1408 大韓機械學會論文集 第14卷 第6號, pp. 1408~1416, 1990.

〈論 文〉

유한요소법에 의한 過渡 連成 열탄성 해석

이 태 원*·심 우 진*

(1990년 7월 16일 접수)

Transient Coupled Thermoelastic Analysis by Finite Element Method

Tae Won Lee and Woo Jin Sim

Key Words: Coupled Thermoelastic Analysis(연성 열탄성 해석), Gurtin's Variational Principle(Gurtin의 변분원리), Convolution(합성 적분), Numerical Stability(수치적 안정성), Direct Time Integration(직접시간적분)

Abstract

A powerful and efficient method for finding approximate solutions to initial-boundary-value problems in the transient coupled thermoelasticity is formulated in time domain using the finite element technique with time-marching strategy. The final system equations can be derived by the Gurtin's variational principle using the definition of convolution integral. But, the finite element formulation for the equations of motion is modified by differentiating in time. Numerical results to some test problems are compared with analytical and other sophisticated approximate solutions. Stable responces are observed in all the given examples irrespective of incremental time steps and mesh shapes. In addition, it is shown that good numerical results are obtained even in coarser mesh or larger time step comparing to other numerical methods.

기 호 설 명

$[A]$, $[A']$: 시간 형상함수 행렬
$[B]$: 형상함수의 미분행렬
$[C]$: 응력-변형도 관계 행렬
C_0 : 재질의 단위 비열
$[D]$: 연성 행렬(couple matrix)
d : 초기 변위
$\{E\}$: 총 열유량 벡터
$\{F\}$: 총 하중 벡터
f : 체적력
g : 시간 1차함수
g' : 시간 계단함수
$\{H\}$: 열원 벡터
$[K_1]$: 강성 행렬
$[K_2]$: 열전도 행렬
$[k]$: 열전도 계수 행렬
$[M_1]$: 질량 행렬
$[M_2]$: 비열 행렬
$[N]$: 공간 형상함수 행렬
n : 단위 법선 벡터
$\{P\}$: 경계 하중 벡터
$\{Q\}$: 경계 열유량 벡터
q : 전도 열유량
T_0 : 기준 온도
t : 시간
u : 변위
v : 초기 속도
$[\beta]$: 열탄성 계수 행렬
σ : 응력
ρ : 밀도

*정회원, 금오공과대학 기계설계학과

θ : 온도 변화
Ω : 전 영역
Γ : 하첨자로 표현된 변수의 경계
ε : 변형률
$*$: 합성 적분(convolution)

첨 자

$\cdot$: 변수의 시간미분
$\circ$: 변수의 초기값
$-$: 변수의 경계값
$*$: 무차원화된 변수
i, j, k : 벡터나 행렬의 i, j, k 방향성분
$,$: 변수의 편미분
$\circ$: 변수의 초기값

1. 서 론

여러 산업분야에서 사용되는 기계들은 운행 중에 급격한 온도변화를 경험하는 경우가 많고 이러한 상황하에서도 안전하고 제 기능을 발휘하도록 설계되어야 한다. 급격한 온도변화는 기계들의 상태에 중요한 영향을 미치므로 정확한 해석이 필요함에도 불구하고 운동방정식과 에너지 보존식에서 존재하는 온도와 변위의 연성(couple) 효과로 인한 해석상의 어려움때문에 간단한 기하학적 형상의 1차원 문제와 같은 특수한 경우[1,2]를 제외하고는 근사적으로 해를 구하고 있다. 즉, 해석적인 방법보다 수치적인 방법에 의존하게 되었고 문제의 단순화를 위하여 에너지 보존식에서 변형으로 인한 기계적 에너지는 무시하는 반 연성(semi-couple)된 열탄성식을 사용한다[2]. 이 방법은 현재 많이 사용되는 기계재료인 금속의 경우 탄성영역에서 변형으로 인한 물체의 온도상승은 미미하므로 에너지 보존식에서 이 항을 무시하여도 정해(exact solution)와 큰 오차를 보이지 않기 때문에 보편화되었다. 그러나, 최근에 개발되는 복합재료나 세라믹 같은 재질까지 이러한 가정이 성립하는지 않는다.

위와 같은 이유로 과도 연성 열탄성 문제(transient coupled thermoelasticity problem)에 많은 관심을 가지고 유한요소법(FEM)이나 경계요소법(BEM)을 이용한 근사 수치해법에 많은 연구가 진행 중이다. 그러나, FEM이나 BEM의 적용에 관계없이 과도 열탄성 문제는 시간의 함수로 정의되므로 시간에 관한 부분을 어떻게 수치적으로 처리하느냐에 따라 크게 두가지로 분류된다. 먼저 직접시간적분방법(direct time integration method)이 있다[3~5]. 직접시간적분은 일정한 시간 증분하에서 지배방정식을 만족하는 해를 점진적으로 구하나, 현 시간에서 물체의 변위나 온도를 구하기 위해서 전 단계의 값을 이용하여야 하는 단점이 있다. 뿐만 아니라, 시간증분량에 따라 장시간영역의 해석 결과는 오차의 누적으로 이하여 정해에서 크게 벗어나는 문제점 및 큰 시간증분량을 사용하면 수치해가 발산하는 경향이 있다. 그러므로, 정확한 해로의 안정적 접근을 보장하는 수치해법의 필요성을 절감하고 일반적인 운동방정식에 관한 많은 연구 결과가 참고문헌 (6)~(8)들에 발표되어 있다. 대부분 과도 열탄성 해석을 직접시간적분방법으로 해결한 참고문헌 (3)~(5)들은 이들의 연구결과에 의존하고 있다. 그러나, 연성 열탄성 문제에서 온도 경계조건이 급격히 변하는 경우, 예를 들면, 시간 $t=0$에서 경계온도가 계단함수로 정의되는 경우 이 부분에서 온도의 1차시간미분(first time derivative)이 무한대로 되므로, 온도와 변위의 시간미분으로 정의된 열탄성 지배방정식을 수치적으로 풀 때 이 부분에 대한 특별한 고려가 필요하다. 직접시간적분방법에서 경계조건이 부분연속 시간함수인 경우에 불연속부로 인한 수치해법에서의 문제점을 해결하기 위하여 많은 참고문헌 (9)~(12)들은 Laplace 변환방법을 사용하였다. 이 방법은 시간영역의 열탄성 지배 방정식을 Laplace 변환하여 해석적이나 근사적으로 해를 구한 후, 이 결과를 Laplace 역변환(inverse transform)을 통하여 시간영역에서의 해를 구하기 때문에 현재 시간의 해와 과거의 해가 수치해법상 직접시간적분방법과 같이 연계되지 않으므로 장시간의 수치해에서 오차의 누적현상은 일어나지 않는다. Laplace 변환 영역은 복소수 공간이므로 해석적으로 Laplace 역변환을 수행하기는 어려움이 있기 때문에 수치적인 역변환에 의존하나 역변환에 필요한 복수수들의 선정에 따라 해의 정확도가 좌우되고 일반적으로 직접시간적분방법에 비해 많은 계산시간을 요하는 단점이 있다. 실제로 현재까지 발표된 수치적인 Lapalce 역변환 방법에 관한 참고문헌 (13)과 (14)의 방법으로는 관심되는 일정 시간 $t=t^*$에서의 해를 구하는데도 많은 수의 복소수값을 선정하여 수치적인 역변환을 행하여야 하므로, 연성 열탄성 문제의 근사해를 유한요소법으로 구한다면 선형방정식 $[A]$

$\{x\}=\{b\}$에서 $[A]$와 $\{b\}$가 선정된 복소수값에 따라 변하므로 재구성된 선형 연립방정식을 매번 풀어야 한다.

앞에서 설명하였듯이, 과도 연성 열탄성문제의 해를 구할때 사용되는 직접시간적분방법과 Laplace 변환방법은 상호 장 단점을 가지고 있다. 각 방법들의 장단점은 서로 배타적이므로 서로의 장점을 살리는 수치방법이 필요하다. 그런데, 대부분의 과도 열탄성문제는 급격한 온도변화로 인한 물체의 변형에 관심이 있기때문에 이 형태의 문제를 효율적으로 다루는 데 주안점을 두고 본 연구를 수행하였다. 유도된 유한요소방정식은 결국 열탄성 지배방정식 중 열전달방정식인 에너지보존식은 Gurtin의 범함수[5,6]로부터 유도된 원래의 형태를 사용하나 수치적 안정성(numerical stability)을 보장하기 위하여 운동방정식은 시간에 대한 2차미분 형태로 수정하였다. 에너지보존식은 시간에 대한 합성적분(convolution)형태로 표현되므로 온도의 시간미분항이 소거되므로 경계에서의 급격한 온도변화로 인한 수치 해석적 문제점은 간단히 해결된다. 그러므로, 제안된 수치해법은 직접시간적분방법의 일종이나 결과식인 유한요소방정식은 기존의 문헌들과 상당한 차이가 있다. 과도 연성 열탄성해석을 위한 새로운 근사수치해법의 장점을 이론적으로 설명하기보다 수치계산면에서의 안전성, 정확성 및 효율성이 있음을 증명하기 위하여 이미 발표된 문헌들에서 다룬 예제을 선정하여 해석결과를 비교하였다.

2. 문제 정의 및 유한요소 방정식

2.1 열탄성 지배방정식

운동 방정식과 에너지 보존식으로 구성되는 과도 연성 열탄성의 지배방정식은 참고문헌 (15)에 설명되어 있다. 그러므로, 결과식만 간단히 서술하기로 한다. 먼저 변위 u_i와 온도 T가 선형 열탄성의 초기 경계치 문제의 해라 하고 수식 전개의 편의를 위해 온도 T를 기준온도 T_0에 작은온도 변화 θ의 합($T=T_0+\theta$)로 표현하면 주어진 문제의 형태는 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j}+f_i=\rho\ \ddot{u}_i \qquad \text{in } \Omega \qquad (1)$$

$$q_{i,i}+\rho C_0\dot{\theta}+T_0\ \beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=H \qquad \text{in } \Omega \qquad (2)$$

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}-\beta_{ij}\ \theta \qquad (3)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (4)$$

$$q_i=-k_{ij}\ \theta_j \qquad (5)$$

위 식에서 σ_{ij}는 응력 텐서, ρ는 밀도, ε_{ij}는 변형률 텐서, f_i는 체적력, θ는 온도 변화, C_{ijkl}는 탄성 텐서, β_{ij}는 열탄성 텐서, q_i는 열유량(heat flux), k_{ij}는 열전도 텐서, H는 열원(heat source)을 나타낸다. 그리고, $u_{i,j}$는 변위 u_i의 j방향 편미분을 나타내고 $(\cdot)$는 시간에 대한 미분이다. 정의된 운동 방정식 (1)과 에너지 보존식 (2)를 보면 가속도와 변형률의 시간 미분항이 연성되어 있고 이항들로 인하여 열탄성해석이 어려움이 있다.

이상의 지배 방정식외에 경계조건 및 초기조건은 아래와 같다.

$$u_i=\bar{u}_i \qquad \text{on } \Gamma_u \qquad (6)$$

$$\sigma_{ij}n_j=\mathrm{P}_i \qquad \text{on } \Gamma_p \qquad (7)$$

$$\theta(0,\ t)=\bar{\theta} \qquad \text{on } \Gamma_\theta \qquad (8)$$

$$q_in_i=Q \qquad \text{on } \Gamma_Q \qquad (9)$$

$$u_i=v_i \qquad \text{at } t=0 \qquad (10)$$

$$u_i=d_i \qquad \text{at } t=0 \qquad (11)$$

$$\theta=\theta_0 \qquad \text{at } t=0 \qquad (12)$$

위의 조건들에서 n_i는 단위 법선벡터 성분, P_i는 외력조건을, Q는 외부로 전달되는 열유량을 나타낸다.

2.2 범함수 이론 및 유한 요소 방정식

초기 경계치 문제가 식 (1)~(12)로 정의된 경우 이 식들은 Laplce변환후 합성적분(convolution integral)을 이용하여 역변환하면 식 (1), (2), (6), (7), (8), (9)를 동등한 다음 식으로 표현할 수 있다[16].

$$g*(\sigma_{ij,j}+f_i)+\rho(\dot{v}_i+d_i)=\rho u_i \qquad (13)$$

$$g'*(k_{ij}\theta_j)_{,i}-\rho C_0\theta-T_0\beta_{ij}\varepsilon_{ij}+\rho C_0\theta_0 + T_0\beta_{ij}\varepsilon^0_{ij}+g'*H=0 \qquad (14)$$

위 식에서 ε^0_{ij}는 변형률 ε_{ij}의 $t=0$에서의 값이고 $*$와 g, g'은 다음과 같이 정의된다.

$$a*b=\int_0^t a(x,\ t-\tau)\,b(x,\ \tau)\,d\tau \qquad (15)$$

$$g(t)=t,\ g'(t)=1 \qquad \text{for } t>0 \qquad (16)$$

새로 정의된 식 (13), (14)는 초기치를 포함한 형태이므로, 주어진 열탄성 지배방정식은 (13), (14)와 경계조건 (6), (7), (8), (9)만으로 표현된다. 이 지배방정식과 경계조건을 이용하면 Gurtin의 범함수를 구할 수 있고 여기에 변분이론을 적용하면

$$\delta J=0=\int_\Omega g*C_{ijkl}u_{i,j}*\delta u_{k,l}\ dx$$
$$-\int_\Omega \frac{\rho C_0}{T_0}g*\delta\theta*\theta\ dx$$
$$-\int_\Omega \beta_{i,j}g*\delta u_{i,j}*\theta\ dx$$
$$-\int_\Omega \beta_{ij}\ g*u_{i,j}*\delta\theta\ dx$$
$$+\int_\Omega \rho u_i*\delta u_i\ dx$$
$$-\int_\Omega \frac{k_{ij}}{T_0}g*g'*\theta_{,i}*\delta\theta_{,j}\ dx$$
$$-\int_\Omega f_i*g*\delta u_i\ dx$$
$$+\int_\Omega \frac{1}{T_0}g*g'*H*g\theta\ dx$$
$$-\int_\Omega \frac{\rho C_0}{T_0}g*\theta*\delta\theta\ dx$$
$$-\int_{\Gamma_p}g*P_i*\delta u_i\ dx$$
$$-\int_{\Gamma_Q}\frac{1}{T_0}g*g'*Q*\delta\theta\ ds$$
$$+\int_\Omega \beta_{ij}\varepsilon^0_{ij}*\delta\theta\ dx$$
$$-\int_\Omega \frac{\rho C_0}{T_0}g'*g*\theta_0*\delta\theta\ dx$$
$$-\int_\Omega \rho v_i\varepsilon^0_{ij}*\delta\theta\ dx$$
$$-\int_\Omega \rho d_i*g'*\delta u_i\ dx \qquad (17)$$

이 된다. 그런데, 식 (17)은 시간에 대한 적분항이 변분에 포함되어 있기 때문에 이 식으로부터 직접 유한요소 방정식을 유도하기는 어렵다. 그러므로, u_i와 θ를

$$u_i(x,\ t)=A(t)\ \phi^i(x) \qquad (18)$$
$$\theta(x,\ t)=A'(t)\ \psi(x) \qquad (19)$$

와 같이 시간함수와 공간함수를 분리하여 정의하고 다시 공간 함수 $\phi^i(x)$, $\psi(x)$를 동일한 공간형상함수 $N_i(x)$, 유한요소절점에서의 함수값 $\phi^i{}_k$, ψ_k를 도입하여 재구성하면

$$\phi_i(x)=\sum_k N_k(x)\ \phi^i{}_k$$
$$\psi(x)=\sum_k N_k(x)\ \psi_k \qquad (20)$$

이 된다. 정의된 변위와 온도를 범함수 (17)에 대입하여 유한요소 방정식을 유도하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$g*[K_1]\{u(t)\}-g*[D]\{\theta(t)\}$$
$$+[M_1]\{u(t)\}=g*\{F(t)\}+[M_1]\{d\}$$
$$+t[M_1]\{v\} \qquad (21)$$
$$g'*[K_2]\{\theta(t)\}+[D]^T\{u(t)\}+[M_2]\{\theta(t)\}$$
$$=g'*\{E(t)\}+[M_2]\{\theta_0\}+[D]^T\{d\} \qquad (22)$$

윗 식에서

$$\{u\}=[A]\ \{\phi\} \qquad (23)$$
$$\{\theta\}=[A']\ \{\psi\} \qquad (24)$$

이고

$$[M_1]=\int_\Omega \rho[N]^T[N]d\Omega \qquad (25)$$
$$[C]=\int_\Omega [N]^T[\beta][B]d\Omega \qquad (26)$$
$$[K_1]=\int_\Omega [B]^T[C]\ [B]d\Omega \qquad (27)$$
$$[M_2]=\int_\Omega \frac{\rho C_0}{T_0}[N]^T[N]d\Omega \qquad (28)$$
$$[K_2]=\int_\Omega \frac{1}{T_0}[B]^T[k]\ [B]B\Omega \qquad (29)$$
$$\{F\}=\int_\Omega [N]^T\{f\}d\Omega+\int_{\Gamma_p}[N]^T\{P\}ds \qquad (30)$$
$$\{E\}=\int_\Omega \frac{1}{T_0}[N]^T\{H\}d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma_q}\frac{1}{T_0}[N]^T\{Q\}ds \qquad (31)$$

을 나타내고 $[\beta]$는 열탄성 행렬, $[B]$는 형상함수의 미분 행렬, $[C]$는 탄성 계수 행렬, $[k]$는 열전도 계수 행렬이다.

유도된 유한요소방정식 (21)과 (22)는 시간 적분형이다. 이 형태로부터 수치적으로 각 시간에서 해를 구할 수 있도록 하기위하여 시간형상 함수 $A(t)$, $A'(t)$를 정의하여야 한다. 그러나 시간형상함수의 선정은 상당히 어려운 문제이다. 예를들면, 참고문헌 (5)에서와 같이 변위를 전 시간에서의 변위와 속도 및 현재 시간에서의 변위로 시간형상함수를 정의하고, 온도는 전 시간과 현재 시간에서의 온도로 시간형상함수를 정의하는 경우 변위에 관한 해석이 시간에 대한 전향 적분(forward intergration)이 되므로 참고문헌 (6)에서 설명하였듯이 시간증분이 크면 수치해가 발산하는 문제가 일어난다. 그러므로, 운동방정식 (21)을 수치해의 안정성이 알려진 아래의 시간미분형태로 변환한다.

$$[M_1]\ \{\ddot{u}\}-[D]\ \{\theta\}+[K_1]\{u\}=\{F\} \qquad (32)$$

결과적으로 유도된 과도 연성 열탄성문제의 유한요소방정식은 초기 및 경계 조건 (6), (8), (10), (11), (12) 만족하는 식 (22)와 (32)이다.

3. 수치해법

2절에서 유도된 유한요소방정식은 일정시간 t_0에서 순간적으로 온도변화가 발생하는 경우에는 시간적분으로 처리함으로써 이 급격한 온도변화가 t_0 이후의 해석결과에 큰 영향을 미치지 않는 장점이 있다. 즉, 경계온도가 일정시간 t_0에서 계단함수로 변할 때, 이 시간에서 온도의 시간 1차미분은 무한대가 되나, 작은 시간증분에 대한 적분값은 일정한 유한값이 된다. 이와같이 에너지보존식은 식 (22)와 같이 시간적분형으로, 운동방정식은 식 (32)와 같이 시간미분형으로 선정하면 급격한 온도변화를 간단히 해결하는 장점은 유지하면서도 수치적 안정성이 또한 보장된다. 식 (22)에서 연성된 부분인 온도항을 상수로 가정하면 많은 연구를 통하여 시간증분의 크기에 상관없이 안정적으로 해에 수렴이 보장된 많은 수치 방법[6~8]을 발견할 수 있고, 식 (22)에서 온도 θ에 대하여 선형의 시간형상함수로 하고 연성된 변위항을 상수라 하면 Crank-Nicholson의 중간처분법(Mid-difference Formula)[6] 과 동일한 형태가 된다.

정의된 유한 요소방정식은 시간에 대한 직접 적분 형태이므로 각 시간 증분에 대하여 식 (22), (32)를 풀어야 하기때문에 전시간을 t_0, 현시간을 t_1으로 하면 실제의 시간형상함수가 정의된 영역은 $t_0 \le \tau \le t_1$이나 수식 전개의 편위를 위하여 시간 영역을 $0 \le \tau \le \Delta t$로 하여 결과식을 유도하였다. 먼저, 운동 방정식 (32)에서 안정성이 증명된 Newmark의 근사해법[7]을 적용하여 변위를

$$\dot{u}(\Delta t) = \dot{u}(0) + [(1-\gamma)\ddot{u}(0) + \gamma\ddot{u}(\Delta t)]\Delta t$$
$$u(\Delta t) = u(0) + \dot{u}(0)\Delta t + [(1/2-\alpha)\ddot{u}(0) + \alpha\ddot{u}(\Delta t)]\Delta t^2 \quad (33)$$

로 가정하였다(여기서 편의상 $\gamma=1/2$로, $\alpha=1/4$로 선정하였다). 이 가정을 식 (32)에 대입하면 결과식은

$$[\hat{K}_1]\{u(\Delta t)\} - [D]\{\theta(\Delta t)\} = \{F(\Delta t)\} + \{R_1\} \quad (34)$$

이 된다. 여기서

$$[\hat{K}_1] = [K_1] + [M_1]\frac{5}{\Delta t^2}$$
$$\{R_1\} = [M_1]\left[\frac{4}{\Delta t^2}\{u(0)\} + \frac{4}{\Delta t}\{\dot{u}(0)\} + \{\ddot{u}(0)\}\right] \quad (35)$$

이고 시간 Δt에서 속도와 가속도는

$$\ddot{u}(\Delta t) = \frac{4}{\Delta t^2}[u(\Delta t) - u(0)] - \frac{4}{\Delta t}\dot{u}(0) - \ddot{u}(0)$$
$$\dot{u}(\Delta t) = \dot{u}(0) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(0) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(\Delta t) \quad (36)$$

로부터 구해진다. 또한, 온도 θ는

$$\theta(\tau) = \frac{\Delta t - \tau}{\Delta t}\theta(0) + \frac{\tau}{\Delta t}\theta(\Delta t) \quad (37)$$

로 형상함수 $A'(\tau)$를 선정하여 식 (22)에 대입하면

$$[\hat{K}_2]\{\theta(\Delta t)\} + [D]^T\{u(\Delta t)\} = g' * Q(\Delta t) + \{R_2\} \quad (38)$$

이 결과로 유도된다. 위식에서

$$[\hat{K}_2] = [M_2] + \frac{\Delta t}{2}[K_2]$$
$$\{R_2\} = [M_2]\{\theta(0)\} + [D]^T\{u(0)\} - \frac{\Delta t}{2}[K_2]\{\theta(0)\} \quad (39)$$

을 의미한다. 그런데, $E(\Delta t)$ 역시 같은 형상함수 $A'(\tau)$를 취하면

$$g' * E(\Delta t) = \frac{\Delta t}{2}\{E(0)\} + \frac{\Delta t}{2}\{E(\Delta t)\} \quad (40)$$

이 되면 주어진 함수에 대하여 해석적으로 직접 합성적분할 수도 있다. 계산된 결과식 (34)과 (38)은

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_1 & -D \\ D^T & \hat{K}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(\Delta t) \\ \theta(\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(\Delta t) + R_1(\Delta t) \\ g' * E(\Delta t) + R_2(\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (41)$$

로 정리된다. 이상의 연립방정식을 각 시간 증분에 따라 풀면 된다. 식 (41)의 에너지보존식에 역부호를 취하면 전체 행렬의 대칭성이 유지되므로 계산시간의 효율을 위하여 이 특성을 이용할 수 있다(본 연구의 컴퓨터 프로그램은 이 특성을 이용하였다).

4. 적용예제

앞절에서 설명된 과도 연성 열탄성문제의 수치해법을 적용하여 몇개의 예제를 풀어 보았다. 선택된 예제들은 해석적으로 정해를 구할 수 있고 문헌들에서 다루어진 Danilovskaya의 두 문제로 반 무한 평면에서의 순간적인 열전달로 인한 변형해석이다. Fig. 1과 같은 반 무한 평판이 경계에서의 표면력

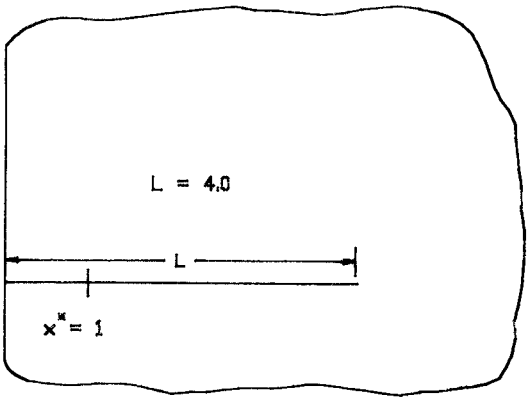

Fig. 1 Problem geometry for examples

(Traction)이 없을 때 표면에서의 순간온도 변화로 인한 일정위치에서의 온도 분포 및 변위가 시간에 따라 어떻게 변화하는가를 해석하는 문제이다. 현재의 예제는 1차원 문제로서 Laplace 변환 영역에서의 정해를 구하고 이를 수치적으로 역변환하여서 시간 영역에서의 해를 얻을 수 있다. 참고로 수치적인 역변환은 IMSL Library를 사용하였다.

문제에서 변위는 한방향 성분 u_x만 고려하고 순간온도 변화로 인한 경계조건을 제외하고는 모든 초기 및 경계조건은 다음과 같다.

$$u_x(x,\ 0)=u_x(x,\ 0)=0$$
$$\theta(x,\ 0)=T-T_0=0 \tag{42}$$
$$\sigma_{xx}(0,\ t)=0$$

윗 식에서 T는 온도본포를, T_0는 기준운도를 표현한다.

온도 경계조건을 정의하기에 앞서서 먼저 모든 변수를 무차원화하였다.

$$x^*=ax/k^*,\ \ t^*=a^2t/k^*,\ \ \sigma^*=\sigma_{xx}/\beta T_0,$$
$$\theta^*=\theta/T_0,\ \ k^*=k/\rho C_0,\ \ a^2=(\lambda+2\mu)/\rho$$
$$u^*=a(\lambda+2\mu)u/k^*\beta T_0 \tag{43}$$

위의 표현 중에서 λ, μ는 Lame의 상수이고 열탄성에서 변형에너지로 인한 온도상승 효과를 설명하는 연성변수(coupling parameter) δ는 아래와 같이 정의한다.

$$\delta=\beta^2T_0/\rho C_0(\lambda+2\mu) \tag{44}$$

이와같이 무차원화하여 식 (42)의 경계 및 초기 조건하에서 $x=0$에서의 온도 경계조건에 따라 이 예제를 2가지로 모델링하였다.

모델 1 :

경사형 표면가열(ramp-type suface heating)

$$\theta(0,\ t^*)=\begin{cases}0 & \text{for } t^*<0\\ t^*/t^*_0 & \text{for } 0\le t^*<t^*_0\\ 1 & \text{for } t^*\ge t^*_0\end{cases} \tag{45}$$

모델 2 :

대류로 인한 표면가열(convective surface heating)

$$\theta^*(0,\ t)=0 \qquad \text{for } t^*<0$$
$$k^*\frac{\partial\theta^*}{\partial x^*}=H(\theta^*-1)\ \ at\ \ x^*=0 \qquad \text{for } t^*\ge0 \tag{46}$$

위와 같은 조건하에서 문헌들의 방법과 제안된 수치해법의 해석 결과를 정해와 비교하였다. 그중에서 모델 1의 경우 Ting과 Chen[4] 및 Tamma와 Railkar[10]의 방법을 선정($t_0^*=0.25,\ \delta=1$)하였고 모델 2의 경우 Nickell과 Sackman[5]의 방법을 선정하였다. 이 물헌들의 결과를 선정한 이유는 참고문헌 (4)는 대표적인 직접시간적분방법이고 참고문헌 (10)은 Lapalce 변환방법의 대표적인 연구결과이기 때문이다. 또한, 참고문헌 (5)는 비록 오래전에 발표된 것이나 본 연구의 기초가 되는 Gurtin의 범함수로부터 유한요소법을 직접 유도하여 사용하였고 작은 시간 증분하에서는 비교적 수치해가 정해에 잘 일치하므로 비교 예제로 선정되었다. 참고로 Ting과 Chen 및 Nickell과 Sackman의 결과는 시간 증분 $\Delta t=0.01$을 사용하였다. 그러나, 이들 방법보다도 수치적으로 안정적이고 계산량에서 효율적임을 입증하기 위하여 본 연구는 시간증분을 0.01과 0.05로 선정하였다. 한편, 반 무한 평판 문제를 유한요소법으로 해결하기 위하여 무차원화된 전체길이 L을 4로 하고 1차원성형요소로 분할하였다. 사용된 유한요소는 20개이고 절점수는 21개이다. 문헌과 본 연구의 결과는 무차원 값 $x^*=1$에서의 온도 및 변위이다.

문헌 및 본 연구의 해석 결과와 정해와의 비교를 Fig. 2~5에 도시하였다. 그림들은 변위 및 온도에 관한 해석 결과이다. 응력에 관한비교는 유한요소법에서 사용요소및 절점에서의 응력계산 방법에 따라 차이가 있으므로 열탄성 지배방정식의 변수는 온도와 변위이므로 비교 대상에서 제외되었다. 먼저 모델 1의 결과를 도시한 Fig. 2, 3에서 보듯이 Laplace 변환 방법인 Tamma와 Railkar의 해석결과는 시간이 경과함에 따라 온도에 관한 해석결과가 정해와의 오차가 상당하나, 본 연구의 결과는

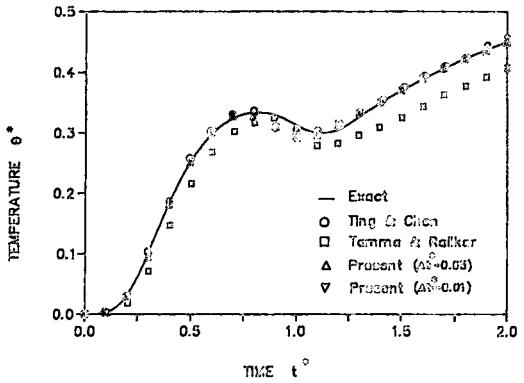

Fig. 2 Temperature history at $x^*=1.0$ due to ramp heating ($t_0^*=0.25$, $\delta=1.0$)

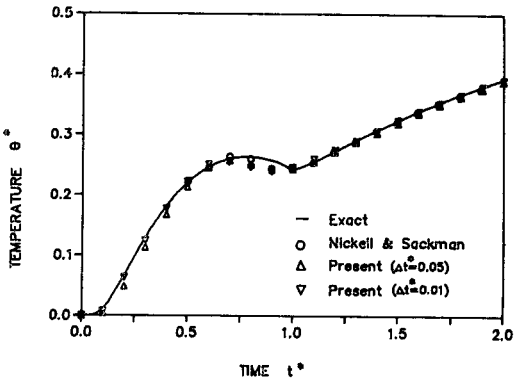

Fig. 4 Temperature history at $x^*=1.0$ due to convective surface heating ($H=5.0$, $\delta=1.0$)

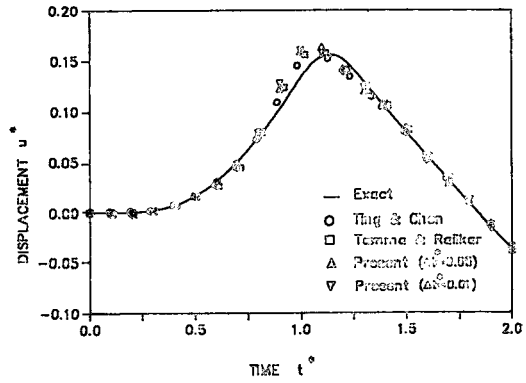

Fig. 3 Uniaxial displacement at $x^*=1.0$ due to ramp heating ($t_0^*=0.25$, $\delta=1.0$)

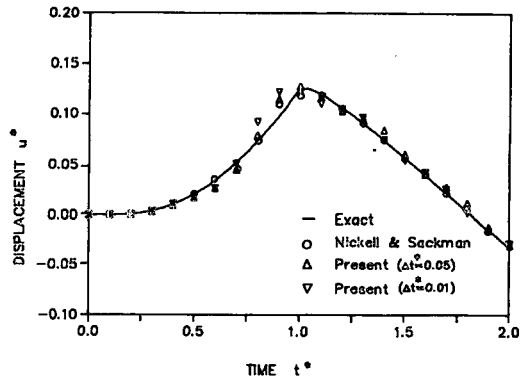

Fig. 5 Uniaxial displacement at $x^*=1.0$ due to convective surface heating ($H=5.0$, $\delta=1.0$)

어떤 시간 증분을 사용하여도 변위 및 온도 분포가 근접한다. 즉, 계산량에서 상당한 잇점이 있는 시간 증분량 $\Delta t=0.05$를 사용하여도 시간증분량 $\Delta t=0.01$을 적용한 수치해만큼 정해에 잘 일치한다. 모델 2에서 무차원화된 대류계수 $H=Lh/k=5.0$으로 한 해석결과가 Fig. 4, 5에 도시되었다. 이 결과 역시 모델 1의 경우와 마찬가지로 큰 시간 증분 0.05를 사용하여도 작은 시간증분 0.01을 사용한 결과만큼 정해와 잘 일치한다.

본 연구방법에서 시간증분에 따른 수치값의 비교결과 $t^*=1.0$부근에서는 $\Delta t=0.05$를 사용한 수치결과가 정해에 더욱 잘 일치하고 있다. 그러나, 그림들의 정해는 앞서 설명하였듯이 주어진 문제들에서 수치적으로 Laplace 역변환하여 구한 정해일 뿐이고 해석학적으로 변위 및 온도의 정해는 시간 $t^*=1.0$에서 1차미분이 불연속이다. 그러므로, 이 시간부근에서 도시된 정해는 해석학적인 정해와의 오차를 내포하고 있으므로 시간증분량의 변화에 따른 결과 비교는 큰 의미를 부여하기 곤란하다. 실제로 $t^*=1.0$ 부근을 제외한 각 시간 증분량에 따른 정해와의 오차는 시간 증분량 $\Delta t=0.01$을 적용한 경우가 시간 증분량 $\Delta t=0.05$에서의 경우보다 더 적으나, 그 차이는 무시할 정도이다. 참고로 현 요소수보다 분할요소수를 2배로 증가함에 따라 수치해는 정해에 더욱 접근함을 확인하였으나, 이 결과는 일반적인 유한요소법의 특성이므로 그림상에 도시하지 않았다. 예제들의 해석결과, 운동방정식을 합성적분으로 표현하고 이것을 수치적으로 전향

적분(forward integration)으로 해결함으로써 큰 시간 증분하에서는 안정적으로 해에 접근하지 못하는 참고문헌 (15)의 방법인 참고문헌(4), (10)으로 대변되는 기존의 방법과 달리, 제안된 방법은 큰 시간증분하에서도 안정적으로 정해에 접근함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구는 Gurtin의 범함수로부터 과도 연성 열탄성 문제의 유한 요소 지배 방정식을 유도하였다. 그런, 유도된 식은 수치적 안정성 문제로 인하여 변위에 대한 시간 형상함수의 선정의 어려움이 있었기 때문에 지배방정식 중 에너지보존식은 시간 적분형으로, 운동방정식은 시간미분형으로 재구성하였다. 제안된 결과식의 장점은 에너지보존식을 시간에 대한 합성적분형으로 발생하는 경우와 같은 부분연속함수로 정의되는 경계온도함수도 적절히 다룰수 있도록 하였다.

제안된 방법의 장점을 실증하기 위하여 두 개의 예제를 선정하여 기존의 수치해과 비교하였다. 1결과로 본 연구에서 제안된 방법이 비교적 덜 세밀한 유한 요소 분할 및 큰 시간 증분에 대해서도 안정적으로 정해에 접근하며, 기본의 방법보다 정해와의 오차가 적음을 볼 수 있었다. 실제로 보다 짧은 시간 증분과 분할 요소수의 증가에 따라 현재의 도시된 해석 결과보다도 더 정확하게 정해에 접근함을 관찰하였다. 그러므로, 제안된 수치해법은 기존의 직접시간적분방법이나 Lapalce 변환방법보다도 과도 연성 열탄성 해석에 적합하고 효율적임이 증명되었다. 앞으로의 과제로서 이러한 수치해법을 유한요소법뿐 아니라 경계요소법으로 까지 적용이 가능하도록 확장에 대한 연구가 필요하다.

후 기

본 연구는 한국 학술 진흥 재단의 지원으로 수행하였으며 본 논문의 정리에 많은 도움을 준 금오공과대학 홍윤표, 이호섭, 김유신 군에게 감사한다.

참 고 문 헌

(1) Boley, B.A. and Tolins, I.S., 1962, "Transient Coupled Thermoelastic Boundary Value Problems in the Half-Space", Journal of Applied Mechanics, ASME, pp. 637~646.

(2) Nowacki, A., 1986, "Thermoelasticity", 2nd Ed. Pergamon Press, New-York.

(3) Prevost, J.H. and Tao, D., 1983, "Finite Element Analysis of Dynamic Coupled Thermoelasticity Problem with Relaxation Time", Journal of Apoplied Mechanics, ASME, Vol. 50, pp. 817~822.

(4) ting, E.C. and Chen, H.C., 1982, "A Unified Numerical Approach for Thermal Stress Waves", Computers and Structures, Vol. 15, pp. 165~175.

(5) Nickell, R.E. and Sackman, J.L., 1968, "Approximate Solution in Linear Coupled Thermoelasticity", Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, pp. 255~266.

(6) Zienckiewicz, O.C., 1977, "The Finite Element Method", 3rd Ed., McGraw-Hill.

(7) Newmark, N.M., 1959, "A Method of Computation for Structural Dynamics", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 85, pp. 63~94.

(8) Hughes, T.J.R. and Liu, W.K., 1978, "Implicit-Explicit Finite Element Analysis in Transient Analysis: Stability Theory", Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 371~374.

(9) Tamma, K.K. and Railkar, S.B., 1987, "Nonlinear/Linear Unified Thermal Stress Formulations: Transfinite Element Approach", Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 64, pp. 415~428.

(10) Tamma, K.K. and Railkar, S.B., 1987, "On Heat Displacement Based Hybrid Transfinite Element Formulations for Uncoupled/Coupled Thermally Induced Stress Wave Propagation", Computers and Structures, Vol. 30, pp. 1025~1036.

(11) Chen, T.C. and Weng, C.I., 1989, "Coupled Transient Thermoelastic Response in an Axi-symmetric Circular Cylinder by Laplace Transform Finite Element Method", Computers and Structures, Vol. 33, pp. 533~542.

(12) Chen, T.C. and Weng, C.I., 1988, "Generalized Coupled Transient Thermoelastic Plane Problems by Laplace Transform/Finite Element Method", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 55, pp. 377~382.

(13) Durbin, F., 1974, "Numerical Inversion of Laplace Transform: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method", Computer Journal, Vol. 17, pp. 371~376.

(14) Strenkowski, J.S. and Ciskowski, R.D. 1984, "Use of the Fast Fourier Transform to Improve Direct

Numerical Integration Schemes for Transient Structral Response", Computers and Structurs, Vol. 33, pp. 149~154.
(15) Fung, Y.C., 1965, "Foundation of Solid Mechanics", Prentice-Hall, London.
(16) Oden, J.T. and Reddy, J.N., 1976, "Variatinal Methods in Theoretical Mechanics, Springer-Verlag, New-York.