

〈技術論文〉

비선형 매개변수 추정법을 이용한 열확산계수의 추정

임 동 주* · 배 신 철**

(1990년 5월 1일 접수)

The Estimation of Thermal Diffusivity Using NPE Method

Dong Joo Lim and Sin Chul Bae

Key Words : Thermal Diffusivity(열확산계수), Sensitivity Coefficient(감도계수), Heat Source(열원), Inverse Problem(역산문제), Non-Linear Parameter Estimation(비선형 매개변수 추정)

Abstract

The method of nonlinear parameter estimation(NPE), which is a statistical and an inverse method, is used to estimate the thermal diffusivity of the porous insulation material. In order to apply the NPE method for measuring the thermal diffusivity, and algorithm for programing suitable to IBM personal computer is established, and is studied the statistical treatment of experimetnal data and theory of estimation. The experimental data obtained by discrete measurement using a constant heat flux technique are used to find the boundary conditions, initial conditions, and the thermal diffusivity, and then the final values are compared with the values obtained by some different methods. The results are presente as follows: (1) NPE method is used to establish the estimation of the thermal diffusivity and compared results with experimental output shows, that this method can be applicable to define the thermal diffusivity without considering hear flux types. (2) Because of all of the temperatures obtained by the discrete measurement on each steps of time are used to estimate the thermal diffusivity. Although some error in the temperature measurements of temperature are included in estimating process, its influences on the final value are minimized in NPE method. (3) NPE method can reduce the experimental time including the time of data collecting in a few minutes and can take smaller specimen compared with steady state method. If the tube-type furnace is used, also the adjusting time of surrounding temperature can be reduced.

기 호 설 명

$b_j^{(k)}(q)$: k 번째 반복과 q 번째 시간에 대한 j 번째 매개변수의 추정

C : 미소량

e : 잔차

h : 반복 첨자

L_1 : 좌측 시편의 두께 (m)

L_2 : 우측 시편의 두께 (m)

q : 시간 첨자

S : 최소화 시키기 위한 함수

t : 시간(sec)

T : 온도(K)

*정회원, 단국대학교 대학원

**정회원, 단국대학교 공과대학 기계공학과

T_0	: 시편 전면의 온도(K)
T_L	: 시편 후면의 온도(K)
T_a	: 식 (23)의 감도 계수(sensitivity coefficient)
W_{st}	: 중량 계수(weighting coefficient)
x	: 좌표(m)
X_{st}	: 식 (9)의 감도 계수(sensitivity coefficient)
Y_s	: s번째 측정온도(K)
α	: 열확산 계수(m ² /sec)
β_j	: j번째 매개변수의 값
ϵ	: 미소량
η	: 독립변수
μ_u	: u번째 매개변수의 전추정

약 자

- CTP : 일정온도평판법(constant temperature plate method)
 CHF : 일정열유속법(constant heat flux method)
 NPE : 비선형매개변수추정법(non-linear parameter estimation method)
 RECOM : 추천값(recommended value)

1. 서 론

열전달분야에 이용되는 재료의 열적 성질은 열확산계수, 비열 및 열전도계수등 여러가지가 있으나, 이 가운데 온도변화에 따른 재료내의 열의 확산속도와 관련되는 성질이 열확산계수이다. 열확산계수는 열전달분야에 이용되는 재료에 있어서 대단히 중요한 열적 성질이므로 정확한 측정이 요구된다. 재료의 열물성치는 열설계를 수행하고자 할 때 필수불가결한 기본수치이지만 이들 데이터를 얻기까지는 그렇게 용이하지만은 않다. 그 이유는 열의 흐름자체가 어떻게 흐르고 있는가를 예측하기 어려울뿐만 아니라 측정원리에도 원인이 있다고 생각한다.

재료의 열확산계수를 측정하는 방법은 크게 나누면 비정상법(transient method)과 정상법(steady method)으로 대별할 수 있다. 정상법에서는 측정시간이 길고, 또한 시편의 크기가 커야하는 결점이 있다. 이와같은 단점을 개선하기 위해서 비정상법을 고려하게 되었다. 이러한 방법중의 하나가 섬광법(flash method)이다^(1,2). 이 방법은 시편의 전면에서 순간적으로 열원을 투사시켜 시편 후면의 온도

상승 이력을 기록함으로써 열확산계수를 찾아낼 수 있는 방법이다. 이 방법은 측정시간이 매우 짧고, 시편의 크기가 작다는 것이 장점이지만 온도측정에 의한 오차가 측정 정밀도에 주는 영향이 대단히 큰 것이 문제로 지적되고 있다. 그 후 국내외의 많은 학자들이 연구 및 실험장치 개발을 계속하여 왔다⁽³⁻¹²⁾.

섬광법을 이용하여 다공성 단열재료의 열확산계수 측정에 관한 연구도 행해지고 있고 몇편의 논문도 발표되었다^(3,4). 이것은 재료를 금속재료와 2층 재료로 만들어서 금속면에 열원이 투사되도록 장치한 것이다. 이러한 경우는 금속면과의 접촉에 따른 열접촉저항과 같은 조건들이 선결되어야 규명될 것이며, 가능하도록 측정시간을 짧게하기 위하여 재료의 두께를 얇게할 때, 그 얇은 두께가 그 재료의 유효열확산계수를 대표할 수 있느냐는 의문이 남게 된다.

열전달 문제에서 추정된 매개변수인 열물성치 즉, 열확산계수, 열전달계수, 복사계수등은 직접적으로나 간접적으로 물리적 중요성을 가질 수 있으면서도 실험장치의 효율적 응용과 관련하여 열전달 문제를 통계적으로 처리하는 방법은 널리 알려져 있지 않고 단지 실험적 연구에만 치중해 왔다. 매개변수 추정은 역산문제(inverse problem)로서 취급될 수가 있고, 직산법(direct method)은 물리적 현상을 나타내는 수학적 모델을 물체표면의 온도와 열전달 조건에 의해 해를 구하는 방법이라고 할 수 있다. 반면에 역산문제는 시간에 따라 변화하는 온도를 표면과 내부에서 이산적인 측정을 하여 물리적 중요성을 가지는 매개변수를 추정하는 방법이라고 할 수 있다.

Marquardt⁽¹⁵⁾는 비선형 매개변수를 추정하기 위한 알고리즘을 구배법과 Taylor급수법의 장점을 이용해서 소위 Marquardt법 제안하였다.

Hartely⁽¹⁶⁾은 Gauss-Newton법의 장점을 그대로 받아 들이고 확실하게 수렴이 되도록 수정해서 비선형 매개변수 추정에 사용할 수 있도록 수정 Gauss-Newton법을 발표하였다.

Stolz⁽¹⁷⁾는 구에 대한 과도 열전달문제를 시간에 따라 변화하는 온도를 내부에서 측정하여 알고있는 온도식에 시간이 0일때 적용하고 미소시간이 지난 후 온도를 연속적으로 적용함으로써 표면 열유속을 역으로 구하였다.

Sparrow 등⁽¹⁸⁾은 Stolz가 사용한 방법을 개선해

서 일반적으로 적용할 수 있는 온도이력을 측정함으로써 열유속을 역으로 계산할 수 있는 방법을 제시하였다.

Beck⁽¹⁹⁾은 온도에 의해서 지배되는 열물성치를 갖는 재료에 대해서 접촉저항을 결정하는데 적당한 해석 방법과 측정이 유용한 최적 실험장치의 해석적 연구를 이 추정법을 사용해서 연구하였다.

본 연구는 역산법으로 열확산계수를 추정하기 위하여 비선형 매개변수 추정법을 사용하며, 실험데이터의 통계적 처리방법, 추정이론을 정리하여 이 추정법에 적합한 알고리즘을 만들었다. 수정된 Gauss법을 컴퓨터에 사용할 수 있도록 프로그램을 개발하였으며, 이 방법의 정확성을 증명하기 위하여 일정열유법과 동일한 실험장치를 사용하되 경계조건이나 초기조건을 시간의 변화에 따라 이산적으로 측정하여, 매개변수인 열확산계수를 온도의 함수로 찾고자 하였으며, 통계적인 개념보다는 역산적인 면에 더 치중하였다.

2. 이론 해석

2.1 기본이론

k 개의 실험데이터 x_1, x_2, \dots, x_k 와 그에 대한 응답 y 의 함수적인 관계를 다음과 같이 회귀함수의 형태로 가정한다.

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p; \epsilon_i) \quad (1)$$

위 식에서 매개변수 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 는 Y 와 x_1, x_2, \dots, x_k 로부터 추정되어진다. 한편 $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ 로 놓는다면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y_i = \eta_i(X_i, \beta) + \epsilon_i \quad (2)$$

Y 와 η 의 차이는 바로 오차를 나타내며, 식 (3)과 같이 오차의 자승합이 최소의 매개변수를 찾을 수 있다.

$$S = \sum \epsilon_i^2 = \sum (Y_i - \eta_i)^2 \quad (3)$$

식 (3)에서 오차는 다음과 같다.

$$\epsilon_i = (Y_i - \eta_i) = (Y_i - \bar{Y}_i) + (\bar{Y}_i - \eta_i) \quad (4)$$

여기서 \bar{Y}_i 는 평균이고 $\epsilon_i = Y_i - \bar{Y}_i$ 는 잔차이다. 식 (3)을 매개변수로 취한 미분값을 0으로 놓고, 식 (4)의 제곱에 대입하면

$$\sum (Y_i - \eta_i)^2 = \sum (Y_i - \bar{Y}_i)^2 + \sum (\bar{Y}_i - \eta_i)^2 \quad (5)$$

가 된다. 식 (5)에서 왼쪽의 항을 총변동 또는 총제곱합이며, 오른쪽의 첫번째 항이 잔차제곱합, 두번째 항이 회귀변동이다.

만약 실험을 한 실험데이터와 미분방정식의 풀이 방법이 주어졌을 때 매개변수를 찾기 위해서 비선형추정법을 이용한다. 이 방법은 Box등⁽²⁰⁾에 의해서 통계적 관점에서 개발된 방법이다. 식 (5)의 오차 제곱의 합을 최소의 매개변수로 추정하기 위하여 다음과 같은 식을 사용한다.

$$S = (Y_s - \eta_s) W_{st} (Y_t - \eta_t) + (\mu_u - \beta_u) u_{uv} (\mu_v - \beta_v) \quad (6)$$

여기서 반복된 첨자는 합을 의미하며 s 와 t 의 범위는 1부터 n 까지 실험한 수를 표시하고, u 와 v 는 1부터 p 까지 β_u 로 표시되는 매개변수의 수를 나타낸다. Y_s 는 s 번째 독립변수에서 종속변수의 s 번째 측정이고 η_s 는 Y_s 와 같은 조건에서 같은 독립변수에 대한 모델로부터 계산된 독립변수이다. 독립변수는 x_s 위치와 t_s 시간에 대한 온도이다. 즉 Y_s 는 측정된 온도이고, W_{st} 값으로 만들어진 정방행렬은 양이어야 한다. 보통 Y_s 에서 측정오차는 W_{ss} 가 크다는 것을 의미한다. W_{st} ($st=1, 2, \dots, n$)는 Y 벡터의 공분산의 역행렬이고 Ψ_{st} 로 표시한다. Ψ_{st} 의 추정된 값은 측정오차가 서로 상관이 없다고 생각될 때는 알 수가 있다. 이 경우 $s=t$ 를 제외한 모든 s, t 에 대하여 $W_{st}=0$ 이라면 실험을 N 번 반복해서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Psi_{st} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_{st} - Y_s)(Y_{it} - Y_t) \quad (7)$$

Y_s 은 i 번째 실험에 대한 (x_s, t_s) 에서 종속변수의 값이고 Y_t 은 (x_s, t_s) 에서 i 에 대한 평균이다. 식 (6)의 2번째항은 전정보(prior information)이다.

2.2 추정과정

식 (6)의 제곱합함수를 최소로하는 매개변수(β_j)를 찾기 위하여 S 를 β_j 로 1차 미분하고 0으로 놓으면 다음과 같다.

$$S_j = -2[\eta_{s,j} W_{st} (Y_t - \eta_t) + U_{uv} (\mu_v - \beta_v)] = 0 \quad (8)$$

변수 β_j 에 대한 편미분은, 다음 j 에 대해 표시하고 다음과 같이 감도계수로 나타낼 수 있다.

$$X_{st} = \partial \eta_s / \partial \beta_j = \eta_{s,j} \quad (9)$$

식 (8)에서 $K+1$ 번째 매개변수 추정값을 $b_u^{(k+1)}$ ($u=1, 2, \dots, p$)로 한다. 지금 여기에서 2개의 근사값이 사용되고 있는데 하나는 X_{st} 를 $b_u^{(k+1)}$ 에 대한 Taylor급수를 사용하므로써 고차항을 무시하면 다음과 같다.

$$\eta_t^{(k+1)} \approx \eta_t^{(k)} + X_{t1} (b_1^{(k+1)} - b_1^{(k)}) \quad (10)$$

식 (8)에 이 근사값을 대입하면 다음과 같다.

$$X_{sj}W_{st}[Y_t - \eta_t^{(k)} - X_{t1}^{(k)}(b_1^{(k+1)} - b_1^{(k)})] \\ + U_{jv}[\mu_v - b_v^{(k)} - (b_v^{(k+1)} - b_v^{(k)})] = 0 \quad (11)$$

이 식을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$[X_{sj}^{(k)}W_{st}X_{tv}^{(k)} + U_{jv}](b_v^{(k+1)} - b_v^{(k)}) \\ = X_{sj}^{(k)}W_{st}(Y_t - \eta_t^{(k)}) + U_{jv}(\mu_v - b_v^{(k)}) \quad (12)$$

j 는 1, 2, ..., p 까지 이므로 p 개의 선형대수방정식이 만들어지고 $v=1, 2, \dots, p$ 에 대해서 개선된 매개변수값 $b_v^{(k+1)}$ 을 구할 수 있다. 식 (12)에서 대괄호속의 $j, v=1, 2, \dots, p$ 를 사용해서 만든 정방행렬이 요소가 $p_w^{(k)}$ 인 역행렬을 가진다고 한다면, 역행렬이 존재하기 위하여서는 비 특이성 (Nonsingular)이어야 한다. 따라서 식 (10)으로부터

$$b_j^{(k+1)} = b_j^{(k)} + P_w^{(k)}[X_{su}^{(k)}W_{st}(Y_t - \eta_t^{(k)}) \\ + U_{uv}(\mu_v - b_v^{(k)})] \quad (13)$$

와 같이 구하여 진다. 이 식은 수정 Gaussian 반복식이다. 이 반복을 b_j 값의 변화가 없을 때까지 k 에 대한 반복을 계속한다. 식 (13)은 실험해석을 연속적으로 할 수 있는 식이다. 실험에서 얻은 데이터가 n 개라면 j 번째 데이터를 해석해서 수립된 값 b_j 를 구한후 $j+1$ 번째의 데이터로 해석할 때는 b_j 를 μ_j 로 대치시켜서 전데이터의 정보를 포함시켜 해석할 수 있다. 만약 매개변수가 하나라면 ($p=1$), 식 (13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$b^{(k+1)} = b^{(k)} + P^{(k)}[X_s^{(k)}W_{st}(Y_t - \eta_t^{(k)}) \\ + U(\mu - b^{(k)})] \quad (14a)$$

$$P^{(k)} = [X_s^{(k)}W_{st}X^{(k)} + U]^{-1} \quad (14b)$$

이 식은 주어진 시간에 대한 일련의 측정값이 새로운 매개변수 추정값에 연속적으로 가산하는 방법을 나타내고 있다.

여기에서 계산과정을 간소화시키고자 다음과 같은 식으로 쓸 수 있다.

$$C_w^{(k)}(i) = U_w + \sum_{q=1}^i X_{qu}^{(k)}W_qX_w^{(k)} \quad (15a)$$

$$D_u^{(k)}(i) = \sum_{q=1}^i X_{qu}^{(k)}W_q(Y_q - \eta_q^{(k)}) \\ + U_{uv}(\mu_v - b_v^{(k)}) \quad (15b)$$

윗 식에서 매개변수를 추정하기 위해서는 초기값이 필요한데 그 값은 다음 식과 같다.

$$C_w^{(k)}(0) = U_w, \quad D_u^{(k)}(0) = U_{uv}(\mu_v - b_v^{(k)}) \quad (16)$$

그러므로 식 (15)에서 반복적 과정인 방정식을 얻을 수가 있다.

$$C_w^{(k)}(q) = C_w^{(k)}(q-1) + X_{qu}^{(k)}W_qX_w^{(k)} \\ q=1, 2, \dots, n \quad (17a)$$

$$D_u^{(k)}(q) = D_u^{(k)}(q-1) + X_{qu}^{(k)}W_q(Y_q - \eta_q^{(k)}) \\ q=1, 2, \dots, n \quad (17b)$$

지금 $P_w^{(k)}$ 은 $C_w^{(k)}(q)$ 의 값을 사용해서 만든 역행렬의 uj 성분이 된다. 그때 간단한 연속적인 과정의 방정식은 다음과 같다.

$$b_j^{(k+1)}(q) = b_j^{(k)}(n) + P_w^{(k)}(q)D_u^{(k)}(q) \\ j=1, 2, \dots, p \quad (18)$$

이 식은 식 (16)과 식 (17)를 이용한 것이고 q 는 1부터 시작해서 n 까지 추정하고 또다시 k 에 대한 반복이 시작된다. 이 때 식 (17a)는 다음과 같이 된다.

$$P^{(k)}(q) = [C^{(k)}(q)]^{-1} = [C^{(k)}(q-1) \\ + X_q^{T(k)}W_qX_q^{(k)}]^{-1} \quad (19)$$

여기에서 $X_q^{(k)}$ 은 $X_{qu}^{(k)}$ 의 성분을 가지고 $W_q = W_q$ 이며 식 (19)에서 $p \times p$ 의 역행렬은 스칼라가 되며 식 (18)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$b^{(k+1)}(q) = b^{(k)}(n) + P^{(k)}(q)D^{(k)}(q) \quad (20)$$

$$= b^{(k)}(n) + P^{(k)}(q)[X_q^{T(k)}W_qe_q^{(k)} \\ + D^{(k)}(q-1)] \quad (21)$$

단, $e_q^{(k)} = Y_q - \eta_q^{(k)}$ 이며 식 (21)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$b^{(k+1)}(q) = b^{(k)}(n) + P^{(k)}(q-1)X^T e_q^{(k)} / \Delta(q) \\ + P^{(k)}(q-1)D^{(k)}(q-1) - P(q-1)X_q^T X_q P(q-1)D(q-1) / \Delta(q) \quad (22)$$

여기서 $\Delta(q) = w_q^{-1} + X_q P(q-1)X_q^T$ 이며 우변에서 첨자 k 는 생략하였다. 식 (18)은 $q-1$ 에 대해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$b^{(k+1)}(q-1) = b^{(k)}(n) + P^{(k)}(q-1)D^{(k)}(q-1) \quad (23)$$

그러므로 식 (21)은 다음과 같이 변형하여 매개변수 행렬을 만들 수 있다.

$$b^{(k+1)}(q) = b^{(k)}(q-1) + P^{(k)}(q-1)X^{T(k)} \\ \times [e_q^{(k)} - X_q^{(k)}(b^{(k)}(q-1) - b^{(k)}(n))] / \Delta^{(k)}(q) \quad (24)$$

실제 매개변수를 추정하는데 있어서는 다음과 같은 형태로 써서 순서대로 계산하는 것이 편리하다.

$$\Delta^{(k)}(q) = w_q^{-1} + X_{qu}^{(k)}P_w^{(k)}(q-1)X_{qi}^{(k)} \quad (25a)$$

$$A_j^{(k)}(q) = X_{qi}^{(k)}P_{ji}^{(k)}(q-1); j=1, 2, \dots, p \quad (25b)$$

$$K_j^{(k)}(q) = A_j^{(k)}(q) / \Delta^{(k)}(q) ; j=1, 2, \dots, p \quad (25c)$$

$$H^{(k)}(q) = X_{q_i}^{(k)} [b_i^{(k+1)}(q-1) - b_i^{(k)}(n)] \quad (25d)$$

$$e_q^{(k)} = Y_q - \eta_q^{(k)} \quad (25e)$$

$$b_j^{(k+1)}(q) = b_j^{(k+1)}(q-1) + K_j^{(k)}(q) (e_q^{(k)} - H^{(k)}(q)) ; j=1, 2, \dots, p \quad (25f)$$

$$P_w^{(k)}(q) = P_w^{(k)}(q-1) - K_u^{(k)}(q) A_j^{(k)}(q) ; u, j=1, 2, \dots, p \quad (25g)$$

식 (13), 식 (18), 식 (25)는 모두 Gauss법을 수정한 식이다. 어느 식도 매개변수 추정에 사용할 수 있는 식이며 선형의 경우는 한번의 반복으로서 필요한 매개변수를 추정할 수 있다. 식 (25)에서 $b_j^{(k+1)}(q)$ 은 $(K+1)$ 번째 반복과 시간 $i=q$ 에서 j 번째 추정치이고 $b_j^{(k+1)}(q-1)$ 은 바로 전시간에 대한 것이다. $b_j^{(k)}(n)$ 은 K 번째 반복의 마지막 추정치이며 $X_{qu}^{(k)}$ 와 $\eta_q^{(k)}$ 은 $b_j^{(k)}(n)$ 에서 계산한다. 그리고 식 (25)의 가장 유리한 점은 역행렬을 구하지 않아도 된다는 점이다. 이 식을 사용하여 매개변수를 구하기 위해서는 초기값이 필요한데 선형의 경우 $b_j^{(1)}(0) = b_j^{(0)}(n)$ 은 0으로 하면되고 비선형의 경우는 대략적인 값을 사용하면 된다. 만약 초기값을 잘못 예측했을 경우는 그만큼 반복횟수가 많아진다. $p_w(0)$ 값은 $u \neq j$ 일때는 0으로 하고 $u=j$ 일때는 $p_{uu}(0)$ 은 $b_u^{(0)}(n)$ 의 분산이 되므로 $P(0)$ 은 U 의 역이다.

2.3 열확산 계수의 추정

비선형 매개변수를 포함하는 열전도방정식에서 열확산계수는 과도온도 측정을 함으로서 계산할 수 있는데, 열확산계수를 계산할 수 있는 가장 간단한 문제는 다음 식을 α 에 대해서 풀면 된다.

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (26)$$

$$T(0, t) = f(t)$$

$$T(L, t) = f(t)$$

$$T(x, 0) = f(x)$$

여기서 온도 T 는 유한차분 형태로 놓고 일차원 물체를 3위치(x)와 시간 t 에 대해서 측정한다. 이 3온도 이력들 식 (26)에 반복 적용함으로써 α 를 시간과 온도의 함수로서 구할 수 있다. 이 간단한 과정은 측정된 온도차로부터 열확산계수 α 를 계산하기 때문에 온도에서 랜덤오차가 민감하므로 좋은

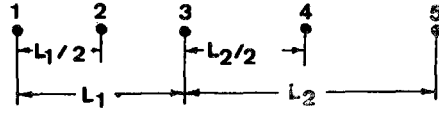


Fig. 1 Location of nodes

방법은 아니다. 이보다 우수하다고 할 수 있는 방법이 매개변수 추정법이다. 비선형 매개변수를 포함하는 편미분 방정식에서 매개변수를 추정하는 것은 그리 쉬운 문제는 아니다. 여기서는 OLS법을 사용해서 추정하며 이 때 식 (6)의 α 에 대한 오차함수의 합은 다음과 같다.

$$S(\alpha) = \sum \sum (T_i^j - Y_i^j)^2 \quad (27)$$

여기서 T_i^j 와 Y_i^j 는 각각 시간 $t=j\Delta t$ 와 i 노드에서 계산한 온도와 측정된 온도이다. j 의 한계는 역확산계수가 구해지는 시간간격이다. i 에 대한 합은 처음과 마지막을 제외한 모든 열전대에서 측정되는 것에 대한 것이다. 각 노드에 대한 위치를 Fig. 1과 같이 표시 하였다.

중간 노드(노드 2와 노드 4)는 유한차분 근사해를 개선 시키기 위한 것이다. 각 노드에 대해서 후진차분법에 의한 유한차분 근사해는 다음과 같다.

노드 2 :

$$-T_i^j + \left[2 + \frac{(L_1)^2/4}{\alpha \Delta t} \right] T_i^{j-1} - T_i^{j-2} = \frac{(L_1)^2/4}{\alpha \Delta t} T_i^{j-2} \quad (28a)$$

노드 3 :

$$\begin{aligned} -T_i^j + \left[1 + L_1/L_2 + \frac{L_1(L_1+L_2)/8}{\alpha \Delta t} \right] T_i^{j-1} - T_i^{j-2} \\ = \frac{L_1(L_1+L_2)/8}{\alpha \Delta t} T_i^{j-2} \end{aligned} \quad (28b)$$

노드 4 :

$$\begin{aligned} -T_i^j + \left[2 + \frac{(L_2)^2/4}{\alpha \Delta t} \right] T_i^{j-1} - T_i^{j-2} \\ = \frac{(L_2)^2/4}{\alpha \Delta t} T_i^{j-2} \end{aligned} \quad (28c)$$

식 (27)을 열확산계수(α)에 대해서 최소화시킬 수 있는 방법중에서 가장 간단하고 많이 이용되는 방법은 Taylor급수를 이용하는 방법이며 다음과 같다.

$$T_i^j(\alpha) = T_i^j(\alpha_1) + T_{\alpha, i}^j(\Delta \alpha) \quad (29)$$

$$\text{단, } (\Delta \alpha)_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i \quad (30)$$

$$T_{\alpha, i}^j = \partial T_i^j / \partial \alpha = \frac{T_i^j \alpha_i (1 + \epsilon) - T_i^j(\alpha_i)}{\epsilon \alpha_i} \quad (31)$$

여기서 $T_{\alpha} = \partial T / \partial \alpha$ 은 감도계수라고 부르며, 반복 과정은 $l=0$ 로 놓은 α 값인 α_0 를 가지고 시작한다.

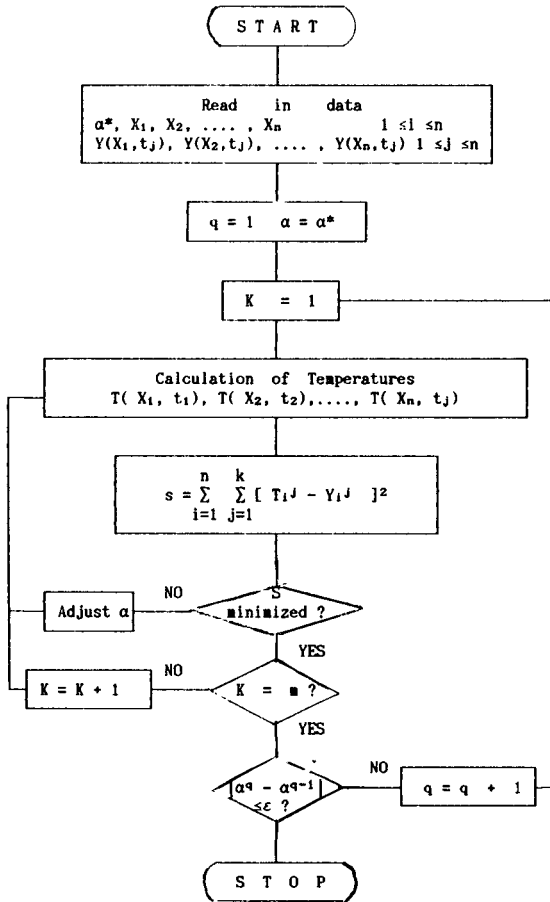


Fig. 2 Flow chart

식 (27)을 식 (8)에서와 같이 α 에 대해서 미분하고 0으로 놓으면

$$\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum \sum 2 [T_i^j - Y_i^j] (T_{\alpha, i}^j) = 0 \quad (32)$$

이다.

식 (29)를 식 (32)에 대입해서 정리하면 $(\Delta \alpha)_i$ 값은 다음과 같이 구할 수 있다. 이 값은 식 (13)에서 $b_j^{(k+1)} - b_j^{(k)}$ 와 같은 것이다.

$$(\Delta \alpha)_i = \frac{\sum \sum [Y_i^j + T_i^j(\alpha_i)] T_{\alpha, i}^j}{\sum \sum (T_{\alpha, i}^j)^2} \quad (33)$$

ϵ 은 미소량이고 보통 0.001정도로 선택할 수 있다. 이 반복과정은 $(\Delta \alpha)_i / \alpha_i < C$ 이 될때까지 계속하고 C 는 대략 0.001정도로 선택한다. 처음 시간에 대해서 값을 구한 후 계속적으로 시간변화에 대해서 값을 추정하면 된다.

열확산계수를 추정하는 프로그램에 대한 흐름도는 Fig. 2와 같으며, 입력자료로는 시간과 온도에 대한 자료, 열전대의 수, 열전대의 위치, 시편의 두께, 시작점의 온도, 유한차분자료 등이 필요하다.

3. 실험장치 및 측정방법

3.1 실험장치

본 연구에서 프로그램에 대한 입력자료를 얻기 위해서 실험에서 사용한 전기로와 실험장치의 개략도는 Fig. 3과 같다. 노는 유리를 셀모양으로 성형시

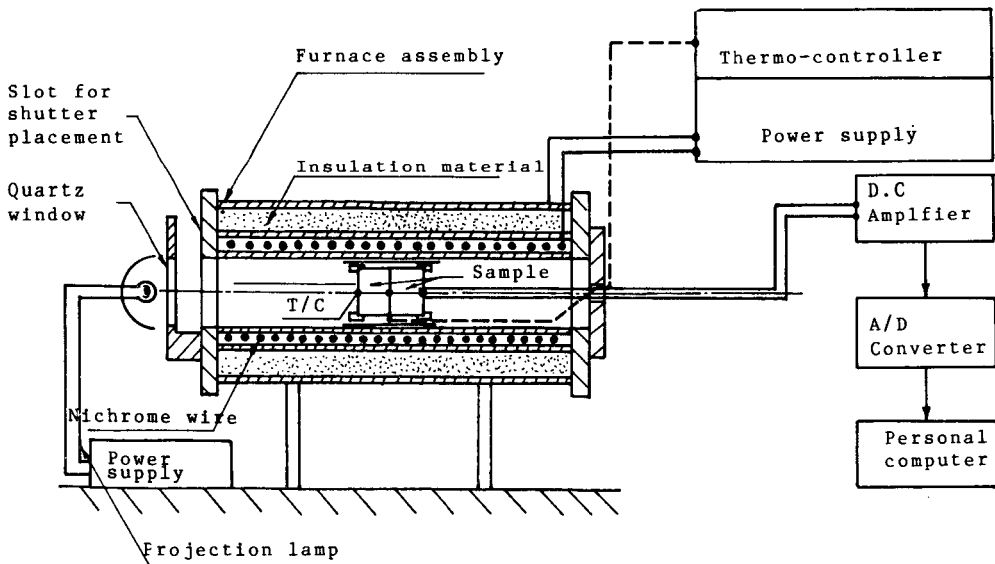


Fig. 3 Schematic diagram of electric furnace and data acquisition system

킨 이형내화물에 니크롬선을 삽입하여 가열시킬 수 있도록 하였으며, 노에 공급되는 전원은 전압조절기로 공급할 수 있도록 하였다. 또한 노의 온도는 자동온도조절기를 사용하였다.

노는 A.C. 15V 또는 D.C. 70V, 30A 이내에서 사용할 수 있으며 용량은 4kW이고, 최대온도는 500°C 범위까지 사용할 수 있도록 하였다. 노는 온도 상승 및 일정온도 유지를 위하여 세라크올로 단열시켰다. 노의 한쪽 끝은 노속으로 열유속을 방사시키기 위하여 직경 10cm 두께 1.5cm인 석영유리를 부착시켰다. 또한 온도 측정을 위한 열전대는 0.24mm의 크로멜-알루멜(K형) 열전대를 사용하였으며, 주위의 기전력 노이즈의 영향을 받지 않도록 절연시켰다. 이 열전대는 상온에서부터 600°C 범위에 충분히 사용이 가능한 것이다. 데이터 수집장치는 A/D 변환기와 데이터 수집 프로그램으로 구성하였다.

시편을 고정시키기 위한 시편지지대는 측정시 두께에 대한 오차를 줄이기 위하여 Fig. 4와 같이 제작하여 사용하였다. 양링판은 스테인리스판을 외경 5.5cm, 내경 3.9cm 두께 0.01cm로 제작하였다. 링판의 내경에는 시편전후면에 부착되는 스테인리스 원판을 지지할 수 있도록 3개의 삼각형 돌출 볼력을 만들었다. 링판과 가스다란 연결봉을 절연시키기 위하여 링판에 작은 세라믹관을 삽입하였고, 시편지지대 전후면에는 시편에 균일한 열을 받도록 시편과 직경이 동일한 두께 0.01cm 스테인리스 원판을 부착시켰다. 전면원판에는 방사열 흡수를 증가시키기 위하여 검정레커칠을 하였다.

열원은 600W인 텅스텐-할로젠 적외선램프를 사용하였다. 열을 집중시키기 위하여 전구뒤에는 은박을 입힌 반사갓을 부착시켰다. 램프는 전압조절로 열유속의 강도를 조절할 수 있도록 하였다. 전압을 100V로 조절하면 주위의 온도가 상온 일때에 3초이내 400°C까지 도달하였다. 그러나 실험에서는 재료의 손상을 우려하여 15V로 전원을 공급하였으며, 램프는 노의 높이에 따라 조절할 수 있도록 하였다.

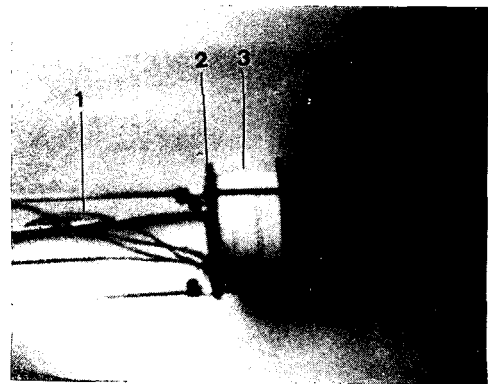
3.2 실험방법

본 실험에서는 비선형 매개변수 추정법의 정확성을 입증하기 위하여 미국표준국의 표준시편으로 제공하고 있는 저온 단열제인 NBS-1450b를 이용하여 추천한 값과 추정한 값을 비교하였다. 시편에

Table 1. Properties of the NBS-1450b

Density (kg/m ³)	137.5			
T (°C)	23	43	63	83
C _p (J/kg K)	860.0	929.9	975.9	1008.7
k (W/mk)	0.0348	0.0372	0.0397	0.0423
α × 10 ⁶ (m ² /s)	0.2939	0.2907	0.2960	0.3051

대한 상세한 자료는 Table 1과 같다. 시편은 두께가 7mm가 되도록 정밀하게 가공하였으며, 시편의 온도측정은 Fig. 4와 같이 제작한 시편지지대에 시편을 삽입하여 스테인리스판뒤, 시편과 시편 사이, 시편 뒷면에 열전대를 부착시켜 측정하였다. 열확산계수는 밀도와 비열에 함수이므로 밀도가 변화하지 않도록 시편을 시편지지대에 삽입할때는 균일한 힘을 주어 일정한 두께로 유지하도록 하였다. 그리고 열전대는 정중앙에 위치하도록 삽입하였으며, 시편층은 연속매개체로 가정하고 시편층사이에 삽입된 열전대 두께는 얇아 열전대가 열전도에 미치는 영향은 무시하였다. 노속온도 조절은 전력공급기에 부착된 열전대 한개의 체널을 노속에 넣고 측정하고자 하는 온도로 세팅한 다음 A.C. 1.5V를 공급하여 노안의 온도를 일정하게 유지시킨다. 다음에 개폐구를 열어 시편이 삽입된 시편지지대를 노속에 넣고 시편의 온도가 노속의 주위 온도와 평형을 이룰때까지 기다린다. 시편온도와 노속의 온도가 평형을 이룰때까지는 대략 10분정도가 소요된



- 1. thermocouple
- 2. holder
- 3. sample

Fig. 4 Sample holder

다. 노속의 중앙부의 온도는 끝쪽의 온도 보다 높기 때문에 시편 양면의 온도 구배가 가장 작은 32 cm되는 곳에 시편지지대를 밀어넣는다.

각 채널에서 측정된 시편내의 온도가 안정되면 적외선 램프를 서터마운트에 밀착시킨다. 소형 전력공급기로 램프의 강도를 조절한 다음 서터를 제거함과 동시에 온도 수집프로그램을 작동시킨다. 각채널의 온도는 시간의 함수로써 1초 간격으로 150초 동안 이산적인 측정을 하며 데이터 디스켓에 저장한다. 이 데이터를 해석용 프로그램에 입력하여 열확산계수를 추정한다.

4. 결과 및 고찰

매개변수 추정법의 정확성을 시험하기 위하여 단열재 표준시편인 NBS 1450-b를 이용 열확산 계수를 측정하여 추천된값과 비교 검토하였다. 이 단열재는 28°C에서 Fig. 3의 실험장치에 의해서 이산적인 측정을 한 온도는 Fig. 5와 같았으며, 여기에서 T_0 는 시편의 전면온도, T 는 중간온도, T_L 은 후면의 온도를 가리킨다. 이 온도를 해석용 프로그램에 입력하여 얻은 출력값을 가지고 반복해서 오차를 줄여나가는 과정을 그래프로 표시한 것이 Fig. 6이다. 여기서는 10번의 반복과정을 거쳐 열확산계수의 값을 추정했는데 추정하고자 하는 값이 어느정도 예측이 가능하다면 반복횟수를 3회 이내로 줄일 수 있다. 이 재료에 대한 온도별 열확산계수의 추정값과 추천값, 그리고 같은 재료를 일정온도 평판법과 일정열유속법으로 측정한 값⁽²¹⁾을 Fig. 7에 비교하여 표시하였다. 이 그림에서 보는 바와 같이 25°C에서부터 80°C 범위에서 일정온도 평판법은 5%에서 26%까지 오차가 발생하였고, 일정열유속법은 3.1%에서 8.7%까지 오차가 발생하였는데 비하여 비선형 매개변수 추정법은 3%이내였다. 같은 재료로 Rooke 등⁽¹³⁾이 25°C에서 90°C 범위까지 측정한 결과는 10%에서 15%까지 오차가 발생하였고, 또한 Taylor 등⁽¹⁴⁾이 35°C에서 90°C 범위까지 측정한 결과는 5%에서 10%까지 오차가 발생한 것으로 보아 이 방법의 신뢰성이 있다고 본다.

그 이유는 직산법의 경우 구해지는 엄밀해에는 오차함수가 포함되며, 이 오차함수의 특성상 편각이 작을 경우 이 편각의 미소변화는 마지막 해에 큰 영향을 끼치게 된다. 따라서 데이터 수집초기에는 약간의 오차가 결과값에 큰 영향을 미치게 되므로

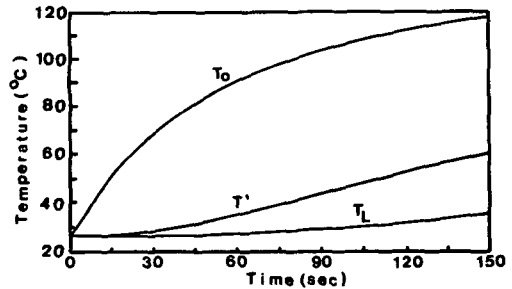


Fig. 5 Temperature history measured by constant heat flux method

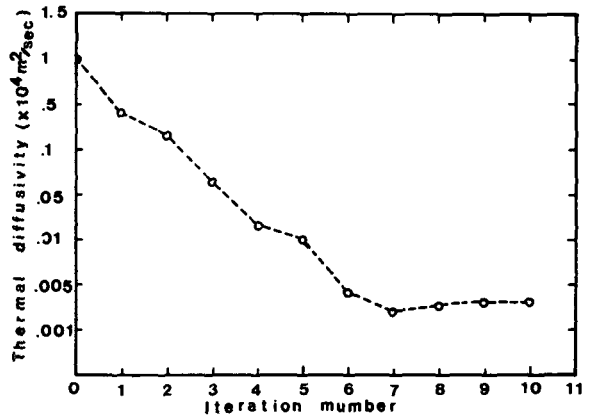


Fig. 6 Variation of thermal diffusivity vs. iteration number for NBS-1450b at ambient temperature, 28°C

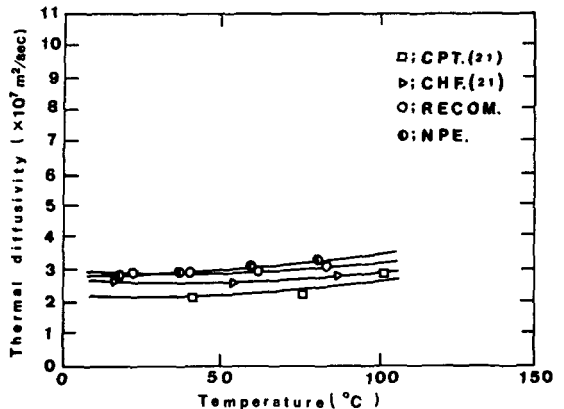


Fig. 7 Comparison of the thermal diffusivities measured by various method for NBS-1450b

초기에 측정된 온도들을 버려야 한다. 또한 시편을 반무한 물체로 고려하기 때문에 실제로 사용하는 시편 두께의 후면에서는 초기온도가 유지되어야 한

다. 따라서 온도가 상승하기 직전까지의 자료들만 이용할 수가 있기 때문에 사용온도 구간이 작을 수밖에 없다. 이 방법에 비해 매개변수 추정법은 실제로 경계조건을 시간의 변화에 따라 측정하여 각 측정점의 값을 이용하여 한점 한점 계산하여 추정해 나가기 때문에 측정과정에서 외란에 의한 온도요동이 발생한다 하더라도 열확산계수의 마지막 추정값에는 크게 영향을 미치지 못한다. 또한 측정온도 전구간에서 얻은 자료를 전부 이용하므로 평균 유효 열확산계수 값은 더욱 신뢰도가 높다. 매개변수 추정법이 오차가 적은 것은 오차의 제곱합을 최소화 시킨 후 구한 값이기 때문이며 이 방법의 장점은 각 경계점에서 실제로 온도를 측정하기 때문에 어떤 종류의 열원을 이용하더라도 동일한 값을 얻을 수 있다.

열원의 종류에 따른 영향이 없음을 규명하기 위하여 동일한 실험장치를 이용하여 일정한 열원을 가한 경우와 계단열원을 가한 경우의 열확산계수를 구하여 비교해 보았다. 계단열원은 소형전원공급기의 전압을 일정하게 유지하다가 측정중 노의 창을 갑자기 닫으므로써 얻을 수 있다. 계단열원에 의한 표면 온도 변화는 Fig. 8에 도시 하였다. 두 열원에 대한 결과치는 Fig. 9에 표시하였으며, 30°C의 열확산계수의 추정값은 일정 열원을 가했을 때 $0.2969 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{sec}$ 였으며, 계단 열원을 가했을 때 $0.2972 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{sec}$ 와 비교하여 차이가 거의 없음을 알 수가 있었다. 이 방법은 식 (26)을 풀이하는 과도추정법이므로 정상법과 비교하여 많은 잇점이 있다. 비선형 매개변수법을 이용하여 단열재료의 열확산계수를 측정할 때 실험에 소요되는 시간은 데이터 수집시간을 포함하여 5분이내로 할 수가 있

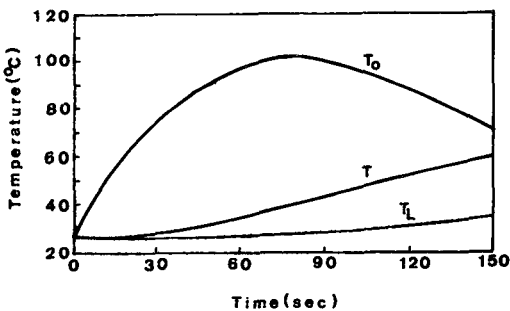


Fig. 8 Temperature history measured by step heating method

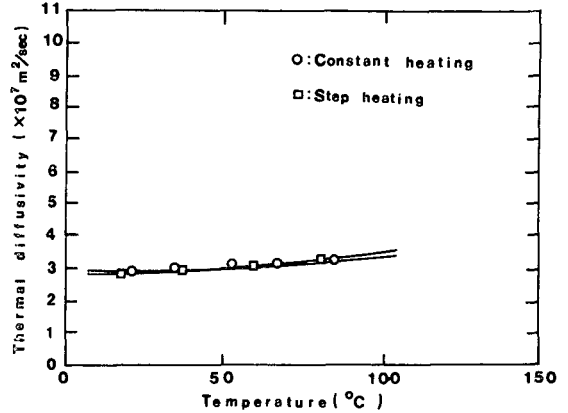


Fig. 9 Comparison of the thermal diffusivities measured by constant heating and step heating

다. 그러나 노내의 온도가 선택한 온도로 평형상태에 도달할 때까지의 시간은 전기로의 열질량 때문에 비교적 긴시간이 소요된다. 그러나 정상법보다는 많은 시간을 단축할 수 있었다. 그러나 비선형 매개변수 추정법도 추정이론의 복잡성 때문에 반드시 자료취득장치 및 컴퓨터를 이용하여야 하며, 추정하려는 매개변수 갯수가 증가함에 따라 추정이 복잡해지고 추정가능성 여부를 감도계수를 이용하여 사전에 검토하여야 한다. 이러한 문제는 앞으로 계속 연구하여야 할 과제이다.

5. 결 론

비선형 매개 변수법을 적용하여 열확산계수를 추정본 연구의 결과로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 비선형 매개 변수법을 이용한 열확산계수 추정법을 확립하고, 이를 실험하여 열유속의 종류에 무관한 열확산계수 추정법을 제시하였다.

(2) 온도를 시간의 변화에 따라 이산적인 측정을 하여 각 측정점에 대한 열확산계수를 추정하므로서 몇몇 점에서의 부정확한 온도의 측정이 최종 열확산계수의 값에 미치는 영향을 극소화할 수 있다.

(3) 매개변수 추정법은 데이터 수집시간을 포함하여 측정시간을 수분 이내로 할 수 있으며, 시편의 크기도 작게 할 수 있어서 정상상태 측정법의 단점을 보완할 수 있다. 또한 열질량이 작은 전기로인 튜브형로를 사용할 경우 온도조절 시간도 작게 할 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Parker, W.J., Jenkins, R.J., Butter, C.P. and Abbott, G.L., 1961, "Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity", *J. of Appl. Phys.*, Vol. 32. No. 9, pp. 1679~1684.
- (2) Parker, W.J., 1962, "Flash Method of Measuring thermal Conductivity", *Proc. of the Second Conference on Thermal Conductivity*, pp. 33~45.
- (3) Lee, H.J., 1975, "Thermal Diffusivity in Layered and Dispersed Composites", Ph.D. Thesis, Perdue University.
- (4) 이관수, 1981, "섬광법에 의한 다층 복합재료의 열확산계수 측정에 관한 연구", 한양대학교 박사학위 논문.
- (5) 차경옥, 1983, "불꽃 시험용 탄소 및 특수강 표준 시편의 열물성치 측정에 관한 연구", 단국대학교 박사학위 논문.
- (6) 배신철, 1985, "동 및 알루미늄 판재의 압연율과 열유동 방향에 따른 열확산 계수의 변화에 따른 연구", 한양대학교 박사학위 논문.
- (7) 김진원, 1986, "섬광법에 의한 적층재료의 열확산 계수 측정에 미치는 열손실 및 펄스시간의 효과, 단국대학교 박사학위 논문.
- (8) 김석원, 이 상현, 박상우, 김승태, 1989, "초고온 열물성 측정기술개발", 한국 표준 연구소.
- (9) Cape, J.A. and Lehman, G.W., 1963, "Temperature and Finite Pulse-Time Effects in the Flash Method for Measuring Thermal Diffusivity", *J. of Appl. Phys.*, Vol. 34, No. 7, pp. 1909~1913.
- (10) Taylor, R.E. and Cape, J.A., 1964, "Finite Pulse-Time Effects in the Flash Diffusivity Technique", *Appl. Phys. Letters*, Vol. 5, No. 10, pp. 212~213.
- (11) Taylor, R.E., 1965, "Investigation of the Heat Pulse Method for Measuring Thermal Diffusivity", *Brit. J. Appl. Phys.*, Vol. 16, pp. 509~515.
- (12) Larson, K.B. and Koyama, K., 1967, "Correction for Finite-Pulse-Time Effects in very Thin Samples using the Flash Method of Measuring Thermal Diffusivity", *J. of Appl. Phys.*, Vol. 38, No. 2, pp. 465~474.
- (13) Rooke, S.P. and Taylor, R.E., 1986, "Transient Experimental Technique for the Determination of the Thermal diffusivity of fibrous Insulation", Contributed by the Heat Transfer Division for Publication in *Journal of Heat Transfer*.
- (14) Taylor, R.E., Rooke, S.P. and Shoemaker, R.L., 1986, "Heat Pulse Technique for Mmerasuring Diffusivity of Ceramic Fiber Material", AISI project No. 45-475.
- (15) Marquardt, D.W., 1963, "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters", *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol. 11, No. 2, June, pp. 431~441.
- (16) Hartley, H.O., 1961, "The Modified Gauss-Newton for the Fitting of Non-Linear Regression Functions by Least Squares", *Technometrics*, Vol. 3, No. 2, May, pp. 269~280.
- (17) Stolz, G., 1960, "Numerical Solution to an Inverse Problem Heat Conduction for Simple Shapes", *J. of Heat Transfer*, Vol. 82, pp. 20~26.
- (18) Sparrow, E.M., Haji-Sheikh, A. and Lundgren, T. S., 1964, "The Inverse Problem in Transient Heat Conduciton", *J. of Appl. Mech.*, pp. 369~375.
- (19) Beck, J.V., 1969, "Determination of Optimum, Transient Experiments for Thermal Contact Conductance", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 12, pp. 621~633.
- (20) Box, G.E.P. and Lucas, H.L., 1959, "Design of Experiments in Non-Linear Situation", *Biometrika*, Vol. 46, pp. 77~90.
- (21) 김태갑, 1989, "절연재료의 열확산계수 측정에 관한 연구", 단국대학교 석사학위 논문.