

(論 文)

# 외주에 균일한 압축을 받는 두꺼운 복합원관의 분지거동

김영석\* · 추만석\*\* · 정태진\*\*\* · Y. Tomita\*\*

(1989년 7월 15일 접수)

## Bifurcation Behaviours of Composite Tubes with Two Different Materials Subjected to Uniform Radial Shrinkage at the External Surface

Young Suk Kim, Man Suk Chu, Tae Jin Jung and Yoshihiro Tomita

**Key Words :** Elastic-Plastic Deformation(탄소성 변형), Composite Tube(복합원관), Bifurcation(분지), Surface Type Bifurcation(표면형 분지), Uniform Radial Shrinkage(반경방향 균일압축)

### Abstract

Nonaxisymmetric bifurcation behaviours of composite tubes with two different materials subjected to uniform radial shrinkage at the external surface have been investigated and compared with those of single tube. The effect of material parameters normalized with respect to those of outer tube upon the bifurcation point and corresponding mode has been clarified. The parameters substantially affect the bifurcation mode with long-wavelength so that the composite tube with low hardening exponent or with high yield stress of inner tube destabilizes the overall deformation of the tube. However surface type bifurcation, short-wavelength mode, shown on the traction-free inner surface is hardly affected by the material parameters. The surface type bifurcation completely depends on the material characteristics of inner tube and the bifurcation point of composite tube almost coincides with that of single tube.

### 기 호 설 명

- $\sigma_{ij}$  : Cauchy 응력
- $Et$  : 진응력-변형률곡선의 접선계수
- $Es$  : 진응력-변형률곡선의 할선계수
- $S_{ij}$  : Kirchhoff 응력
- ( $\cdot$ ) : 물질도함수
- ( $\cdot$ ) $_{,j}$  : 공역미분  $\partial(\cdot)/\partial x_j$
- $\delta v$  : 가상변위 속도
- ( $\cdot$ ) $^*$  : 기본해와 분지해의 차이
- ( $\nabla$ ) : ( $\cdot$ )의 Jaumann 도함수

- $\epsilon_i$  : 대수변형률
- $\lambda_i$  : 주 변형량
- $\varphi$  : 유동함수(flow function)

### 1. 서 론

두꺼운 원관이 무마찰 다이를 통한 인발 또는 노우징 공정에서와 같이 원관의 외주가 균일하게 압축변형을 받는 경우, 압축률이 어느 한도를 넘으면 원주방향에 주름이 발생하거나 내표면에 미세한 돌기를 수반하는 불균일한 변형이 생기는 경우가 있다. 이 한도를 넘어서 압축을 계속하면 내표면에 발생한 돌기가 성장하고 불균일한 변형이 원관의 내부로 진행되어 간다. 경우에 따라서는 이 불균일

\*정회원, 산업과학기술연구소 강재연구부  
 \*\*일본 神戸大學 工學部 機械工學科  
 \*\*\*정회원, 군산대학 기계설계학과

한 변형이 제한된 영역에 국소화하는 전단밴드로 성장하여 원관의 파괴를 야기한다. 이와같은 국소 변형에 앞서 변형의 불균일 현상을 초기의 기본 변형경로(축대칭 변형)로부터 다른 변형경로(비 축대칭 변형)에의 분지(bifurcation)로 취급하여 분지해석을 통하여 분지점 및 분지모우드를 구하고, 변형 경로를 분지 후의 다른 경로로 옮겨서 변형해석을 계속하면 변형의 국소화과정을 추적할 수 있다<sup>(3)</sup>. 지금까지 단일원관에 있어서 재료특성 및 원관형상이 원관의 분지거동 및 변형의 국소화에 미치는 영향이 조사되었다<sup>(1,2)</sup>. 한편 최근 서로 다른 2종류의 금속으로 구성된 복합재의 사용이 증가함에 따라 복합재의 소성변형거동에 대한 관심이 고조되어 이에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 복합재의 압축, 압연가공시에 재료의 변형거동에 관하여 Dorris와 Nemat-Nasser, Steif 등의 연구가 있다<sup>(4,5)</sup>. 그러나 서로 다른 2종류의 금속으로 구성된 복합원관의 소성변형중의 분지거동에 대한 검토에는 거의 없다.

본 연구에서는 2종류의 다른 금속 재료로 구성된 복합원관이 축방향으로 평면변형 상태에서 외주에 균일한 반경방향 압축변형을 받는 경우의 분지해석을 통하여 내외층의 재료특성비의 영향을 조사하여 단일원관의 경우와 비교하였다. 원관의 변형을 지배하는 구성식으로서 J2 코너이론(J2-corner theory)<sup>(6)</sup>이 변형 불안정현상 해석에 유용하지만 본 분지해석의 경우에는 원관의 축대칭 변형이 유지되어 응력 상태가 비례부하 경로로부터 크게 벗어 나지않고 Budiansky의 전부하조건(total loading condition)<sup>(7)</sup>을 만족하므로 J2 코너이론은 아탄성 J2 변형이론(hypoelastic J2-deformation theory)<sup>(8)</sup>으로 나타내진다.

한편 분지거동을 가능한 한 간단한 형태로 나타내기 위하여 재료는 비압축성으로 가정하였다.

## 2. 이론해석

### 2.1 기초이론

체적  $V$ , 표면적  $S$ 인 물체가 표면의 일부  $S_V$  상에서 변위속도  $v_i$ 가 주어지고 나머지 표면  $S_t$  상에서 표면력 속도  $T_i$ 가 가해지고 있는 경우를 생각한다. 이 속도형 탄소성 경계치 문제에서 물체내의 변위속도는 Updated Lagrange 표시에 의한 다음의 가상일의 원리를 만족한다.

$$\int_V (\dot{S}_{ij} + \sigma_{mj} v_{i,m}) \delta v_{i,j} dV = \int_{S_t} \dot{T}_i \delta v_i ds \quad (1)$$

여기서  $(\dot{\quad})$ 는 물질도함수,  $(\quad)_{,j}$ 는 공역미분  $\partial(\quad)/\partial x_j$ ,  $\delta v_i$ 는 가상변위 속도를 나타낸다. 한편 Cauchy 응력  $\sigma_{ij}$ 와 Kirchhoff 응력  $S_{ij}$ 의 속도관계는 다음과 같다.

$$\dot{S}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{im} v_{j,m} - \sigma_{mj} v_{i,m} - \sigma_{ij} v_{m,m} \quad (2)$$

식 (1)을 기초로 유한요소해석을 행하면 평형상태에서의 해가 얻어진다.

변형이 충분히 작은 경우에 식 (1)은 유일한 해(기본해)를 갖지만, 변형이 크게되어 어느 한도를 넘으면 해의 유일성이 깨어져 변형의 분지(분지해)가 발생하게 된다. 이런 분지 발생점 및 대응하는 분지모우드를 구하기 위해서 Hill의 유일성과 분지에 관한 일반정리<sup>(9)</sup>가 통상 이용되고 있다. Hill의 분지발생에 대한 충분조건은 다음의 변분방정식으로 주어진다.

$$\delta I = 0, I = \int_V (\dot{S}_{ij}^* + \sigma_{mj} v_{i,m}^*) v_{i,j}^* dV \quad (3)$$

여기서  $(\quad)^*$ 는 분재해와 기본해의 차이를 나타내고, 응력속도  $\dot{S}_{ij}^*$ 는 소성포텐셜로부터 유도되는 구성식에 의하여 변형률속도  $d_{kl}^*$ 과 식 (4)의 관계를 갖는다.

$$\dot{S}_{ij}^* = L_{ijkl} d_{kl}^* \quad (4)$$

$$d_{kl}^* = \frac{1}{2}(v_{k,l}^* + v_{l,k}^*)$$

이 구성식은 소성 변형상태로부터 탄성제하가 없다고 가정한 선형비교고체(linear comparison solid)<sup>(9)</sup>에 관한 것으로  $L_{ijkl}$ 은 소성성분만을 갖는다. 그런데 식 (3)은  $v_i^*$ 에 대한 동차방정식이 되므로 분지점은 이 동차방정식이 변형해석 과정에서  $v_i^*$ 에 대하여 비자명 해를 갖는 점으로 구해지고 동차방정식의 고유 모우드로서 분지 모우드가 얻어진다.

† 일반적으로 비균질 경계조건(inhomogeneous boundary condition)에 대한 표면력속도  $\dot{T}_i$ 는

$$\dot{T}_i = \dot{t}_i + f_i(v)$$

로 표현된다<sup>(12)</sup>. 여기서 우변의 제 1항은 속도(방향과 면적의 변화)에 무관한 현 위치만의 함수이고, 제 2항은 유체압력, 탄성구속, 공구의 반력 및 마찰력과 같이 그 크기와 방향이 속도에 의존하는 함수이다. 본 연구에서는 무마찰 다이로 통한 원관의 인발 또는 노우징공정을 평면변형하에서 원관의 외주에 균일한 반경방향의 압축변형이 작용하고 있는 것으로 이상화하고 있으므로 표면력 속도  $\dot{T}_i$ 는

$$\dot{T}_i = \dot{t}_i$$

로 주어진다.

### 2.2 구성식

본 연구에서는 응력상태가 전부하조건을 만족하고 있으므로 아탄성 J2 변형이론을 구성식으로서 이용한다. 비압축성 재료에 대한 아탄성 J2 변형이론의 구성식은 다음과 같이 유도된다<sup>(1)</sup>.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'_{ij} &= D_{ijkl} d_{kl} \\ D_{ijkl} &= \frac{E_s}{3} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &\quad - \beta \frac{(E_s - E_t)}{\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \\ \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \end{aligned} \quad (5)$$

$\beta=0$ : 탄성변형 ( $E_s=E$ ),  $\beta=1$ : 소성변형  
여기서  $\bar{\sigma}'_{ij}$ 는 Cauchy 응력  $\sigma_{ij}$ 의 Jaumann속도,  $E_t$ 와  $E_s$ 는 각각 단축 인장에 있어서 진응력-변형률 곡선의 접선계수(tangent modulus)와 할선계수(secant modulus)이다.  $E$ 는 종탄성계수(Young's Modulus)이다. 식 (5)를 변형의 주방향에 있어서 Cauchy 응력속도  $\bar{\sigma}'_i$ 와 대수 변형률 속도  $\dot{\epsilon}_i$  ( $\dot{\epsilon}_i = \ln \lambda_i$ ,  $\lambda_i$ 는 주 변형률)로 나타내면

$$\bar{\sigma}'_i = \frac{2}{3} E_s \dot{\epsilon}_i - \beta \frac{(E_s - E_t)}{\bar{\sigma}^2} \sigma'_i \sigma'_k \dot{\epsilon}_k \quad (6)$$

본 연구에서와 같이 변형 주축이 회전하지 않고 재료내에 고정되어 있는 경우는 식 (6)은 다음과 같이 적분된다<sup>(11)</sup>.

$$\sigma'_i = \frac{2}{3} E_s \epsilon_i \quad (7)$$

### 2.3 기본해석

Fig. 1에 표시한 2종류의 다른 비압축성 재료로 구성된 복합원관이 축방향 평면변형 상태하에서 외

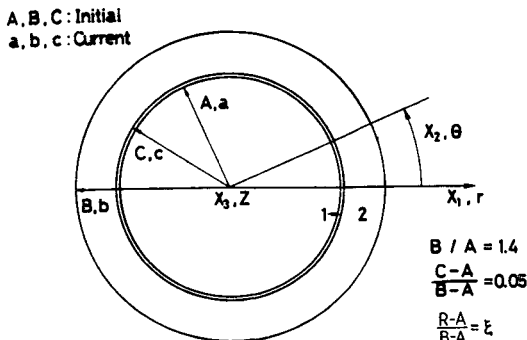


Fig. 1 Cross section of the composite tube and coordinate system

주에 반경방향의 균일한 압축변형을 받는 경우의 기본해를 구한다. 재료의 단축응력-변형률 관계는 다음과 같이 가정하였다.

$$\epsilon / \epsilon_{yi} = \begin{cases} \sigma / \sigma_{yi} & , \sigma_{yi} \geq \sigma \\ (\sigma / \sigma_{yi})^{n_i} & , \sigma_{yi} < \sigma \end{cases} \quad (8)$$

$i=1$ (내층),  $2$ (외층). 여기서  $\sigma_{yi}$ 는 항복응력,  $n_i$ 는 가공경화지수이다. 복합원관이 전면 소성변형을 할 때 반경  $r$ 에서의 응력성분은 식 (7), 식 (8)과 축대칭 변형에 대한 평형방정식

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (9)$$

로부터 다음과 같이 구해진다.

재료 1내에서

$$\sigma_{r1} = -\hat{B}_1 \int_a^r \frac{1}{r} (\ln \frac{R}{r})^{1/n_1} dr \quad (10)$$

$$\sigma_{\theta 1} = \sigma_{r1} - \hat{B}_1 (\ln \frac{R}{r})^{1/n_1}$$

재료 2내에서

$$\sigma_{r2} = -\hat{B}_2 \int_a^c \frac{1}{r} (\ln \frac{R}{r})^{1/n_2} dr$$

$$- \hat{B}_2 \int_c^r \frac{1}{r} (\ln \frac{R}{r})^{1/n_2} dr$$

$$\sigma_{\theta 2} = \sigma_{r2} - \hat{B}_2 (\ln \frac{R}{r})^{1/n_2}$$

$$\sigma_{z k} = (\sigma_{r k} + \sigma_{\theta k}) / 2$$

$$B_k = \frac{4}{3} E_k^{1/n_k} (\frac{2}{\sigma_{yk} \sqrt{3}})^{1/n_k - 1}, \quad k=1, 2$$

체적 일정조건  $a = \sqrt{b^2 - B^2 + A^2}$ ,  $r = \sqrt{b^2 - B^2 + R^2}$ 을 이용하여 (10)식을 수치적분 하면 원관의 반경 방향 압축에 따른 원관 내부의 축대칭 변형상태에 대한 응력분포를 구할 수 있다.

### 2.4 분기해석

원관이 어느 한도를 넘어서 압축변형을 받으면 식 (9)로 주어지는 해(기본해)의 연장선상에 있는 해 이외에 다른 해(분지해)가 존재하게 된다. 여기서는 이 분지해로서 원주방향의 불균일 변형을 허용하는 비축대칭 변형을 고려하여 분지해석을 통하여 분지점 및 분지모우드를 구한다<sup>(1,2)</sup>. 분지해도 비압축성 조건을 만족하는 것으로 생각하면  $r, \theta$  방향 변위속도의 물리성분  $v_r^*$ ,  $v_\theta^*$ 은 유동함수(flow function)  $\varphi$ 를 이용하여 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_r^* = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_\theta^* = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (11)$$

변형률 성분과 변위속도 성분은 다음과 같이된다.

$$\begin{aligned}
 d_{rr}^* &= -d_{\theta\theta}^* = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \\
 2d_{r\theta}^* &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\
 v_{r,r}^* &= -v_{\theta,\theta}^* = d_{rr}^* \\
 v_{r,\theta}^* &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\
 v_{\theta,r}^* &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

분지발생 조건에 대한 Hill의 변분방정식 (3)은 식 (5)와 식 (12)를 이용하여 정리하면 식 (13)과 같이 된다.

$$\delta I = 0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_a^c \left[ A_1 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right)^2 \right. \\
 &\quad + B_1 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right)^2 + \sigma_{r_1} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right)^2 \\
 &\quad + \sigma_{\theta_1} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \Big] r dr d\theta \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} \int_c^b \left[ A_2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right)^2 \right. \\
 &\quad + B_2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right)^2 \\
 &\quad \left. + \sigma_{r_2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right)^2 + \sigma_{\theta_2} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right] r dr d\theta
 \end{aligned}$$

$$A_k = \frac{4}{3} E t_k - \sigma_{r_k} - \sigma_{\theta_k},$$

$$B_k = E s_k - (\sigma_{r_k} + \sigma_{\theta_k})/2, \quad k=1, 2$$

변위속도  $v_r^*$ ,  $v_\theta^*$ 에 대한 경계조건을

$$\begin{aligned}
 v_{r,\theta=0}^* &= v_{r,\theta=2\pi}^* \\
 v_\theta &= 0, \quad \theta=0, 2\pi
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

고려하면 유동함수는  $\theta$ 방향에 Fourier급수 전개한 식 (15)로 근사시킬 수 있다.

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(r) \sin(m\theta) \tag{15}$$

여기서  $\varphi_m$ 은  $r$ 만의 함수로서 분지모우드 진폭을 나타내고  $m$ 은 원주방향의 파장 수, 모우드번호를 나타낸다.

식 (15)를 식 (13)의 분지범함수  $I$ 에 대입하여 삼각함수의 직교성을 이용하여 적분하면 분지모우드 별로 분지범함수 식 (16)을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{m=0}^{\infty} \\
 I_m &= \pi \int_a^c \left[ A_1 m^2 \left( \frac{1}{r^2} \varphi_m - \frac{1}{r} \varphi_m' \right)^2 \right. \\
 &\quad + B_1 \left( \frac{m^2}{r^2} \varphi_m - \frac{1}{r} \varphi_m' + \varphi_m'' \right)^2 + \sigma_{r_1} (\varphi_m'')^2 \\
 &\quad \left. + \sigma_{\theta_1} \left( \frac{m^2}{r^2} \varphi_m - \frac{1}{r} \varphi_m' \right)^2 \right] r dr
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \pi \int_a^b \left[ A_2 m^2 \left( \frac{1}{r^2} \varphi_m - \frac{1}{r} \varphi_m' \right)^2 \right. \\
 &\quad + B_2 \left( \frac{m^2}{r^2} \varphi_m - \frac{1}{r} \varphi_m' + \varphi_m'' \right)^2 + \sigma_{r_2} (\varphi_m'')^2 \\
 &\quad \left. + \sigma_{\theta_2} \left( \frac{m^2}{r^2} \varphi_m - \frac{1}{r} \varphi_m' \right)^2 \right] r dr
 \end{aligned}$$

여기서  $( )' = d( )/dr$ ,  $( )'' = d^2( )/dr^2$ 이다. 분지범함수  $I_m$ 은 원관을 반경방향으로 선 요소 분할하여 분지모우드 진폭을 요소간에 기울기까지 연속인 Hermite 형의 형상 함수를 이용하여 근사시키는 것에 의해 다음과 같은 매트릭스로 표시할 수 있다.

$$Im = \{ \delta_m^* \}^T [K_m] \{ \delta_m^* \} \tag{17}$$

여기서  $\{ \delta_m^* \}$ 는 전 절점에 있어서  $\varphi_m$  및  $\varphi_m'$ 의 값으로 이루어진 벡터이다.

식 (17)을 변분방정식 식 (13)에 대입하면 식 (13)은  $\{ \delta_m^* \}$ 를 미지수로 다음과 같은 동차방정식이 된다.

$$[K_m] \{ \delta_m^* \} = 0, \quad m=1, 2, 3 \dots \tag{18}$$

따라서 영 벡터가 아닌  $\{ \delta_m^* \}$ 가 존재하면 분지가 발생한 것이므로 분지발생 조건은 다음과 같다.

$$\det[K_m] = 0, \quad m=1, 2, 3 \dots \tag{19}$$

기본해를 구하는 각 증분 단계에서 식 (19)가 만족되는지를 조사하는 것에 의해 분지발생을 알 수 있다. 분지모우드는 분지점에 있어서의 식 (19)의 고유모우드  $\{ \delta_m^* \}$ 로서 구해진다.

### 3. 해석결과 및 고찰

복합원관의 형상은 Fig. 1과 같이 내외층의 두께비가  $\frac{C-A}{B-A} = 0.05$ 인 얇은 내층을 갖는 원관을 가정 하였다.

원관의 두께를 선 요소로 분할하고 유한요소법을 이용하여 분지해석을 행할 때 요소의 크기는 자유내표면 및 내외층의 경계면에서 작게하고 원관의 내부로 갈수록 지수함수적으로 크게하였다. 이 경우에 최소요소의 크기를 원관 두께의 약 1/5000로 하였다. 이 정도의 분할에 의해 매우 고차의 분지모우드까지 충분히 나타낼 수 있다. 원관의 내표면은 근사적으로 평면변형하에서 단축압축 상태에 있으므로 Hill-Hutchinson의 표면형 분지발생조건<sup>(10)</sup>으로 부터 분지점은 다음 식으로 주어진다.

$$1 - n \ln \frac{A}{a} \left[ \left\{ \frac{1 + 2 \ln \frac{A}{a}}{1 - 2 \ln \frac{A}{a}} \right\}^{1/2} - 1 \right] = 0 \tag{19}$$

단일원관의 경우에는 분지해석에서 구한 분지모우드 번호  $m=500$ 에 해당하는 표면형 분지발생점이 식 (19)에서 구한 값과 소수점 3자리까지 일치하고 있다<sup>(1,2)</sup>.

Fig. 2는 단일원관에서 가공경화지수  $n$ 에 따른 분지모우드와 분지점에 대응하는 원관 외주의 압축 변형률  $-\ln(b/B)$ 의 관계를 나타낸다. 재료의 경화율이 작을수록(가공경화지수가 높을수록) 장파장의 분지가, 한편 경화율이 클수록 단파장의 분지가 변형중 제일 먼저 발생하고 있음을 (한계 분지점) 알 수 있다. 또한 일반적인 경향으로서 장파장 한계분지 모우드번호는  $n$ 값에 무관하게  $m=6$ 정도로 일정하고, 경화가 클수록  $m$ 값의 변화에 대한 분지

점  $-\ln(b/B)$ 의 변화가 적다.

복합원관의 내외층의 재료특성비  $\alpha=n_1/n_2$ ,  $\beta=\sigma_{e1}/\sigma_{y2}$ ,  $\gamma=E_1/E_2$ 의 변화가 장파장 분지 및 단파장 표면형 분지 발생에 미치는 영향을 Fig. 3~Fig. 5에 나타내었다. 재료특성을 변화시킬 때 외층의 재료특성값은  $E_2=21000.0\text{kgf/mm}^2$ ,  $\sigma_{y2}=40\text{kgf/mm}^2$ 으로 일정하게 하였다. Fig. 3과 Fig. 4에서  $m=500$ 에 대응하는 표면형 분지점은  $\alpha$ ,  $\beta$ 의 변화에 대하여 비교적 영향이 적고, Fig. 2와 비교하면 내층의 재료와 동일한 재료로 이루어진 단일원관의 분지점과 거의 일치한다. 이것은 표면형 분지의 발생위치는 원관의 자유 내표면이므로 내층재료의 특성에 의하여 분지점이 지배되기 때문이다. 단층원

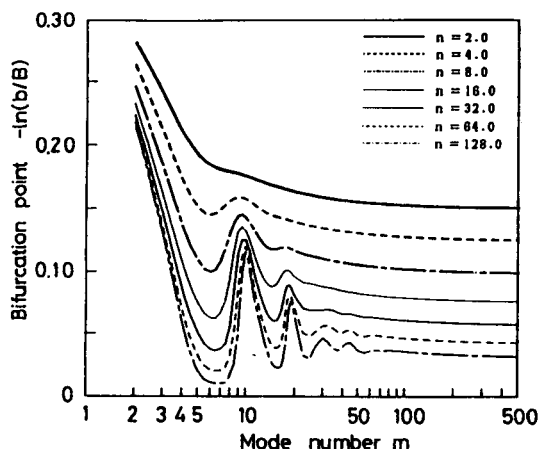


Fig. 2 Mode number  $m$  versus bifurcation strain  $-\ln b/B$  for single tube

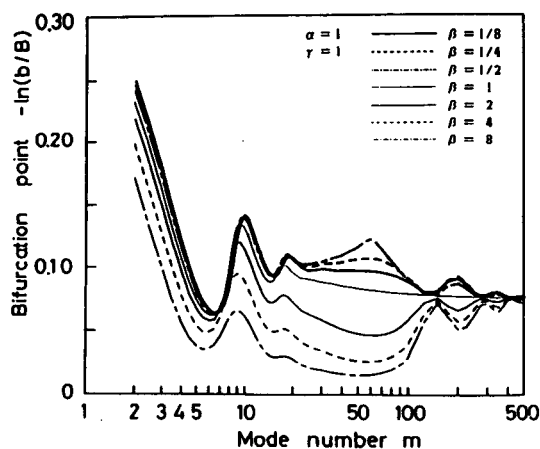


Fig. 4 Effect of yield stress ratio  $\beta$  on bifurcation behaviour for composite tube

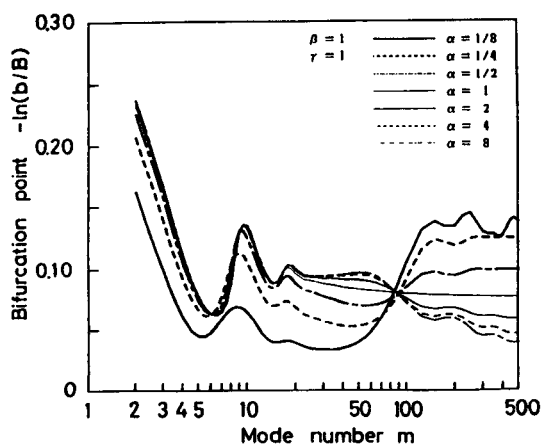


Fig. 3 Effect of hardening ratio  $\alpha$  on bifurcation behaviour for composite tube

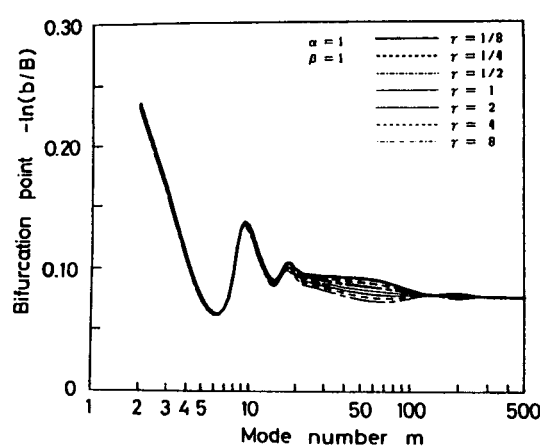


Fig. 5 Effect of elastic modulus  $\gamma$  on bifurcation behaviour for composite tube

관에서는 항복응력은 분지현상에 영향을 미치지 않는다. 즉 분지점은 항복응력값에 관계없이  $\beta=1$ 의 경우가 된다. 그러나 복합재료의 경우 장파장 분지점에 대해서는  $\alpha, \beta$ 의 변화에 대한 영향이 강하게

나타나 내층재료의 가공경화율이 외층재료보다 큰 경우 ( $\alpha < 1$ ) 및 내층재료의 항복응력이 외층재료의 항복응력보다 작은 경우 ( $\beta > 1$ )인 경우에 내층의 재료와 동일한 재료로 된 단일 원관보다 변형이 불안정해져서 분지가 먼저 발생하게 된다.

Fig. 5는  $\gamma$ 에 대한 영향을 나타내나 분지점에서 원관은 전면 소성상태에 있으므로 탄성 재료특성의 변화는 분지발생에 크게 영향을 주지않는 것을 알 수 있다. Fig. 6과 Fig. 7은 각각 단일원관과 복합원관의 표면형 분지모우드 형의 변화를 나타낸다. 그림에서  $\xi = (R-A)/(B-A) = 0.05$ 는 내외층의 경계를 나타내고 분지모우드의 진폭  $v_0^*$ 는 최대진폭을 1로 하여 무차원화 하였다.

$\alpha$ 값이 작게될수록 내표면에서 최대이었던 모우드 진폭이 점차 과도기적인 상태를 거쳐  $\alpha=0.25$ 인 경우에는 Fig. 7(c)와 외층의 내부, 내외층 경계면 근처, 에서 최대 진폭이 얻어진다. 또 외층까지 미친 분지모우드의 감쇠는 Fig. 6의 경우와 비교하여 감쇠도가 작고 불균일 변형의 영향이 내부 깊숙한 곳까지 이르고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

복합원관이 축방향 평면변형 상태하에서 외주에 균일한 압축변형을 받는 경우에 대하여 분지 해석을 행하였다. 표면형 분지발생점은 내외층의 재료 특성비의 변화에 대하여 별로 영향을 받지 않고, 내층의 재료와 동일한 재료로 된 단일 원관의 분지점과 거의 일치한다. 그러나 장파장 분지발생점은 재료특성의 영향을 강하게 받아 내층재료의 가공경화율이 외층보다 큰 경우는 단일원관의 경우보다 장파장 분지가 먼저 발생한다. 한편 내층의 가공경화율이 클수록( $\alpha < 1$ ) 표면형 분지 모우드의 최대진폭은 외층 원관의 내부, 내외층 경계면 근처, 에서 얻어지고 그 영향이 외층 원관 깊숙히 까지 미친다.

참 고 문 헌

(1) Tomita, Y., Shindo, A. and Kim, Y. S., 1985, "Plane Strain Bifurcation Behaviours of Thick Circular Tubes Subjected to Uniform Drawing at External Surface", Trans. JSME, Vol. 50-467A, p. 1872.  
 (2) Kim, Y. S., Tomita, Y. and Shindo, A., 1988,

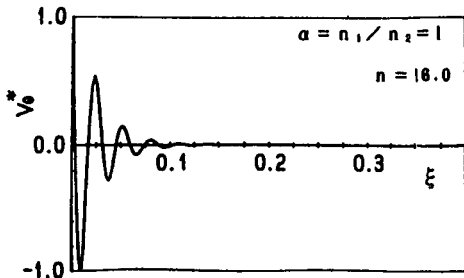


Fig. 6 Decay rate of physical velocity component  $v_0^*$  for single tube

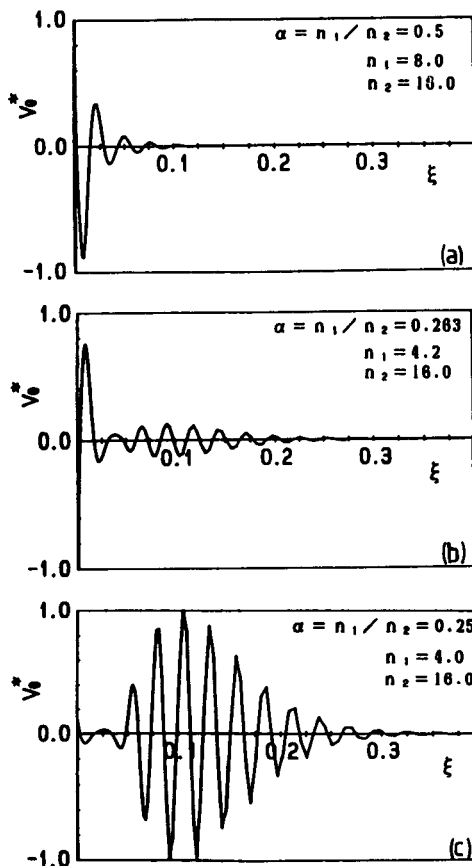


Fig. 7 Decay rate of physical velocity component  $v_0^*$  for composite tubes (a)  $\alpha=0.5$ , (b)  $\alpha=0.263$ , (c)  $\alpha=0.25$

- "Bifurcation and Post-Bifurcation Phenomena of Elastic-Plastic Circular Tubes Subjected to Uniform Shrinkage Under Plane Strain Condition", *Computational Mechanis*, Vol. 4, p. 211.
- (3) Tomita, Y., Shindo, A. and Kitagawa, H., 1981, "Bifurcation and Post-bifurcation Behaviour of Internally Pressurized Elastic-Plastic Circular Turbes under Plane Strain Conditions", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 23, p. 723.
- (4) Dorris, J.F. and Nemat-Nasser, 1980, "Instability of a Layer on a Half Space", *Trans. ASME., J. Appl. Mech.*, Vol. 47-2, p. 304.
- (5) Steif, P.S., 1987, "On the Deformation Instabilities in Clad Metals Subjected to Rolling", *J.Appl. Metalworking*, Vol. 4, p. 317.
- (6) Christoffersen, J. and Hutchinson, J. W., 1979, "A Class of a Phenomenological Corner Theories of Plasticity", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.27-5/6, p. 465.
- (7) Budiansky, B., 1959, "A Reassessment of Deformation Theories of Plasticity", *J. Appl. Mech.*, Vol. 26-2, p. 259.
- (8) Needleman, A. and Tvergaard, V., 1977, "Necking of Biaxially Stretched Elastic-Plastic Circular Plates", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 25-3, p. 159.
- (9) Hill, R., 1958, "A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 6-3, p. 236.
- (10) Hill, R. and Hutchinson, J.W., 1975, "Bifurcation Phenomena in Plane Strain Tension", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23-4/5, p. 239.
- (11) Neal, K.W., 1981, "Phenomenological Constitutive Laws in Finite Plasticity", *Solid Mech. Arch.*, Vol. 6-1, p. 79.
- (12) Hill, R., 1962, "Uniqueness Criteria and Extremum Principles in Self-Adjoint Problems of Continuum Mechanics", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 10, p. 185.