다.  
 SKYLINE과 COLSOL에서 방정식을 풀고 절점 변위를 구한다.  
 DISPLACE에서 각 요소에 대하여 절점 변위를 재구성하여 이를 이용하여 NPSTRESS에서 각 절점의 응력을 구한다.

### 3. 유한요소 수렴성 평가

본 논문의 에너지 직교성에 의한 유한요소의 수렴성 및 정확성을 평가하기 위하여 Fig. 4와 같은 자중을 무시한 보를 해석하여 일반적으로 널리 사용되고 있는 다른 두요소(PNT4, PNQ4)의 결과와 비교하였다. 여기서 PNT4는 삼각형 요소 4개를 조합하여 가운데 절점을 정적 응축(static condensation)시켜 만든 사변형요소이고<sup>(8,14)</sup> PNQ는 4절점 isoparametric 사변형요소이다<sup>(14)</sup>.

해석모델의 물성치와 물성치수는 프와송비  $\nu = 0.3$ , 탄성계수  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , 보의 폭, 높이, 길이는  $B \times H \times L = 1 \times 10 \times 25 \text{ cm}$ 이고 분포하중  $p = -100 \text{ kg/cm}^2$ .

탄성론에 의한 Fig. 4의 A점의 y방향 변위는 아래와 같다<sup>(9)</sup>.

$$V_A = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PH^2L}{24EI}(4+5\nu)$$

Table 1에 각요소와 요소 수에 따른 A점의 변위를 나타내었다.

Fig. 5에 Table 1에 의한 오차율(% error)를 나타내었다.

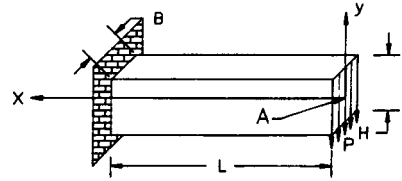


Fig. 4 Geometry of cantilever beam test

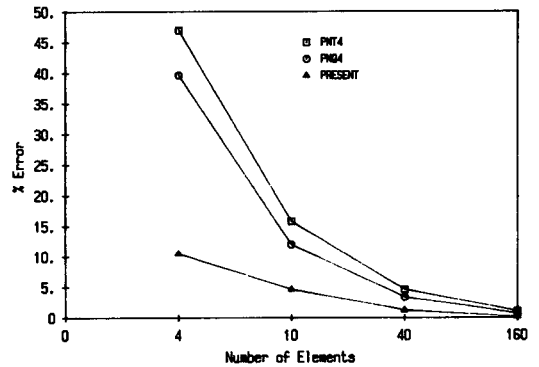


Fig. 5 Percent error of vertical displacement at point A

Table 1과 Fig. 5에서 보듯이 본 논문의 에너지 직교성(energy orthogonality)에 의한 유한요소는 평면응력문제에 있어서 기존의 요소들보다 수렴성이 우수함을 알 수 있다.

### 4. 해석결과 및 검토

#### 4.1 해석 모델

집중하중과 분포하중이 작용하는 부재내의 응력 집중현상을 고찰하기 위하여 앞에서 개발한 유한요소 프로그램을 이용하여 다음과 같은 해석모델에 적용하였다. Fig. 6은 모델의 모양이고 Table 2는

Table 1 Vertical displacement at point A

Element type / Element number	PNT 4	PNQ 4	PRESENT
M4	$0.1752 \times 10^{-2}$	$0.1994 \times 10^{-2}$	$0.2956 \times 10^{-2}$
M10	$0.2779 \times 10^{-2}$	$0.2904 \times 10^{-2}$	$0.3150 \times 10^{-2}$
M40	$0.3150 \times 10^{-2}$	$0.3191 \times 10^{-2}$	$0.3262 \times 10^{-2}$
M160	$0.3268 \times 10^{-2}$	$0.3279 \times 10^{-2}$	$0.3298 \times 10^{-2}$
EXACT SOL.		$0.3303 \times 10^{-2}$	

Table 2 Material properties and size of model

	$B \times H \times t$	Element number	$E$	$\nu$
Model 1	$10 \times 30 \times 1$	300	$2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$	0.3
Model 2	$20 \times 30 \times 1$	600	$2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$	0.3
Model 3	$30 \times 30 \times 1$	900	$2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$	0.3
Model 4	$40 \times 30 \times 1$	1200	$2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$	0.3

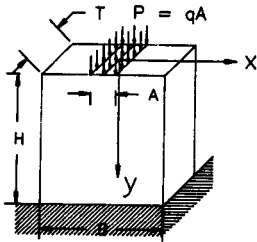


Fig. 6 Geometry of the model

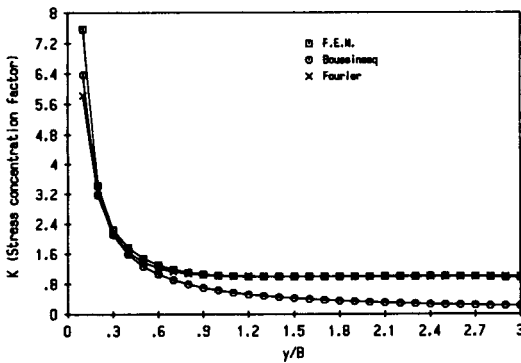


Fig. 7 Stress concentration factor for  $y/B$  under concentrated load (model 1,  $B/H=1/3$ )

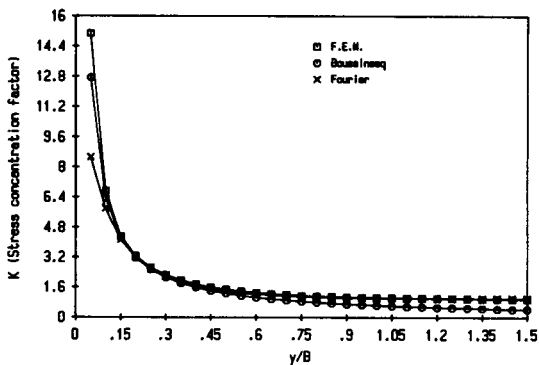


Fig. 8 Stress concentration factor for  $y/B$  under concentrated load (model 2,  $B/H=2/3$ )

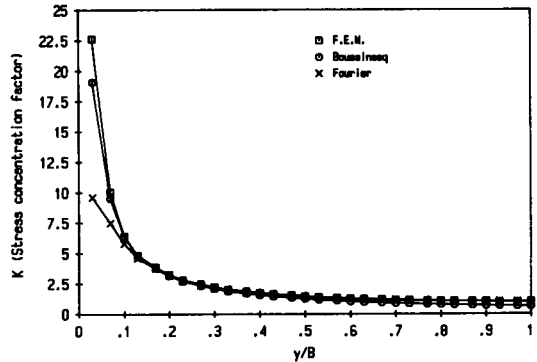


Fig. 9 Stress concentration factor for  $y/B$  under concentrated load (model 3,  $B/H=1/1$ )

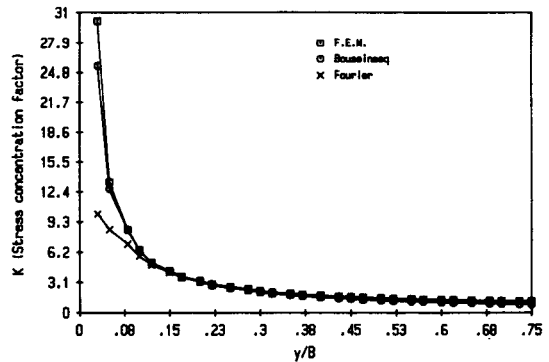


Fig. 10 Stress concentration factor for  $y/B$  under concentrated load (model 4,  $B/H=4/3$ )

각 모델의 물성치, 물성치수 및 유한요소수이다. 단위두께당 하중의 크기에  $P=qA=100\text{kg/cm}$ 로 일정하게 하였다.

#### 4.2 해석 결과

각 모델의 해석결과는 다음 세가지 경우로 검토하였다.

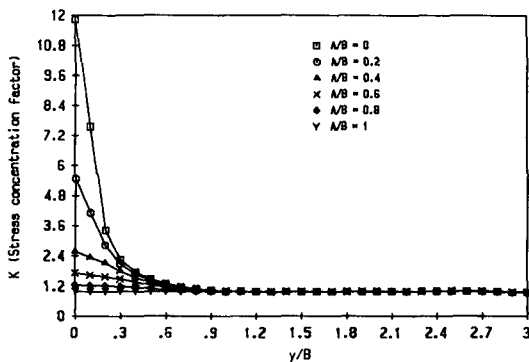
(1) 집중하중 작용시  $y/B$ ( $y$ 와 폭의 비)에 대한 응력집중계수변화의 유한요소해석 결과를 Boussinesq식과 Fourier급수해와 비교하여 Fig. 7, 8, 9,

**Table 3** Stress concentration factor for  $y/B$  under concentrated load (model 1,  $B/H=1/3$ )

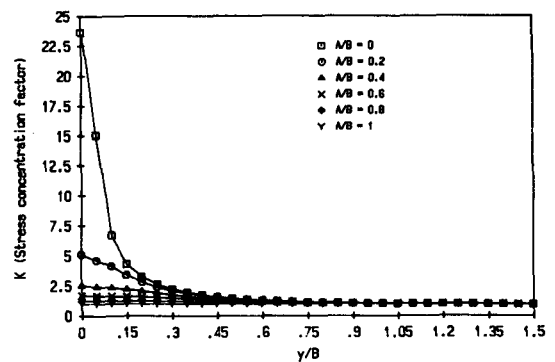
$y/B$	K		
	F.E.M.	Boussinesq	Fourier
0.1	7.568	6.366	5.825
0.2	3.437	3.183	3.18
0.3	2.256	2.122	2.153
0.4	1.775	1.592	1.658
0.5	1.488	1.273	1.387
0.6	1.31	1.061	1.229
0.7	1.192	0.909	1.136
0.8	1.114	0.796	1.08
0.9	1.063	0.707	1.047
1	1.032	0.637	1.027
1.1	1.014	0.579	1.016
1.2	1.003	0.531	1.009
1.3	0.999	0.49	1.005
1.4	0.997	0.455	1.003
1.5	0.997	0.424	1.002
1.6	0.997	0.398	1.001
1.7	0.998	0.374	1.001
1.8	0.999	0.354	1
1.9	1.001	0.335	1
2	1.003	0.318	1
2.1	1.005	0.303	1
2.2	1.008	0.289	1
2.3	1.01	0.277	1
2.4	1.013	0.265	1
2.5	1.013	0.255	1
2.6	1.011	0.245	1
2.7	1.004	0.236	1
2.8	0.991	0.227	1
2.9	0.972	0.22	1
3	0.968	0.212	1

**Table 4** Stress concentration factor fo  $y/B$  under concentrated load (model 2,  $B/H=2/3$ )

$y/B$	K		
	F.E.M.	Boussinesq	Fourier
0.05	15.081	12.733	8.524
0.1	6.754	6.366	5.825
0.15	4.315	4.244	4.165
0.2	3.284	3.183	3.18
0.25	2.654	2.547	2.564
0.3	2.251	2.122	2.153
0.35	1.969	1.819	1.867
0.4	1.763	1.592	1.658
0.45	1.607	1.415	1.504
0.5	1.484	1.273	1.387
0.55	1.388	1.158	1.298
0.6	1.31	1.061	1.229
0.65	1.247	0.979	1.177
0.7	1.196	0.909	1.136
0.75	1.155	0.849	1.104
0.8	1.122	0.796	1.08
0.85	1.096	0.749	1.061
0.9	1.075	0.707	1.047
0.95	1.059	0.67	1.036
1	1.046	0.637	1.027
1.05	1.035	0.606	1.021
1.1	1.026	0.579	1.016
1.15	1.017	0.554	1.012
1.2	1.009	0.531	1.009
1.25	1	0.509	1.007
1.3	0.99	0.49	1.005
1.35	0.98	0.472	1.004
1.4	0.968	0.455	1.003
1.45	0.957	0.439	1.002
1.5	0.954	0.424	1.002



**Fig. 11** Stress concentration factor for  $y/B$  of each loading area (model 1)



**Fig. 12** Stress concentration Factor for  $y/B$  of each loading area (model 2)

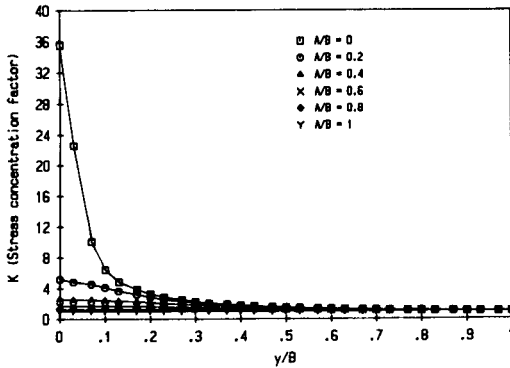


Fig. 13 Stress concentration factor for  $y/B$  of each loading area (model 3)

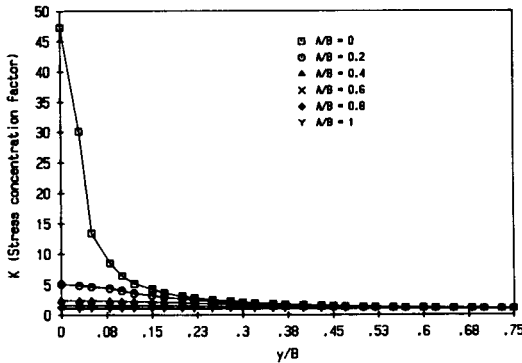


Fig. 14 Stress concentration factor for  $y/B$  of each loading area (model 4)

10과 Table 3, 4, 에 그 결과를 나타내었다.

(2)  $y/B$ 에 대한 응력집중계수변화의  $A/B$ (하중 작용폭과 판의 폭의 비)가 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1의 여섯가지인 경우에 대하여 Figs. 11, 12, 13, 14에 나타내었다.

(3)  $A/B$ 에 대한 부재내 한 점 ( $y=0.1B$ )에서의 응력집중계수의 변화를 Fig. 15와 Table 7에 나타내었다.

### 4.3 해석결과 검토

4.2(1)의 검토는 Figs. 7~10과 Tables 3~6에서 보듯이 Boussinesq식은  $y < 0.6B$ 에서는 유한요소해석결과와 잘 일치하지만  $y \geq 0.6B$ 에서는 유한부재에서는 잘 맞지 않는 것으로 나타났다.

Fourier급수해는 모델 1의 폭과 높이의 비가  $B/H=1/3$ 인 경우는 전체적으로 유한요소해석결과와

Table 5 Stress concentration factor for  $y/B$  under concentrated load (model 3,  $B/H=3/3$ )

$y/B$	$K$		
	F.E.M.	Boussinesq	Fourier
0.03	22.613	19.099	9.593
0.07	10.108	9.55	7.505
0.1	6.429	6.366	5.825
0.13	4.861	4.775	4.624
0.17	3.893	3.82	3.781
0.2	3.268	3.183	3.18
0.23	2.827	2.728	2.74
0.27	2.503	2.387	2.409
0.3	2.254	2.122	2.153
0.33	2.059	1.91	1.952
0.37	1.901	1.736	1.79
0.4	1.772	1.592	1.658
0.43	1.665	1.469	1.55
0.47	1.574	1.364	1.461
0.5	1.496	1.273	1.387
0.53	1.429	1.194	1.325
0.57	1.371	1.123	1.273
0.6	1.32	1.061	1.229
0.63	1.275	1.005	1.193
0.67	1.235	0.955	1.162
0.7	1.199	0.909	1.136
0.73	1.167	0.868	1.114
0.77	1.137	0.83	1.096
0.8	1.11	0.796	1.08
0.83	1.086	0.764	1.067
0.87	1.063	0.735	1.056
0.9	1.041	0.707	1.047
0.93	1.02	0.682	1.039
0.97	1	0.659	1.033
0.1	0.995	0.637	1.027

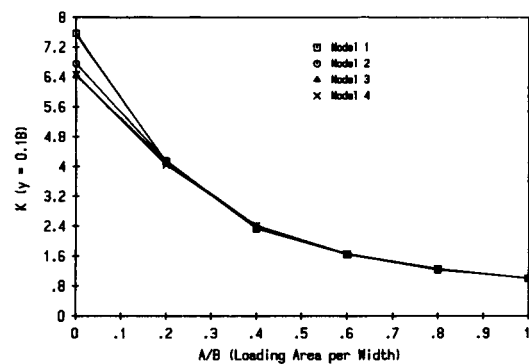


Fig. 15 Stress concentration factor at one point ( $y=0.1B$ ) in each model



**Table 6** Stress concentration factor for  $y/B$  under concentrated load(model 4,  $B/H=4/3$ )

$y/B$	$K$		
	F.E.M.	Boussinesq	Fourier
0.03	30.147	25.466	10.1
0.05	13.469	12.733	8.524
0.08	8.556	8.489	7.037
0.1	6.457	6.366	5.825
0.12	5.156	5.093	4.885
0.15	4.312	4.244	4.165
0.17	3.714	3.638	3.612
0.2	3.272	3.183	3.18
0.22	2.932	2.83	2.838
0.25	2.663	2.547	2.564
0.28	2.446	2.315	2.339
0.3	2.268	2.122	2.153
0.32	2.119	2.959	1.998
0.35	1.993	1.819	1.867
0.37	1.885	1.698	1.754
0.4	1.791	1.592	1.658
0.43	1.709	1.498	1.576
0.45	1.637	1.415	1.504
0.47	1.573	1.34	1.441
0.5	1.515	1.273	1.387
0.52	1.464	1.213	1.339
0.55	1.417	1.158	1.298
0.57	1.374	1.107	1.261
0.6	1.335	1.061	1.229
0.62	1.299	1.019	1.201
0.65	1.265	0.979	1.177
0.68	1.233	0.943	1.155
0.7	1.202	0.909	1.136
0.73	1.172	0.878	1.119
0.75	1.165	0.848	1.104

잘일치하지만 모델 2, 3, 4의 폭이 점차로 커지는 부재에서는  $y < 0.1B$ 에서는 Boussinesq식과 유한요소 해석결과보다 현저하게 낮은 값을 보여 잘 일치하지 않음을 알 수 있고  $y \geq 0.1B$ 에서는 유한요소 해석결과와 일치하고 있음을 알 수 있다.

4.2(2)의 검토는 Figs. 11~14가 각 모델의 응력 집중계수가 임의의 점에서 거의 동일한 값들을 나타내고 있음을 알 수 있다. 이것은 응력집중계수가 하중작용면적에만 의존함을 보이고 있다.

4.2(3)의 검토는 4.2(2)의 결과를 한 점에서 고찰

**Table 7** Stress concentration factor for one point ( $y=0.1B$ ) in each model

$A/B$	$K(y=0.1B)$			
	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
0	7.568	6.754	6.429	6.457
0.2	4.128	4.158	4.135	4.044
0.4	2.336	2.353	2.411	2.419
0.6	1.645	1.656	1.662	1.665
0.8	1.228	1.255	1.258	1.261
1	1	1	1	1.002

한 것으로 응력집중계수는 부재의 폭에 관계없이 하중작용면적에만 의존함을 알 수 있다.

### 5. 결 론

에너지 직교함수를 이용하여 평면응력 유한요소 프로그램을 개발하여 그 수렴성과 정확성을 평가하고 폭과 하중작용면적이 변화하는 사각형 부재에 적용하여 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 에너지 직교함수를 이용한 평면응력 유한요소는 기존의 삼각형 요소나 isoparametric 4절점 사변형 요소보다 수렴성과 정확도가 우수함을 알 수 있었다.

(2) 부재내의 응력집중계수는 부재에 작용한 하중의 작용면적에만 의존한다.

(3) Boussinesq식은  $y \geq 0.6B$ 에서는 유한부재에 적용하기가 어렵고 Fourier 급수해는  $B/H > 1/3$ 이 상인 부재에서  $y < 0.1B$ 에서는 잘 맞지 않으므로  $y < 0.1B$ 에서는 Boussinesq식이나 유한요소 해석결과로 설계하는 것이 타당성이 있다고 판단된다.

### 후 기

이 연구는 1989년 문교부 학술연구 조성비의 지원에 의하여 이루어졌으며 관계자 여러분에게 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

(1) Hertz, H. 1896, English Translation in Hertz, H. "Miscellaneous Papers", Translated by Jones, D.E., and Schott. G.A., Macmillan, Newyork, pp. 146~183.

- (2) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. 1970. "Theory of Elasticity", pp. 53~60, 97~99.
- (3) Theocaris, P.S., 1959, "The Stress Distribution in a Semi-Infinite Strip Subject to a Concentrated Load", J. Appl. Mech., Vol. 26, pp. 401~406.
- (4) Theocaris, P.S., 1964, "The Method of Isotatics of Applied to Rectangular Bars with Uniform Loading", Int. J. Eng. Sci., Vol. 2, pp. 1~19.
- (5) Bergan, P.G., 1980, "Finite Elements Based on Energy Orthogonal Functions", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 15, pp. 1541~1555.
- (6) Bergan, P.G., and Nygard, M.K., 1984, "Finite Elements with Increased Freedom in Choosing Shape Functions", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 20, pp. 643~663.
- (7) Felippa, C.A., 1985, "A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 50, pp. 25~69.
- (8) Choi, J.G. 1988, "Finite Element Method for Plate Bending Problem Using the Compatible Quadrilateral Element", University of Han Yang, Master Thesis.
- (9) Herbert Reismann and Peter Pawlik, S., 1980. "Elasticity, Theory and Applications", John Wiley & Sons. pp. 175~195.
- (10) James, Smith and Wolford, 1985, "Applied Numerical Methods for Digital Computation, 3rd", Ch. 3.
- (11) Hinton, E. and Owen, D.R.J., 1977, "Finite Element Programming".
- (12) Lee, D.H., 1988, "A Study on an Algorithmic Solution for the Analyses of Contact problems between Elastic Bodies of Arbitrary Shape", University of Han Yang, Ph. D. Thesis.
- (13) Warren C. Young, 1989, "Roark's Formulas for Stress & Strain, 6th", pp. 647~665.
- (14) Cook, R.D. 1989, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3rd".