

<論 文>

기하학적 · 재료적 비선형성을 갖는 중첩된 판 스프링의 특성해석에 관한 연구

김형구* · 임정식* · 김일곤* · 손동성**

(1989년 8월 23일 접수)

A Study on the Characteristic Analysis of Superposed Leaf Springs with Geometric and Material Nonlinearities

Hyeong-Koo Kim, Jeong-Sik Yim, Il-Kon Kim and Dong-Seong Sohn

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), Elastic Plastic Analysis(탄소성해석), Constraints(구속조건), Holddown Spring(홀드다운 스프링), Geometric Nonlinearity(기하학적 비선형성), Material Nonlinearity(재료적 비선형성)

Abstract

A general analysis method is proposed for analysis of the superposed structures with geometric and material nonlinearities. It is presumed that no friction occurs between structures. It utilizes a shell element for the geometric and material nonlinearities and imposes various deformation constraints for the contact and interaction between structures. To show the reliability and effectiveness of this method, superposed cantilevers for which exact solutions can be obtained and holddown spring assemblies which are now used in PWR reactors are chosen as analysis models. The results of analyses were compared with exact solution in the case of cantilevers and with test results in the case of holddown spring assemblies. The analysis results obtained by this method showed good agreement with the reference values.

기 호 설 명

- B : 변형도-변위 행렬
- D : 응력-변형도 행렬
- E : 탄성계수
- E_T : 변형률 경화 계수
- H : 변형률 경화 파라미터
- K : 강성 행렬
- k : 경화 파라미터
- R : 외력으로 인한 상당 절점력 벡터
- U : 변위 벡터
- ϵ : Green's 변형률 벡터

- σ : 2nd Piola-Kirchhoff 응력 벡터
- Ψ : 잔류력 벡터
- π : 계의 총 포텐셜
- μ : 계의 변형도 에너지
- ω : 하중으로 인한 총 포텐셜
- ν : 프와송비

1. 서 론

중첩된 판스프링은 그 구조적 특성상 사용 목적에 따라 기하학적 변수를 이용한 수식이나 실험 등에 의해 그 특성을 구할 수 있는데, Fig. 1과 같이 개개의 판스프링의 단면적이 불균일하며 또한 이러

*정회원, 한국에너지연구소 경수로핵연료사업부
**한국에너지연구소 경수로핵연료사업부

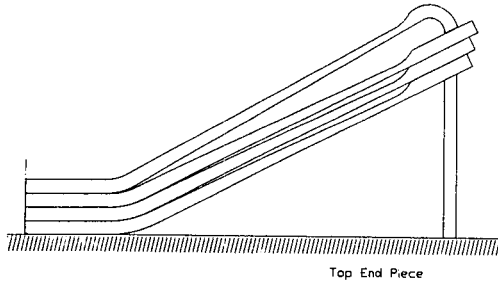


Fig. 1 Holddown spring assembly

한 판 몇 개가 중첩되어 한쪽 선단만 나사등에 의해 체결되어 있는 홀드다운 스프링의 경우, 개개의 스프링이 갖는 비선형성과 중첩으로 인한 판스프링 간의 접촉 및 상호작용, 그리고 전체 스프링의 변형이 소성변형까지 변형해감으로 인해 매우 복잡한 특성을 나타낸다. 이 스프링은 원자력 발전소의 핵연료 집합체와 같이 매우 중요한 부품의 일부로 장착됨으로써 외력에 대한 충분한 저항력이나 타부품에 좌굴등의 영향을 주지 않을 특성을 가져야 하므로, 이 특성에 대한 정확한 데이터의 확보가 설계시 필수적이다. 이러한 비선형적 특성을 가진 스프링의 특성은 주로 외팔보 특성을 이용한 실험적 경험식으로 단순화시킨 수식 또는 개개의 판스프링에 대한 유한요소해석 결과를 산술적 합산을 통해 일차적인 특성치를 구한 다음, 이 자료를 토대로 하여 제작을 한 후 실험을 수행하여 설계에 필요한 데이터를 얻고 있다⁽¹⁾. 그러나, 이러한 해석 방법은 실제 데이터를 얻기에는 너무 단순화되어 있고, 또한 실험이라는 과정을 통하여 따로 데이터를 구하여야 하기 때문에, 기하학적 자료만을 가지고 있거나 설계 변경이 되는 경우 그 특성을 예측하는데 난점이 있으므로, 최근에 활발히 연구가 되고 있는 접촉 문제를 이용한 방법을 중첩된 판스프링의 특성 해석에 도입하여 그 특성을 구하였다.

구조물의 비선형 해석은 1970년 Ahmad와 Zienkiewicz⁽²⁾가 처음으로 시도해 보았으나 그 수식은 변형 과정에 있어 하중의 증분에 제약을 안고 있었으며, 1983년 Surana⁽³⁾은 Ahmad가 이용했던 셀 요소에 total Lagrangian식을 이용하여 이 제약을 해결할 수 있는 기하학적 비선형을 갖는 문제를 해석하였다. 그리고 1984년 Oliver와 Onate⁽⁴⁾는 3차원 셀 구조물의 기하학적 비선형 문제를 다룰 수 있는 2차원적인 수식을 발표하였으며, 1985년

Yang과 Saigal⁽⁵⁾은 기하학적 및 재료의 비선형성을 함께 고려해 줄 수 있는 수식을 발표하였는데, Yang 등은 이 수식에 있어 요소당 48개의 자유도를 갖는 얇은 셀 요소를 사용함으로써 해석에 필요한 수식수가 많아질 뿐 아니라 수식이 복잡해짐으로 인해 계산상 어려움이 많다. 또한 최근에 활발히 연구되고 있는 구조물간의 접촉문제는 대개 강체와의 접촉문제에 국한되어 사용됨으로써 함께 변형을 일으키는 중첩 구조물에서의 적용에는 많은 제약을 갖고 있다⁽⁶⁻¹⁰⁾.

본 연구에서는 일반적인 셀 요소에 대해 von Mises의 항복조건에 입각한 탄소성 구성방정식과 total Lagrangian식을 바탕으로한 비선형 해석이론에 Lagrange Multiplier식을 이용한 구속조건(constraints)을 도입하여, 중첩된 비선형 구조물이 갖고 있는 제반 비선형성을 고려할 수 있도록 수식화하였으며, 이를 엄밀해를 구할 수 있는 두 개의 외팔보가 중첩된 경우에 적용하여 엄밀해와 비교하였으며, 또한 실제적으로 국산 핵연료 집합체에 사용되는 각 홀드다운 스프링 집합체에 대한 특성 해석을 수행하여 그 결과를 실험치와 비교하여 그 비교치가 근사함을 보임으로써 본 방법의 신뢰성과 효용성을 보였다.

2. 중첩된 비선형 구조물의 해석 이론

2.1 셀 요소의 구성방정식

본 연구에서는 비교적 수식이 간단하며 비선형 해석에서 해의 정도도 높다고 판단되는 4절점 20자유도의 셀 요소를 사용하며, 이 셀 요소는 다음과 같은 Kirchhoff-Love의 가정으로 3차원 연속체로서 셀을 다루도록 수식화된다^(11,12).

● Kirchhoff-Love의 가정

(1) 변형전의 셀의 중앙면에 대한 법선은 변형 후에도 직선을 유지하고 또한 변형 후의 중앙면에 대한 법선이다.

(2) 셀의 두께 방향의 수직 응력은 다른 응력에 비해 매우 작고, 무시할 수 있다.

아울러 본 연구에서 접촉 문제를 해석하기 위해 접촉부의 마찰은 무시할 수 있다고 가정하였다. 이러한 가정하에서 기본적인 요소의 형상은 절점을 포함하는 중앙면과 이들 절점에 대한 수직 벡터(normal)로 정의된다. 즉, Fig. 2에서 보는 바와 같이 만일 ζ 를 임의의 절점 J 에서의 한 수직 벡터

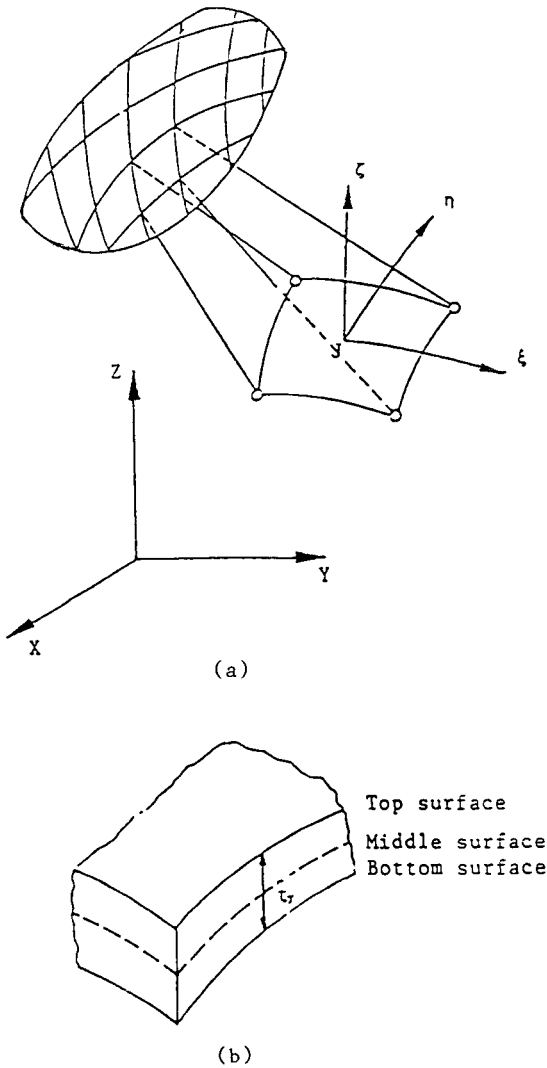


Fig. 2 Shell element ; (a) Coordinate (b) Midsurface and normal

라 한다면 Norm $\|\zeta\| = t_r$ 는 요소가 변형하기전 절점 J 에서의 요소두께를 나타낸다. 이와 같이 하여 이 요소 형상을 다항식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\{r\} = \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) r_{0j} + \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) \frac{h}{2} \zeta \quad (1)$$

단, $\zeta = \frac{2t}{h}$

r_{0j} : 셸 중양면의 각 절점의 위치벡터

N_j : 절점 J 의 형상함수(shape function)

n : 각 요소의 절점수

h : 요소의 두께

셸 이론에서 요소의 변형도 변위 관계를 증분형으로 간략히 표시하면⁽¹⁴⁾,

$$\delta \varepsilon = [A] \delta g \quad (2)$$

로 표시되고, 여기서 벡터 g 는 변위 벡터 내의 각 좌표축 방향으로의 미분형으로

$$dg = [G] du = [B] du \quad (3)$$

단, $[B] = [A][G]$

로 표시된다.

그리고 재료를 탄소성 재료라 할 때 그 응력과 변형도 사이의 관계는 다음과 같이 주어질 수 있다.

$$d\sigma = [D_T] d\varepsilon \quad (4)$$

이 때 재료가 탄성영역 내에 있는 경우 재료는 Hooke의 법칙을 따르고 $[D_T]$ 는 탄성 계수 행렬로 다음과 같이 표시된다.

$$[D_T] = [D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

그리고 소성 영역에서는 변형도의 총증분은 탄성 부분과 소성 부분으로 나눌 수 있는 것으로 가정하면⁽⁴⁾,

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (6)$$

과 같다.

일반적으로 항복 표면은

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (7)$$

그리고 소성포텐셜은

$$Q(\sigma, k) = 0 \quad (8)$$

로 표시된다^(11,14).

식 (4)과 (5)로부터 탄성 변형도는

$$d\varepsilon^e = [D]^{-1} d\sigma \quad (9)$$

이고, 소성 변형도는

$$d\varepsilon^p = d\lambda \{a^*\} \quad (10)$$

단, $\{a^*\} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$, $d\lambda$ 는 양의 비례 상수

로 표시된다.

그리고 소성 변형동안 응력들은 항복면상에 존재하게 되므로

$$dF = \{a\}^T d\sigma - A d\lambda = 0 \quad (11)$$

단, $\{a\} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$, $A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk$

이다. 이때 만일 항복면이 단축 응력(uniaxial stress)항으로 정의된다면 A 는 단축응력-소성변형

도 곡선의 기울기 H 와 같게 되므로 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$A = H = \frac{E_r}{1 - E_r/E} \quad (12)$$

식 (9), (10)을 (6)에 대입하면

$$d\epsilon = [D]^{-1} d\sigma + d\lambda \{a^*\} \quad (13)$$

식 (13)에 $\{a\}^T [D]$ 를 곱하여 $d\sigma$ 를 소거하면

$$\{a\}^T [D] d\epsilon = A d\lambda + \{a\}^T [D] \{a^*\} \quad (14)$$

식 (14)에서 $d\lambda$ 를 구해 식 (13)에 대입하면

$$d\sigma = [D_r] d\epsilon$$

$$\text{단, } [D_r] = [D] - \frac{[D] \{a^*\} [D] \{a\}^T}{A + \{a\}^T [D] \{a^*\}} \quad (15)$$

를 얻는다.

2.2 평형 방정식

가상일의 원리를 적용하여 구할 수 있는 구조물의 정역학적인 평형 방정식은

$$\Psi_{(w)} = R_{(w)} - \int_V [B]^T \sigma dV = 0 \quad (16)$$

이고, 여기서 벡터 $R_{(w)}$ 를 절점변위에 독립한 것으로 간주하고 식 (16)을 증분형으로 표시하면

$$d\Psi = dR - \int_V d[B]^T \sigma dV - \int_V [B]^T d\sigma dV \quad (17)$$

이 된다. 식 (17)에 앞에서 구한 응력-변형도 및 변형도 변위 관계식을 대입하면

$$d\Psi = dR - [K]^T dU \quad (18)$$

을 얻게 된다.

2.3 구속 조건(Constraints)의 도입

본 논문에서 해석 대상으로 삼고 있는 홀드다운 스프링 집합체와 같은 복합 판스프링에서 상부 리이프(leaf)에 어떤 하중이 작용할 때 하부 리이프에 미치는 하중과 변위가 모두 미지수가 되므로 이 미지수 중 하나를 풀지 않고서는 해를 얻을 수 없다. 그러나 하부 리이프의 변위는 상부 리이프의 변위에 종속되는데 착안하여 다음과 같은 구속조건을 도입한다. 먼저 정상 상태에서의 구조물의 포텐셜에너지는 다음과 같다^(13,15).

$$\pi = \mu - \omega \quad (19)$$

따라서,

$$\pi = 1/2 U^T K U - U^T R \quad (20)$$

이고, 계(system)가 정상상태를 유지하기 위해서는

$$\frac{\partial \pi}{\partial U_i} = 0 \quad (\text{모든 } i \text{에 대해서}) \quad (21)$$

를 만족하여야 한다.

여기서, 임의점의 변위를 U_i^* 라 할 때 다음과 같이 주어질 수 있다고 가정한다.

$$\text{즉, } U_i = U_i^* \quad (22)$$

그러면 식 (20)을 변형하여

$$\pi^* = 1/2 U^T K U - U^T R + \lambda (U_i - U_i^*) \quad (23)$$

이때 λ 는 임의의 변수이다.

식 (23)에 $d\pi^* = 0$ 를 적용하면

$$\delta U^T K U - \delta U^T R + \lambda \delta U_i + \delta \lambda (U_i - U_i^*) = 0 \quad (24)$$

를 얻을 수 있다.

그러면, δU 와 $\delta \lambda$ 는 임의상수이므로

$$\begin{bmatrix} K & e_i \\ e_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ U_i^* \end{bmatrix} \quad (25)$$

를 얻는다. 여기서 e_i 는 i 번째만 1이고, 나머지는 모두 0인 벡터이다. 그러면, 홀드다운 스프링 집합체에서 톱리이프와 미들리이프가 접촉하는 부위에서의 톱리이프의 변위를 독립적인 변위 U^* 라 놓고, 이 변위에 종속되는 변위를 하부 리이프에 부과하면 식 (25)를 통해 홀드다운 스프링 집합체에 대한 특성해석을 수행할 수 있다. 이 식을 modified Newton-Raphson 반복법을 사용하여 매 스텝해를 구하였다.

3. 해석결과 및 고찰

3.1 2개의 단순 외팔보가 중첩된 문제에서의 적용

본 방법의 이론적 타당성을 보이기 위해 먼저 엄밀해를 구할 수 있는 Fig. 3과 같은 2개의 외팔보

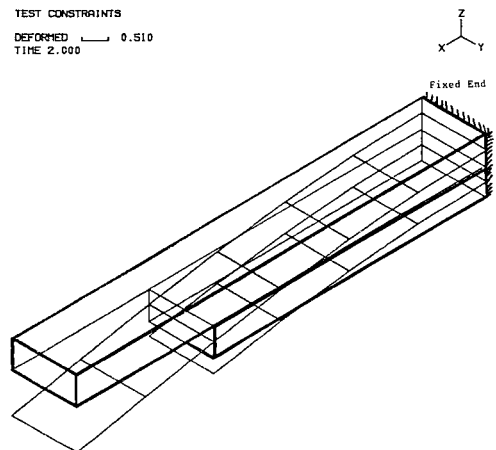


Fig. 3 Analysis of superposed cantilevers problem

Table 1 Comparison of F.E.M. solution with exact solution for constraint of Z-translation deformation

Forces (N)	Displacements(mm)		Deviation* (%)
	F.E.M.	Exact solution	
100	0.179799	0.1842	2.39
200	0.359651	0.3684	2.37
300	0.539434	0.5526	2.38
400	0.719114	0.7368	2.40

Table 2 Comparison of F.E.M. solution with exact solution for constraint of Y-rotation deformation

Forces (N)	Displacements(mm)		Deviation* (%)
	F.E.M.	Exact solution	
100	0.180500	0.1842	2.0
200	0.361045	0.3684	1.996
300	0.541523	0.5526	2.0
400	0.721900	0.7368	2.02

$$*Deviation(\%) = \left| \frac{\text{Exact Sol.} - \text{FEM}}{\text{Exact Sol.}} \right| \times 100$$

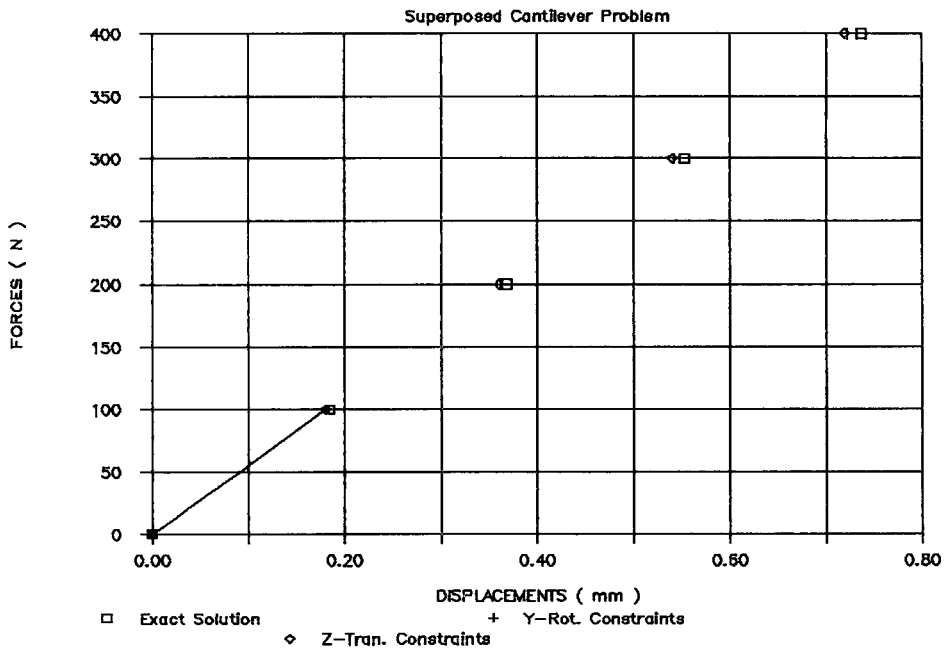


Fig. 4 Comparison of F.E.M. solution with exact solution for both constraints of Z-translation and Y-rotation

가 중첩된 문제에 적용하여 보았다.

Table 1,2는 유한요소 해석 결과와 엄밀해를 비교한 것이며, Fig. 4는 Table 1,2를 도식적으로 나타낸 것이다. Table 1,2에서 적용 가능한 2가지 구속 조건에 대해 검토하였는데, 하나는 Z-방향 변위 자유도를 구속한 것이고, 또 하나는 외팔보의 Z-방향 변형으로 인해 발생할 Y-방향 회전 자유도를 구속한 것이다. 물리적으로 외팔보의 변형 진행 상태를 고려하면 Z-방향 변위 자유도보다는

Y-방향 회전 자유도에 대한 구속 조건이 더 타당한 것으로 판단되고 해석 결과도 이를 보여주고 있다.

Table 2에서 보는 바와 같이 유한요소해석 결과는 엄밀해와 약 2% 정도의 오차를 보이는데 이는 유한요소해석시 요소를 비교적 크게(10×10mm) 나누었고, 또한 셀 이론과 빔 이론의 해석 차이에서 오는 오차라 판단되며, 본 연구에서 제안한 방법을 통해 만족할 만한 근사해를 얻을 수 있다는 판단을 내릴 수 있다.

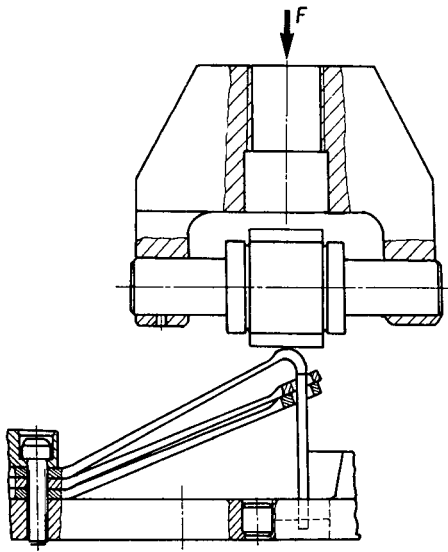


Fig. 5 Experimental equipments

3.2 홀드다운 스프링에의 적용

현재 우리나라 원자력 발전소에서 사용되고 있는 홀드다운 스프링은 크게 두 가지 종류인데, 하나는 한 개의 상부 리이프와 두 개의 하부 리이프를 구

성된 14형이고, 또 하나는 한 개의 상부 리이프와 세 개의 하부 리이프를 구성된 17형 홀드다운 스프링이다. 이 두 가지 형태의 홀드다운 스프링은 리이프 수와 그 기하학적인 제원이 서로 상이하여 그 특성이 다른 경향을 갖는다.

이들 홀드다운 스프링의 특성은 모두 실험에 의해서만 그 특성이 파악되고 있는데 Fig. 5는 그 실험장치를 도시한 것이며 이 실험에 의해 구해진 특성곡선은 Fig. 6과 Fig. 7에 나타나 있다.

Fig. 8과 Fig. 9는 각각 14형과 17형 홀드다운 스프링 모델을 나타낸 것으로, 그림에서 윤곽선은 변형전 모습이고 격자선은 중앙면의 변형모습을 나타낸다. Fig. 10과 Fig. 11은 각 해석모델의 Mesh를 나타낸 것이다.

본 연구에서는 3000N의 수직방향 하중이 상부 리이프에 작용할 때 홀드다운 스프링의 대칭성을 고려하여 1/2만을 해석하였다.

Table 3은 홀드다운 스프링 재질인 Inconel 718의 기계적 성질과 각 모델의 요소수 및 절점수를 나타낸 것이다.

Fig. 12와 Fig. 13은 각각 14형 및 17형 홀드다운 스프링 집합체에 대한 유한요소해석 결과와 실험치

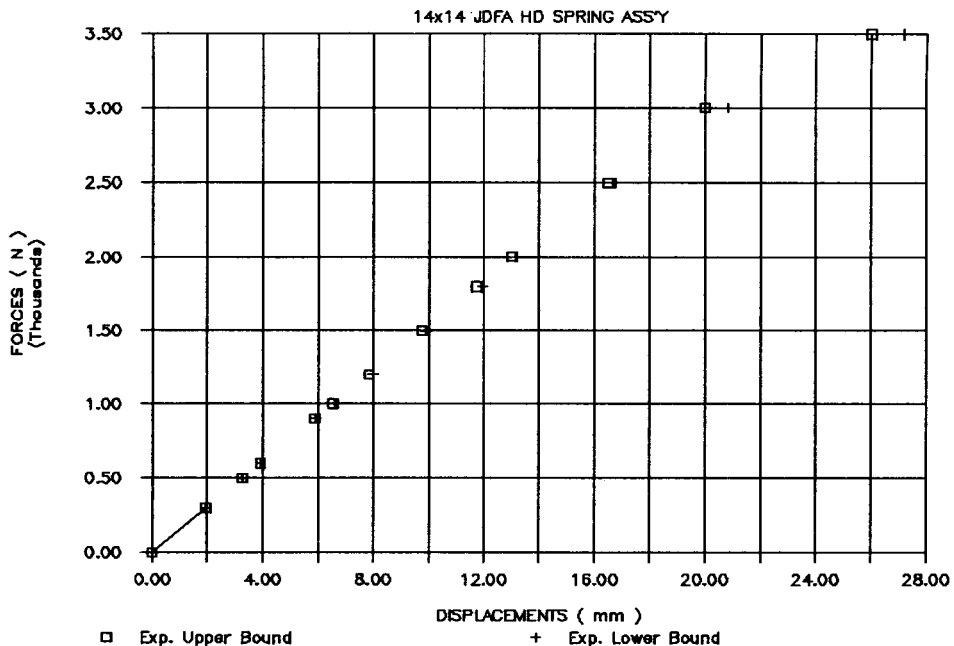


Fig. 6 Experiment results for 14x14 type holddown spring assembly

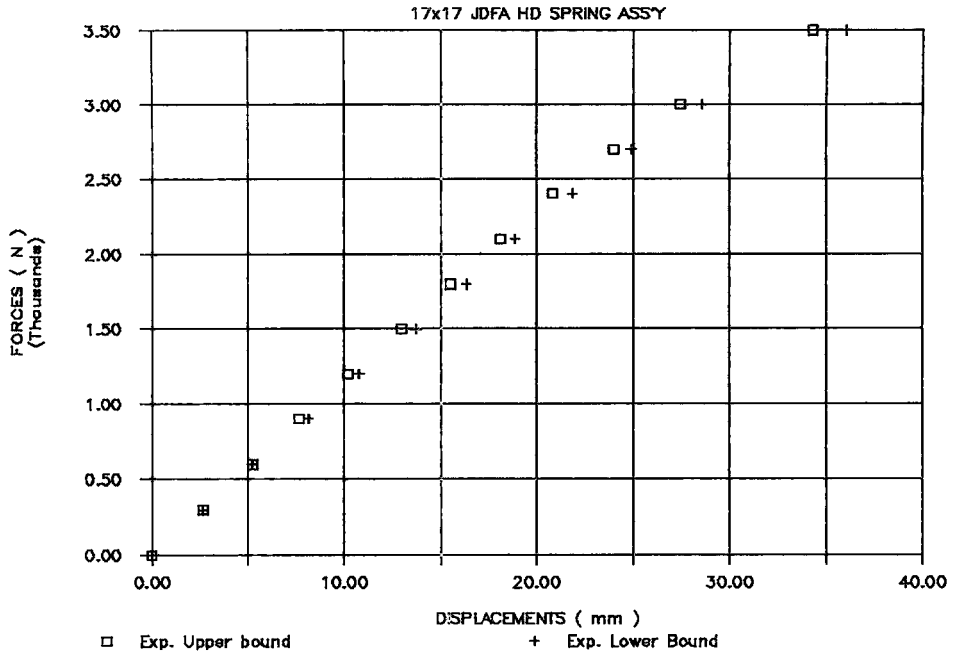


Fig. 7 Experiment results for 17×17 type holddown spring assembly

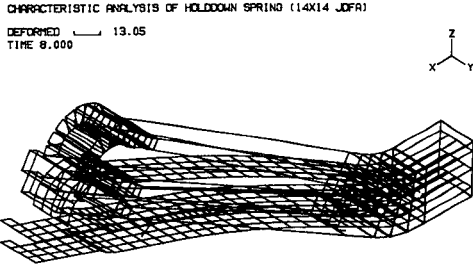


Fig. 8 Characteristic analysis of 14×14 type holddown spring assembly

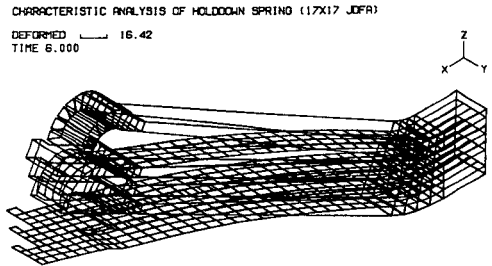


Fig. 9 Characteristic analysis of 17×17 type holddown spring assembly

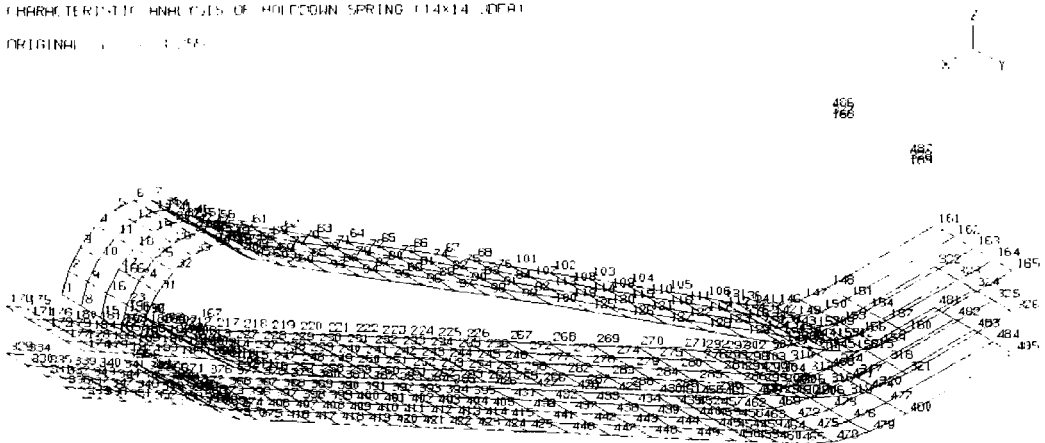


Fig. 10 Midsurface and mesh generation of 14×14 type analysis model

CHARACTERISTIC ANALYSIS OF HOLDDOWN SPRING (17x17 TYPE)
 ORIGINAL LL : 3.734

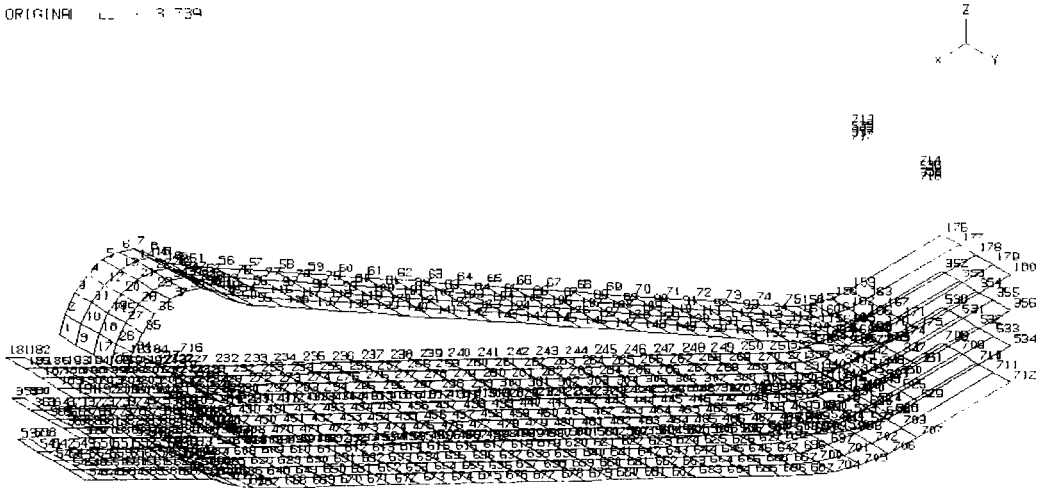


Fig. 11 Midsurface and mesh generation of 17x17 type analysis model

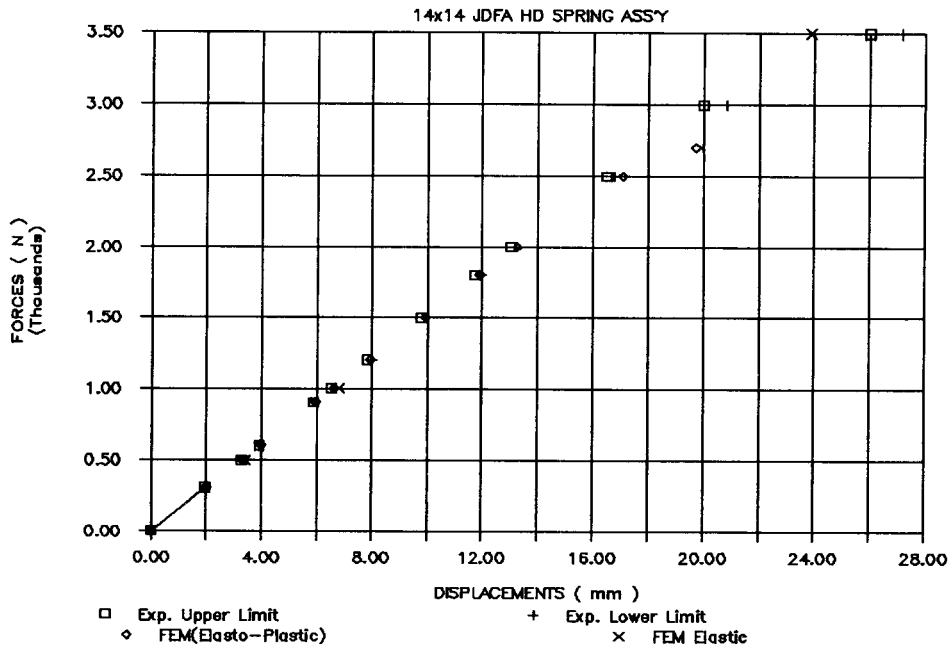


Fig. 12 Comparison of characteristic curves for 14x14 type holddown spring assembly

를 비교한 것이다. 이 그림에서 보는 바와 같이 탄성영역에서는 유한요소 해석 결과와 실험치는 매우 잘 일치하고 있으나, 소성변형이 발생하면서부터 조금씩 오차가 나타난다. 이것은 모재인 Inconel 718의 기계적 성질에 있어 응력-변형도 곡선에 분산 및 오차가 있을 것으로 예상되고, 실험이 갖는

가공경화 현상과 스프링이 변형해 감에 따라 고정단의 접촉면적과 상부 리이프에서의 하중작용점이 변화하여 실제 스프링의 작용 팔길이(active arm length)가 줄어드는 경향, 그리고 실험에 사용한 실험의 재원과 공칭치수를 사용한 해석모델 사이에 예상되는 치수차이 등 해석상 고려해주시기 어려운

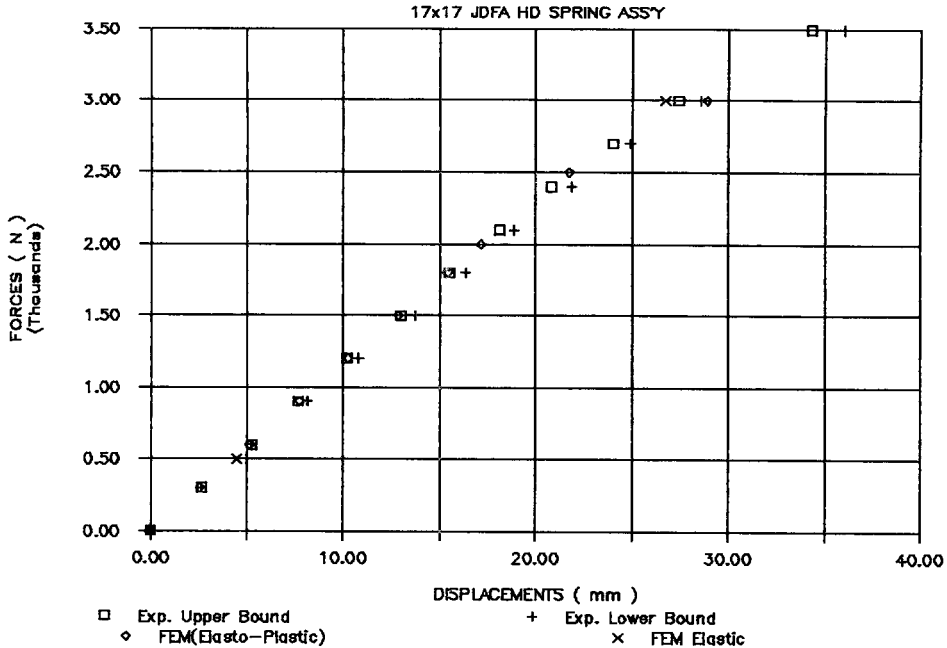


Fig. 13 Comparison of characteristic curves for 17×17 type holddown spring assembly

Table 3 Mechanical properties of inconel 718 and number of element and nodal points of 14×14 and 17×17 type holddown spring, respectively

	14×14 type anal. model		17×17 type anal. model	
· Material	Inconel 718			
Young's modulus	200,000N/mm ²			
Poisson's ratio	0.3			
Yield's strength	1033.5N/mm ²			
· Plastic path				
Stress(N/mm ²)	1127	1210	1258	1280
Strain	0.0061	0.0074	0.0096	0.0160
· F.E.M. model				
Element type	Shell element			
No. of element	368		545	
No. of nodal point	487		718	

해석 방법은 실험에만 의존하거나 또는 모델을 아주 단순화시켜 여기에서 얻은 경험식에 의존하여 왔다. 특히 원자로에 사용되는 홀드다운 스프링 집합체의 경우 그 특성의 중요성과 형상 및 특성의 복잡함으로 인해 전적으로 실험에만 의존해 그 특성 파악이 이루어지고 있다. 그러나, 본 연구에서는 구조물이 갖는 기하학적인 비선형성과 재료적 성질상의 비선형성을 고려하고, 또한 Lagrange Multiplier를 이용하여 구조물의 중첩으로 인한 접촉 및 상호작용으로 인한 비선형성을 고려해 줄 수 있도록 한 범용 해석법을 제시하였다. 그리고, 제안한 해석법을 엄밀해결을 구할 수 있는 중첩된 외팔보와 실험결과를 가지고 있는 홀드다운 스프링 집합체에 적용하여 그 해석결과를 비교해 보임으로써 해석법의 신뢰성과 효용성을 보였다.

参 考 文 献

(1) Sipush, P.J., 1984, "PWR Fuel Rod Design and Fuel Assembly Design", Lecture Notes, KAERI, Dae Jeon.
 (2) Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C., 1970, "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 2, pp. 419~451.

문제점으로 인한 누적오차라 판단된다.

4. 결 론

기존의 중첩된 비선형 판 스프링 집합체의 특성

- (3) Surana, Karan S., 1983, "Geometrically Nonlinear Formulation for the Curved Shell Elements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 19, pp. 581~615.
- (4) Oliver, J. and Onate, E., 1984, "A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures Using Finite Elements. Part I. Two-Dimensional Problems: Shell and Plate Structures", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 20, pp. 2253~2281.
- (5) Yang, T.Y. and Sunil Saigal, 1985, "A Curved Quadrilateral Element for Static Analysis of Shells with Geometric and Material Nonlinearities", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 21, pp. 617~635.
- (6) Bathe, K.J. and Chaudhary, A., 1985, "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 21, pp. 65~88.
- (7) Klarbring A. and Bjorkman, G., 1988, "A Mathematical Programming Approach to Contact Problems with Friction and Varying Contact Surface", *Comput. Struct.*, Vol. 30, pp. 1185~1198.
- (8) Fischer, U. and Melosh, R.J., 1987, "Solving Discretized Contact Problems Using Linear Programming", *Comput. Struct.*, Vol. 25, pp. 661~664.
- (9) Mehlhorn, G. and Kollegger, J., 1985, "Nonlinear Contact Problems-A Finite Element Approach Implemented in ADINA", *Computers and Structures* Vol. 21, No. 1, pp. 69~80.
- (10) Lee, Gyu Bong and Kwak, Byung Man, "Formulation and Implementation of Beam Contact Problems under Large Displacement by a Mathematical Programming", *Computers and Structures*, Vol. 31, No. 3, 1989, pp. 365~376.
- (11) 山田嘉昭, 1970, "コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A塑性・粘弾性", 培風館, 東京, pp. 18~84.
- (12) 川股重也, 1970, "コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-6-Aシェル構造解析", 培風館, 東京, pp. 56~79.
- (13) Tinsley Oden J. and Carey, Graham F., 1983, "Finite Elements-A Second Course", Prentice-Hall, New Jersey, pp. 96~111.
- (14) Zienkiewicz, O.C., 1977, "The Finite Element Method", 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, pp. 304~328, pp. 450~526.
- (15) Bathe, Klaus-Jurgen, 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, New Jersey, pp. 66~76, pp. 96~193.