

〈論 文〉

곡선보의 강성 과잉 현상과 고유치에 관한 연구

민옥기* · 김용우** · 유동규**

(1989년 12월 16일 접수)

A Study on the Stiffness Locking Phenomena and Eigen Problem in a Curved Beam

Oak-Key Min, Yong-Woo Kim and Dong-Kyu Yoo

Key Words : Stiffness Locking Phenomena(강성 과잉 현상), True Constraint(진성 구속), Spurious Constraint(가성 구속), Unmodified Interpolation Function(무수정 내삽 함수), Unmodified Shape Function(무수정 형상 함수), Unmodified Strain(무수정 변형률), Modified Interpolation Function(수정 내삽 함수), Modified Shape Function(수정 형상 함수), Modified Strain(수정 변형률), Total Spurious Strain Energy(전체 가상 변형 에너지)

Abstract

A three-noded, with three degree-of-freedom at each node, in-plane curved beam element is formulated and employed in eigen-analysis of constant curvature beam. The conventional quadratic shape functions used in a three noded C^0 type curved beam element produce such an undesirable large stiffness that a significant error is introduced in displacements and stresses. These phenomena are called 'Stiffness Locking Phenomena', which result from spurious strain energy due to inappropriate assumptions on independent isoparametric quadratic interpolation functions. Stiffness locking phenomena can be alleviated by using modified interpolation functions which get rid of spurious constraints of conventional interpolation functions. Eigenvalues and their modes as well as displacements and stresses may be locked because they are related to stiffness. Using modified curved beam element in eigenvalue problem of cantilever and arch, the property and performance of modified curved beam element are examined by numerical experimentations. In these eigen-analyses, mass matrices are calculated by using both modified and unmodified curved beam element, are compared with theoretical solutions. These comparisons show that the performance of the modified curved beam element is better than that of the unmodified curved beam element.

1. 서 론

곡선보(curved beam element)는 그 자체로도 유

용하게 사용될 뿐 아니라 곡선보 요소의 특성을 갖고 있는 셸과 같은 일반적인 곡선 요소 해석시 발생하는 문제점을 해결하기 위해 관심의 대상이 되고 있다. 변위와 회전에 대해 각각 독립적인 동일 차수의 내삽 함수를 사용하면, 복잡한 C^1 요소 사용을 피하여 오직 C^0 연속 조건만을 충족시키는

*정회원, 연세대학교 기계공학과

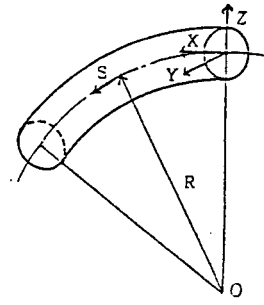
**정회원, 연세대학교 대학원

간단한 내삽 함수를 사용할 수 있는 등 여러 장점이 있다. 그러나 C^0 연속 조건만을 충족시켜 전통적인 요소를 사용하면 강성이 실제값보다 크게 계산되어, 변위 및 응력에 큰 오차를 발생시킨다. 이러한 현상을 강성 과잉(stiffness locking)현상이라 하며, 이 때의 오차는 요소의 크기를 세분하여도 쉽게 없어지지 않는다⁽¹⁾. 보의 강성 과잉 현상을 해결하기 위해 제시된 대표적인 방법으로는 감차적분(reduced integration)^(2,3)과 Hybrid and Mixed Method⁽⁴⁾ 등이 있다. 최근에, Prathap⁽⁵⁾은 강성 과잉 현상에 대한 새로운 관점에서의 연구를 시도하였다. 즉 강성 과잉 현상의 원인이 형상 함수(shape function)의 가정이 잘못됨으로써 가성 구속(spurious constraint)을 유발하고, 이 가성 구속은 가성 에너지(spurious energy)를 유발시킴으로써 오차를 발생시킨다는 것이다. 이 연구에서는, 강성 과잉 현상을 해결하기 위해, 각 변형률(strain)에 포함되는 변위에 대한 내삽 함수의 구속(constraint)상태를 조사하고, 실제의 구속인 진성 구속(true constraint)과 강성 과잉 현상을 일으키는 가성 구속(spurious constraint)으로 분류한 후, 가성 구속이 나타나지 않도록 새로운 형상 함수(shape function)를 구하여 사용하는 방법을 제시하였다.

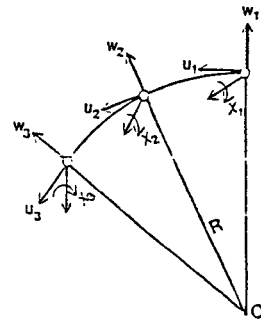
본 논문에서는 강성에 관련된 변위 및 응력 뿐만 아니라 고유치 및 고유 진동형에도 역시 강성 과잉 현상이 일어날 수 있으므로, 가성 에너지를 제거하는 방법을 티모센코 보(Timoshenko beam)와 아치(arch)의 고유치 문제에 적용하여 수치 실험을 통해 그 특성 및 성능을 검토한다.

2. 곡선보 요소

곡선보 요소의 해석을 위해 Fig. 1(a)와 같이 기하학적 형상을 정의하는 곡선 좌표계와 보의 거동을 나타내기 위해 직각 좌표계를 사용한다. 곡선 좌표계의 좌표축 S 는 보의 중심선과 일치하고, R 은 보의 곡률 반경이다. 직각 좌표계는 곡선 좌표계의 좌표축 S 를 따라 이동하는 이동 좌표계이다. 곡선보 요소는 Fig. 1(b)와 같이 절점당 3개의 자유도를 갖는 isoparametric quadratic element를 사용한다. 자유도 u , w 는 각각 X 축, Z 축 방향의 변위이고, x 는 Y 축 방향의 회전이다. 평면 곡선보의 운동 에너지 T 는



(a) Coordinates for curved beam element



(b) Displacements and angular rotation

Fig. 1 Schematic view of a constant curvature curved beam

$$T = \int_{-l}^l \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 ds + \int_{-l}^l \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 ds + \int_{-l}^l \frac{1}{2} I \rho \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 ds \quad (1)$$

이다. 여기서 m 은 단위 길이당의 질량, $I\rho$ 는 단위 길이당의 Y 축에 대한 질량 관성 모우멘트이다. 평면 곡선보의 변형 에너지 U 는

$$U = \int_{-l}^l \frac{1}{2} EA \epsilon_s^2 ds + \int_{-l}^l \frac{1}{2} KG A \gamma_{xz}^2 ds + \int_{-l}^l \frac{1}{2} EI_y k_y^2 ds \quad (2)$$

이다. 여기서 E 는 종탄성 계수, G 는 횡탄성 계수, K 는 전단 수정 계수, A 는 보의 단면적이고, I_y 는 Y 축에 대한 2차 모우멘트이다. ϵ_s 는 S 축에 대한 인장변형률, γ_{xz} 는 $X-Z$ 평면상의 전단 변형률이며, k_y 는 $X-Z$ 평면상의 곡률이다.

곡선보 요소의 변위 벡터 \vec{u} 와 변형률 벡터 $\vec{\epsilon}$ 를

$$\vec{u} = \{u, w, x\}^T \quad (3)$$

$$\vec{\epsilon} = \{\epsilon_s, \gamma_{xz}, k_y\}^T \quad (4)$$

으로 정의할 때, 변위와 변형률의 관계는

$$\vec{\epsilon} = L \vec{u} \quad (5)$$

이고, 여기서 L 은 미분 연산자로서 다음과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{d}{ds} & 1 \\ \frac{d}{Rds} & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \quad (6)$$

3. 강성 과잉 현상에 대한 고찰

평면 곡선보 요소를 수식화할 때, C^0 연속 조건만을 만족시키는 동일 차수의 전통적인 형상 함수를 사용하여 구한 인장 변형 에너지와 전단 변형 에너지에는 가성 변형 에너지가 포함된다. 이 가성 변형 에너지는 적절하지 못한 형상 함수를 사용함으로써 발생하는 가성 구속에 기인한다. 이러한 가성 구속으로 인하여 요소의 강성(stiffness)은 실제 값보다 크게 계산된다^(2,3,5,14). 따라서 강성과 관련된 양(예: 변위, 응력, 고유치 및 고유 벡터 등)들은 전통적인 형상 함수를 사용할 경우 필연적으로 오차를 발생시키게 된다. 이와 같은 현상들은, 문제가 되는 강성에 따라 막 강성 과잉(membrane locking), 전단 강성 과잉(shear locking) 등으로 불리운다. 이들 모두가 강성이 실제값보다 크게 계산되어 오차가 발생하는 현상으로서, 강성 과잉 현상(stiffness locking phenomena)이라 부른다.

위와 같은 강성 과잉 현상을 제거하기 위해서는 전통적인 형상 함수로부터 가성 구속에 의해 생긴 가성 변형 에너지를 제거해야 한다. 여기서 전통적인 내삽 함수를 무수정 내삽 함수(unmodified interpolation function)로, 가성 구속 조건을 제거한 내삽 함수를 수정 내삽 함수(modified interpolation function)로 정의한다. 또한 이 내삽 함수에 해당하는 형상 함수를 각각 무수정 형상 함수(unmodified shape function), 수정 형상 함수(modified shape function)라 하고, 이를 이용하여 구한 변형률을 무수정 변형률(unmodified strain) 및 수정 변형률(modified strain)이라 정의한다.

3.1 인장 변형 에너지

길이 2ℓ 인 곡선보의 길이 방향에 대한 무차원 좌표(s/ℓ)의 2차 다항식으로 표현되는 Lagrange 내삽 함수를 사용하여 변위 u 와 w 를 정의하면

$$u = a_0 + a_1(s/\ell) + a_2(s/\ell)^2 \quad (7)$$

$$w = b_0 + b_1(s/\ell) + b_2(s/\ell)^2 \quad (8)$$

이고, $a_i, b_i (i=0,1,2)$ 는 상수이다. 식 (7)과 식 (8)을 절점 변수(nodal variable)를 사용하여 나타내면

$$u = u_2 + \frac{u_3 - u_1}{2}(s/\ell) + \frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{2}(s/\ell)^2 \quad (9)$$

$$w = w_2 + \frac{w_3 - w_1}{2}(s/\ell) + \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{2}(s/\ell)^2 \quad (10)$$

이다. 따라서, 인장 변형 에너지 U_E 는

$$U_E = EA \ell \left[\left[\frac{u_3 - u_1}{2\ell} + \frac{w_2}{R} + \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{6R} \right]^2 + \frac{1}{3} \left[\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{\ell} + \frac{w_3 - w_1}{2R} \right]^2 + \frac{4}{45} \left[\frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{2R} \right]^2 \right] \quad (11)$$

으로 표시된다.

곡선보의 길이 대 두께의 비가 충분히 커짐에 따라서 인장 변형 에너지에 의한 계의 전체 변형 에너지에의 기여분이 점차로 감소하여 0에 수렴할 경우, 인장 변형 에너지는 식 (11)에서처럼 완전 제곱식의 형태로 표현할 수 있으므로 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\frac{u_3 - u_1}{2\ell} + \frac{w_2}{R} + \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{6R} \longrightarrow 0 \quad (12a)$$

$$\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{\ell} + \frac{w_3 - w_1}{2R} \longrightarrow 0 \quad (12b)$$

$$\frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{2R} \longrightarrow 0 \quad (12c)$$

식 (12)는 유한 차분식의 형태이므로 이에 상당하는 미분식으로 다시 쓰면

$$u_{,s} + \frac{w}{R} \longrightarrow 0 \quad (13a)$$

$$\ell \left(u_{,ss} + \frac{w_{,s}}{R} \right) \longrightarrow 0 \quad (13b)$$

$$w_{,ss} \frac{\ell^2}{2R} \longrightarrow 0 \quad (13c)$$

이다.

인장 변형이 없는 경우에 식 (13a), (13b)는 Rayleigh 가정⁽⁶⁾ 즉, $u_{,s} + w/R = 0$ 을 만족시킨다. 반면에 식 (13c)는 변위 w 에 대한 2차 내삽 함수의 계수 b_2 가 0이 되어야 한다는 것을 의미한다. 그러나, 변위 w 를 2차 내삽 함수로 표현할 경우 b_2 는 0이 될 수 없다. 따라서 식 (13c)는 적절하지 못한 내삽 함수를 사용함으로써 생기는 불필요한

가성 구속 조건이고, 강성 과잉 현상을 일으키는 원인이 된다. 따라서, 무수정 내삽 함수에 의해 계산된 인장 변형 에너지는 Rayleigh 가정을 만족시켜 인장 변형이 없는 경우에 사라질 수 있는 변형 에너지와 인장 변형이 없는 경우일지라도 남아 있어 강성 과잉 현상을 일으키는 가상 변형 에너지로 구성된다. 식 (11)의 인장 변형 에너지는 변형 에너지의 특성에 따라 다음과 같이 표현된다⁽¹⁴⁾.

$$U_E = \bar{U}_E + \frac{4}{45} E A I \left[\frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{2R} \right]^2 \quad (14)$$

여기서, \bar{U}_E 는 Rayleigh 가정을 만족하여 인장 변형이 없는 경우 사라질 수 있는 변형 에너지이며, 실제 인장 변형 에너지와 관련이 있는 항이다. 반면에, 마지막 항은 가상 구속에 의한 가상 변형 에너지 항이다.

변위 w 의 식 (10)에서, 식 (13c)의 가상 구속에 해당하는 2차항을 소거한 1차 내삽 함수를 사용하는 변위 w 를 \bar{w} 로 표시하면

$$\bar{w} = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 (s/\ell) \quad (15)$$

이며, 여기서 \bar{b}_0, \bar{b}_1 은 상수이다. 식 (15)을 이용하여 인장 변형 에너지를 계산하면 가상 구속에 의한 가상 변형 에너지는 제거되어 강성 과잉 현상은 일어나지 않고, 인장 변형 에너지 U_E 는

$$U_E = \bar{U}_E \quad (16)$$

로 된다. 변위 w 를 \bar{w} 로 대체하여 사용하는 수정 인장 변형률(modified extensional strain) $\bar{\epsilon}_s$ 는

$$\bar{\epsilon}_s = u_{s,s} + \frac{\bar{w}}{R} \quad (17)$$

이다.

3.2 전단 변형 에너지

길이 2ℓ 인 곡선보의 길이 방향에 대한 무차원 좌표 (s/ℓ) 의 2차 다항식으로 표현되는 Lagrange 내삽 함수를 사용하여 회전각 x 를 정의하면

$$x = c_0 + c_1 (s/\ell) + c_2 (s/\ell)^2 \quad (18)$$

이고, $c_i (i=0,1,2)$ 는 상수이다. 식 (18)을 절점 변수(nodal variable)를 사용하여 표현하면

$$x = x_2 + \frac{x_3 - x_1}{2} (s/\ell) + \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{2} (s/\ell)^2 \quad (19)$$

이다. 식 (10)으로 표시되는 w 와 식 (19)로 표시되는 x 를 이용하여 전단 변형 에너지 U_s 를 표시하면

$$U_s = G K A I \left[\left[x_2 - \frac{w_3 - w_1}{2\ell} + \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \right]^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \left[\frac{x_3 - x_1}{2} + \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{\ell} \right]^2 + \frac{4}{45} \left[\frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{2} \right]^2 \right] \quad (20)$$

이다.

곡선보의 길이 대 두께 비가 충분히 커짐에 따라서 전단 변형 에너지에 의한 계의 전체 변형 에너지에 기여분이 점차로 감소하여 0에 수렴할 경우, 전단 변형 에너지는 식 (20)에서처럼 완전 제곱식의 형태로 표현할 수 있으므로 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$x_2 - \frac{w_3 - w_1}{2\ell} + \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \rightarrow 0 \quad (21a)$$

$$\frac{x_3 - x_1}{2} - \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{\ell} \rightarrow 0 \quad (21b)$$

$$\frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{2} \rightarrow 0 \quad (21c)$$

식 (21)은 유한 차분식의 형태이므로 이에 상당하는 미분식으로 다시 쓰면

$$x - w_{,s} \rightarrow 0 \quad (22a)$$

$$\ell (x_{,s} - w_{,ss}) \rightarrow 0 \quad (22b)$$

$$\frac{\ell^2}{2} x_{,ss} \rightarrow 0 \quad (22c)$$

이다.

길이 대 두께 비가 충분히 커서 전단 변형이 없는 굽힘 변형인 경우에 식 (22a), (22b)는 Euler-Kirchhoff 가정 즉, $x - w_{,s} = 0$ 을 만족시킨다. 반면에, 식 (22c)는 회전각 x 에 대한 2차 내삽 함수의 계수 c_2 가 0이 되어야 한다는 것을 의미한다. 그러나, 회전각 x 를 2차 내삽 함수로 표현할 경우 c_2 는 0이 될 수 없다. 따라서, 식 (22c)는 적절하지 못한 내삽 함수를 사용함으로써 생기는 불필요한 가상 구속 조건이고, 강성 과잉 현상을 일으키는 원인이 된다. 따라서, 무수정 내삽 함수에 의해 계산된 전단 변형 에너지는 Euler-Kirchhoff가정을 만족시켜 전단 변형이 없는 얇은 곡선보의 경우에 사라질 수 있는 변형 에너지와 전단 변형이 없는 경우일지라도 남아 있어 강성 과잉 현상을 일으키는 가상 변형 에너지로 구성된다. 식 (20)의 전단 변형 에너지는 변형 에너지의 특성에 따라 다음과 같이 표현된다⁽¹⁴⁾.

$$U_s = \bar{U}_s + \frac{4}{45} K G A I \left[\frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{2} \right]^2 \quad (23)$$

여기서, \bar{U}_s 는 Euler-Kirchhoff가정을 만족하여 전단 변형이 없는 경우 사라질 수 있는 변형 에너지이며, 실제 전단 변형 에너지와 관련이 있는 항이

다. 반면에, 마지막 항은 가성 구속에 의한 가성 변형 에너지 항이다.

식 (22c)의 가성 구속에 해당하는 회전각 x 의 식 (18)에서 2차항을 소거한 1차 내삽 함수를 사용하는 회전각 x 를 \bar{x} 로 표시하면

$$\bar{x} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1(s/\ell) \quad (24)$$

이며, 여기서 \bar{c}_0, \bar{c}_1 은 상수이다. 식 (24)를 이용하여 전단 변형 에너지를 계산하면 가성 구속에 의한 가성 변형 에너지는 제거되어 강성 과잉 현상은 일어나지 않고, 전단 변형 에너지 U_s 는

$$U_s = \bar{U}_s \quad (25)$$

이다. 회전각 x 를 \bar{x} 로 대체하여 사용하는 수정 전단 변형률(modified shear strain) $\bar{\gamma}_{xz}$ 는

$$\bar{\gamma}_{xz} = \bar{x} - w_{,s} \quad (26)$$

이다.

3.3 굽힘 변형 에너지

식 (9)의 u 와 식 (19)의 w 를 이용하여 길이 2ℓ 인 곡선보의 굽힘 변형 에너지 U_B 를 나타내면

$$U_B = EI_y \ell \left[\left\{ \frac{x_3 - x_1}{2\ell} - \frac{u_3 - u_1}{2R\ell} \right\}^2 + \frac{\ell^2}{3} \left\{ \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{\ell^2} - \frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{R\ell^2} \right\}^2 \right] \quad (27)$$

이다. 굽힘 변형이 없는 경우를 가정하면 굽힘 변형 에너지는 0이 되어야 한다. 굽힘 변형 에너지는 식 (27)과 같이 완전 제곱식의 형태로 표현할 수 있으므로 굽힘 변형 에너지가 0이 되기 위해서는 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$\frac{x_3 - x_1}{2\ell} - \frac{u_3 - u_1}{2R\ell} \rightarrow 0 \quad (28a)$$

$$\frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{\ell^2} - \frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{R\ell^2} \rightarrow 0 \quad (28b)$$

식 (28)은 유한 차분식의 형태이므로 이에 상당하는 미분식으로 다시 쓰면

$$x_{,s} - u_{,s}/R \rightarrow 0 \quad (29a)$$

$$x_{,ss} - u_{,ss}/R \rightarrow 0 \quad (29b)$$

이다. 굽힘 변형이 없는 경우에 식 (29a), (29b)는 굽힘 변형이 0이라는 조건 즉 $x_{,s} - u_{,s}/R = 0$ 을 만족시킨다. 따라서 굽힘 변형 에너지는 인장 변형 에너지나 전단 변형 에너지처럼 가성 구속 조건이 나타나지 아니하므로 2차 내삽 함수를 수정하지 않고 사용한다.

3.4 무수정 내삽 함수의 수정 내삽 함수가 변형 에너지에 미치는 영향

무수정 내삽 함수를 사용하여 곡선보의 변형 에

너지를 나타내면

$$U = \bar{U}_E + \bar{U}_S + U_B + U^* \quad (30)$$

이고, $\bar{U}_E, \bar{U}_S, U_B$ 는 각각 식 (14), (23), (27)에서 정의한 변형 에너지이고, U^* 는 식 (14)와 (23)에서 가성 에너지 항들을 합한 것으로 전체 가성 변형 에너지(total spurious strain energy)이며 다음과 같이 정의한다.

$$U^* = \frac{4}{45} \left[EA\ell \left\{ \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{2R} \right\}^2 + KGA\ell \left\{ \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{2} \right\}^2 \right] \quad (31)$$

식 (31)의 전체 가성 변형 에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다⁽⁴⁾.

$$U^* = \frac{4}{45} EI_y \ell^3 \left[\frac{A\ell^2}{I_y} \left\{ \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{2R\ell^2} \right\}^2 + \frac{KG}{E} \frac{A\ell^2}{I_y} \left\{ \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{2\ell^2} \right\}^2 \right] \quad (32)$$

여기서 $A\ell^2/I_y$ 는 길이 대 두께 비를 나타내주는 무차원 변수이며, 두꺼운 곡선보(thick curved beam)의 $A\ell^2/I_y$ 는 얇은 곡선보(thin curved beam)의 $A\ell^2/I_y$ 보다 상대적으로 작다. 가성 구속에 의한 전체 가성 변형 에너지 값은 두꺼운 곡선보보다 얇은 곡선보에서 상대적으로 크다. 따라서, 무수정 형상 함수를 사용할 경우에 두꺼운 곡선보보다는 얇은 곡선보에서 강성 과잉 현상이 현저하게 나타나고, 내삽 함수에 대한 적절하지 못한 가정으로 인하여 생긴 가성 변형 에너지가 변형 에너지에 포함되어 있어 두꺼운 곡선보에서도 강성 과잉 현상은 발생한다. 반면에, 수정 내삽 함수를 사용하면 가성 변형 에너지는 제거되어서 곡선보의 길이 대 두께의 비에 관계없이 보다 정확한 변형 에너지가 계산된다.

4. 새로운 형상 함수의 유도

절점이 3개인 곡선보에서 모든 자유도를 2차 내삽 함수로 표시할 경우 강성 과잉 현상을 일으키는 가성 구속이 나타나므로, 강성 과잉 현상을 해결하기 위해서 가성 구속을 유발하는 내삽 함수의 2차항을 소거한 새로운 1차 내삽 함수를 대체하여 사용함으로써 가성 구속이 나타나지 않도록 한다⁽⁵⁾.

변위 w 와 회전각 x 를 나타내는 형상 함수를 N_1, N_2, N_3 라 하고, 가성 구속을 제거한 \bar{w} 와 \bar{x} 를 나타내는 형상 함수를 $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ 라 하여, 이 $\bar{N}_i (i=1,2,3)$ 를 구하기 위해 최소 자승법(least

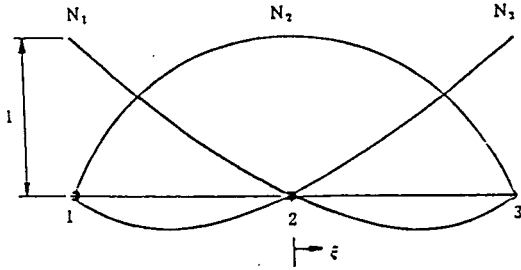


Fig. 2 Profile of unmodified shape functions

squares method)⁽⁷⁾을 사용한다.

가성 구속이 나타나는 변위 w 와 회전각 x 는 변수(field variable) t 로 대표하고, 가상 구속을 제거한 변위 \bar{w} 와 회전각 \bar{x} 는 변수 \bar{t} 로 대표한다. 또한, 절점이 3개인 요소에서 변수 t 의 절점에서의 값을 t_1, t_2, t_3 라 하고, 변수 t 를 2차 형상 함수 $N_i (i=1,2,3)$ 를 사용하여 나타내면

$$t = N_1 t_1 + N_2 t_2 + N_3 t_3 \quad (33)$$

이다. 여기서

$$N_1 = (\xi^2 - \xi) / 2 \quad (34a)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \quad (34b)$$

$$N_3 = (\xi^2 + \xi) / 2 \quad (34c)$$

이고, $\xi = s/l$ 이며 길이 $2l$ 인 요소의 경우 ξ 는 -1 에서 $+1$ 까지 변화한다. 형상 함수 $N_i (i=1,2,3)$ 의 형상은 Fig. 2에 도시한다.

식 (34)를 식 (33)에 대입하면 변수 t 는

$$t = t_2 + \frac{t_3 - t_1}{2} \xi + \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{2} \xi^2 \quad (35)$$

이다. 식 (35)의 변수 t 를 식 (8)과 식 (18)의 형태로 나타내면

$$t = d_0 + d_1 \xi + d_2 \xi^2 \quad (36)$$

이고, 여기서

$$d_0 = t_2$$

$$d_1 = \frac{t_3 - t_1}{2} \quad (37)$$

$$d_2 = \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{2}$$

이다. 가상 구속을 제거하려면 식 (15)의 \bar{w} 와 식 (24)의 \bar{x} 에서처럼 $d_2=0$ 이 되어야 한다. 따라서 가상 구속을 제거한 변수 \bar{t} 는

$$\bar{t} = e_0 + e_1 \xi \quad (38)$$

로 가정한다.

최소 자승법을 사용하여 식 (36)의 2차 내삽 함수로부터 새로운 1차 내삽 함수 \bar{t} 의 계수 e_0, e_1

을 구한다. 식 (36)의 2차 내삽 함수와 식 (38)의 1차 내삽 함수를 사용하여 함수 P 를 다음과 같이 정의한다.

$$P = \int_{-1}^1 (\bar{t} - t)^2 d\xi \quad (39)$$

식 (39)의 함수 P 를 계수 e_0, e_1 에 대하여 최소화하면 다음과 같은 연립 2원 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial P}{\partial e_0} = \frac{2}{3} d_2 + 2(d_0 - e_0) = 0 \quad (40a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial e_1} = \frac{4}{3} (d_1 - e_1) = 0 \quad (40b)$$

식 (40)으로부터 e_0, e_1 을 구하여 식 (38)에 대입하면

$$\bar{t} = (d_0 + d_2/3) + d_1 \xi \quad (41)$$

이 되고, 식 (37)을 이용하여 식 (41)을 다시 쓰면

$$\bar{t} = t_1 \left(\frac{1}{6} - \frac{\xi}{2} \right) + t_2 \left(\frac{2}{3} \right) + t_3 \left(\frac{1}{6} + \frac{\xi}{2} \right) \quad (42)$$

가 된다.

수정 변수 \bar{t} 를

$$\bar{t} = \bar{N}_1 t_1 + \bar{N}_2 t_2 + \bar{N}_3 t_3 \quad (43)$$

과 같이 표시하면, 식 (42)와 식 (43)의 관계로부터 다음과 같은 새로운 형상 함수⁽⁵⁾를 얻는다.

$$\bar{N}_1 = \left(\frac{1}{3} - \xi \right) / 2$$

$$\bar{N}_2 = \frac{2}{3}$$

$$\bar{N}_3 = \left(\frac{1}{3} + \xi \right) / 2 \quad (44)$$

이다. 따라서 가상 구속이 나타나지 않는 항에 대해서는 식 (34)와 같은 무수정 형상 함수를 사용하고 가상 구속이 나타나는 항에 대해서는 식 (44)와 같은 수정 형상 함수를 사용함으로써 강성 과잉 현상을 피할 수 있다. 수정 형상 함수 \bar{N}_i 의 형상은 Fig. 3에 도시하고, 가상 구속을 고려하기 전후의 내삽 함수, 변형률, 형상 함수, 변형 에너지 및 운동 에너지를 Table 1에 요약한다.

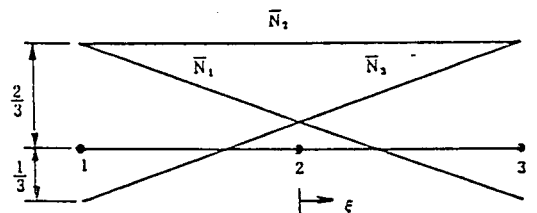


Fig. 3 Profile of modified shape functions

Table 1 Summary of modified and unmodified degree of freedoms, strains, shape functions, potential energy and kinetic energy

	Unmodified	Modified
Degree of freedoms	$u = a_0 + a_1(s/l) + a_2(s/l)^2$ $w = b_0 + b_1(s/l) + b_2(s/l)^2$ $\chi = c_0 + c_1(s/l) + c_2(s/l)^2$	$\bar{w} = \bar{b}_0 + \bar{b}_1(s/l)$ $\bar{\chi} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1(s/l)$
Strains	$\varepsilon_s = u_{,s} + w/R$ $\gamma_{xx} = \chi - w_{,s}$ $k_y = \chi_{,s} - u_{,s}/R$	$\bar{\varepsilon}_s = u_{,s} + \bar{w}/R$ $\bar{\gamma}_{xx} = \bar{\chi} - w_{,s}$
Shape functions	$N_1 = (\xi^2 - \xi)/2$ $N_2 = 1 - \xi^2$ $N_3 = (\xi^2 + \xi)/2$	$\bar{N}_1 = (\frac{1}{3} - \xi)/2$ $\bar{N}_2 = (2/3)$ $\bar{N}_3 = (\frac{1}{3} + \xi)/2$
Potential energy	$\pi = \frac{1}{2} \int_{-l}^l EA (u_{,s} + w/R)^2 ds$ $+ \frac{1}{2} \int_{-l}^l KGA (\chi - w_{,s})^2 ds$ $+ \frac{1}{2} \int_{-l}^l EI_y (\chi_{,s} - u_{,s}/R)^2 ds$	$\pi = \frac{1}{2} \int_{-l}^l EA (u_{,s} + \bar{w}/R)^2 ds$ $+ \frac{1}{2} \int_{-l}^l KGA (\bar{\chi} - w_{,s})^2 ds$ $+ \frac{1}{2} \int_{-l}^l EI_y (\chi_{,s} - u_{,s}/R)^2 ds$
Kinetic energy	$T = \int_{-l}^l \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 ds + \int_{-l}^l \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 ds + \int_{-l}^l \frac{1}{2} I\rho \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 ds$	

5. 강성 행렬과 질량 행렬의 유도

곡선보의 고유 진동수와 고유 진동형을 구하기 위해 곡선보의 자유 진동 문제를 고려한다. 외력에 의한 일이 없는 경우 Hamilton의 원리는

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0 \tag{45}$$

이다. 식 (1)의 운동 에너지와 식 (2)의 무수정 변형률을 식 (12), (13)의 수정 변형률로 대체한 변형 에너지를 식 (45)에 대입하고, 운동 에너지 항을 시간에 대하여 부분 적분을 하면

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{-l}^l m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u ds \right. \\ & + \int_{-l}^l m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w ds \\ & + \int_{-l}^l I\rho \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \delta \chi ds \\ & \left. + \int_{-l}^l EA (u_{,s} + \bar{w}/R) \delta (u_{,s} + \bar{w}/R) ds \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \int_{-l}^l KGA (\bar{\chi} - w_{,s}) \delta (\bar{\chi} - w_{,s}) ds \right. \\ & \left. + \int_{-l}^l EI_y (\chi_{,s} - u_{,s}/R) \delta (\chi_{,s} - u_{,s}/R) ds \right] dt \\ & = 0 \tag{46} \end{aligned}$$

이다.

한편, Fig. 2의 무수정 (2차) 형상 함수를 사용하는 자유도 u, w, χ 와 각 자유도의 공간 좌표 s 에 대한 1차 도함수, 각 자유도의 시간 t 에 대한 2차 도함수와 식 (44)의 수정 형상 함수를 사용하는 자유도 $\bar{w}, \bar{\chi}$ 를 정리하면,

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^3 N_i u_i \\ w &= \sum_{i=1}^3 N_i w_i \\ \chi &= \sum_{i=1}^3 N_i \chi_i \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} \right) u_i \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} \right) w_i \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} \right) x_i \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \sum_{i=1}^3 N_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \sum_{i=1}^3 N_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \sum_{i=1}^3 N_i \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right) \\ \bar{w} &= \sum_{i=1}^3 \bar{N}_i w_i \\ \bar{x} &= \sum_{i=1}^3 \bar{N}_i x_i \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

이다. 여기서 절점에서 정의되는 변위를 벡터로 표시하면

$$\vec{u}_i = \{u_i, w_i, x_i\}^T, \quad i=1,2,3 \quad (48)$$

이고, 요소에서의 변위는 다시 벡터로 표시하여

$$\vec{u} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}^T \quad (49)$$

로 표시한다. 요소에서의 가속도는

$$\vec{\ddot{u}} = \{\vec{\ddot{u}}_1, \vec{\ddot{u}}_2, \vec{\ddot{u}}_3\}^T \quad (50)$$

로 표시할 수 있고, 여기서

$$\vec{\ddot{u}}_i = \{\ddot{u}_i, \ddot{w}_i, \ddot{x}_i\}^T, \quad i=1,2,3 \quad (51)$$

이다.

식 (47)을 식 (46)에 대입하면 식 (52)를 얻는다.

$$M^e \vec{\ddot{u}} + K^e \vec{u} = 0 \quad (52)$$

여기서 K^e 는 강성 행렬로서

$$K^e = \sum_{i,j=1}^3 K_{ij}^e \quad (53)$$

이며, K_{ij}^e 는

$$K_{ij}^e = \int_{-l}^l B_i^{eT} D^e B_j^e ds, \quad i, j=1,2,3 \quad (54)$$

이다. 여기서 탄성 행렬 D^e 는

$$D^e = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & KGA & 0 \\ 0 & 0 & EI_y \end{bmatrix} \quad (55)$$

이고, 행렬 B^e 는

$$B^e = \begin{bmatrix} N_{i,s} & \bar{N}_i/R & 0 \\ 0 & -N_{i,s} & \bar{N}_i \\ N_{i,s}/R & 0 & N_{i,s} \end{bmatrix} \quad (56)$$

이다.

그리고 M^e 는 질량 행렬로서

$$M^e = \sum_{i,j=1}^3 M_{ij}^e \quad (57)$$

이며, M_{ij}^e 는

$$M_{ij}^e = \int_{-l}^l N_i^{eT} P^e N_j^e ds, \quad i, j=1,2,3 \quad (58)$$

이다. 여기서 관성 행렬 P^e 는

$$P^e = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_\rho \end{bmatrix} \quad (59)$$

이고, 행렬 N_i^e 는

$$N_i^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (60)$$

이다.

식 (60)의 형상 함수 N_i 는 2차 형상 함수 (quadratic shape function)이며, 절점 i 에서 1이고 절점 i 이외의 절점에서 0이다. 따라서, 가우스-르장드르 수치 적분법 (Gauss-Legendre quadrature)과 가우스-로바토 수치 적분법 (Gauss-Lobatto quadrature)에 의해서 질량 행렬을 계산하면 각각

$$M^e = \frac{h^e}{30} \begin{bmatrix} 4m & 0 & 0 & 2m & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ & 4m & 0 & 0 & 2m & 0 & 0 & -m & 0 \\ & & 4I_\rho & 0 & 0 & 2I_\rho & 0 & 0 & -I_\rho \\ & & & 16m & 0 & 0 & 2m & 0 & 0 \\ & & & & 16m & 0 & 0 & 2m & 0 \\ \text{SYM} & & & & & 16I_\rho & 0 & 0 & 2I_\rho \\ & & & & & & 4m & 0 & 0 \\ & & & & & & & 4m & 0 \\ & & & & & & & & 4I_\rho \end{bmatrix} \quad (61)$$

과

$$M^e = \frac{h^e}{6} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & I_\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 4m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 4m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{SYM} & & & & & 4I_\rho & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & m & 0 & 0 \\ & & & & & & & m & 0 \\ & & & & & & & & I_\rho \end{bmatrix} \quad (62)$$

으로 되며, 여기서 h^e 는 요소의 길이, 즉 $h^e=2l$ 이다. 위의 각 질량 행렬을, 사용한 수치 적분 방법에 따라서 각각 가우스-르장드르 질량 행렬 (Gauss-Legendre mass matrix), 가우스-로바토 질량 행렬 (Gauss-Lobatto mass matrix)라 정의한다.

6. 검 토

수식화한 곡선보 요소는 인장 변형을 포함하고

있기 때문에 곡선보의 고유 진동형은 인장 변형의 영향이 거의 없는 굽힘 모드(almost entirely inextensional-flexural mode)와 인장 변형의 영향이 큰 인장 모드(almost entirely extensional mode) 등으로 분류할 수 있다⁽⁶⁾. 두께가 얇은 경우에 저차 모드(lower mode)에서는 굽힘 모드만이 나타나고, 두께가 두꺼운 경우에는 저차 모드에서 인장 모드 및 굽힘 모드가 나타난다.

반면 참고문헌 (8~10)에서 제시한 이론해는 인장 모드를 무시하고 굽힘 모드만을 고려한 고유 진동수와 고유 진동형을 제시하고 있다. 따라서 두께가 두꺼울 경우 저차 모드에 대한 이론해와 수치해를 서로 비교할 수가 없다. 그 이유는 이론해와 수치해가 고려하는 모드가 다르기 때문이다.

인장 변형을 무시하고, 굽힘 모드만을 고려한 이론해와 비교하기 위해서 외팔보에 대해 다음과 같이 고려한다. 인장 변형률 ϵ_s 는 $\epsilon_s = u_{,s} + w/R$ 로 표시된다. 인장 모드를 무시하고, 굽힘 모드만을 고려한다는 것은 $\epsilon_s = 0$ 을 의미한다. 외팔보의 경우에는 반경 $R \rightarrow \infty$ 이므로 $\epsilon_s = u_{,s}$ 이다. 따라서, 외팔보의 경우 각 절점에서 X축 방향의 변위 u 를 고정시키면, 인장 모드를 무시하고, 굽힘 모드만을 고려한 경우의 고유 진동수와 고유 진동형을 구할 수 있다.

반면에 아치의 경우는 곡률 반경 R 이 유한한 값이므로 각 절점에서 X축 방향의 변위 u 를 고정시켜도 인장 변형률 $\epsilon_s = w/R \neq 0$ 이다. 따라서 두께가 두꺼운 아치의 경우 참고문헌에 제시된 이론해와 비교할 수 없다.

외팔보(Fig. 4)와 양단이 고정된 아치(Fig. 5)의 고유 진동수와 고유 진동형에 대해 첫째, 요소의

갯수를 증가시키기에 따른 수치해의 이론해와의 수렴 속도, 둘째, 곡선보의 길이 대 두께의 비의 변화에 따른 수치해의 정확도, 셋째, 질량 행렬의 수치 적분에 따른 수치해의 정확도 등의 관점에서 수치 실

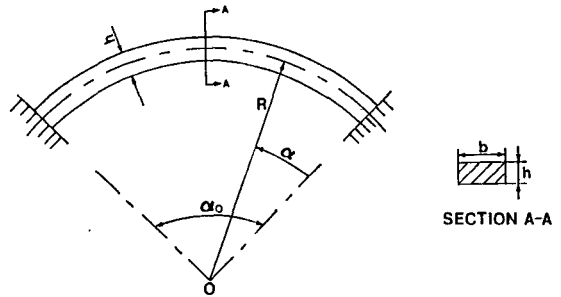
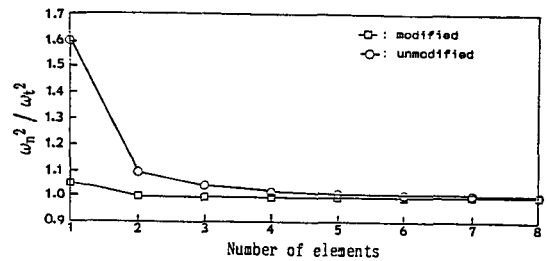
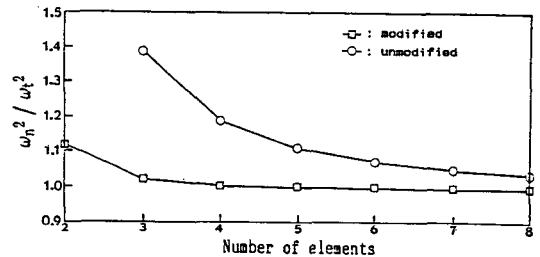


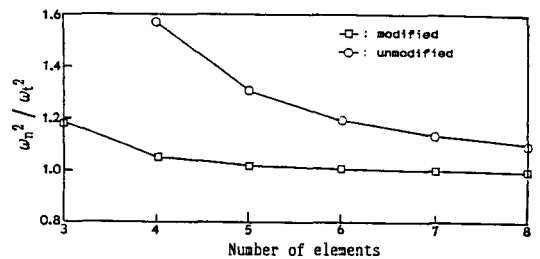
Fig. 5 Geometry of clamped-clamped arch (opening angle $\alpha_0 = \pi/2$)



(a) First mode



(b) Second mode



(c) Third mode

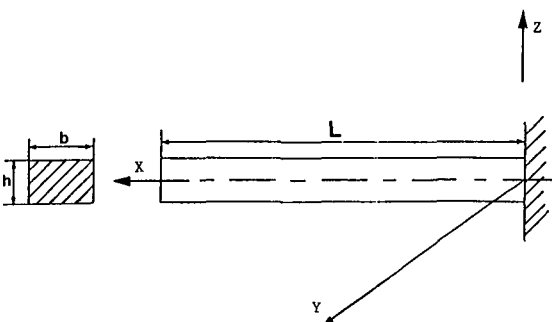


Fig. 4 Geometry of cantilever

Fig. 6 Dimensionless natural frequencies of cantilever in terms of number of elements with $h/L = 1/200$ and Gauss-Legendre mass matrix

험을 실시하여 그 결과들을 비교, 검토한다.

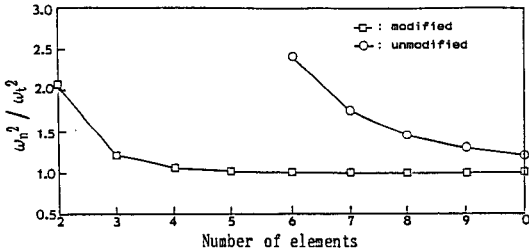
수치 실험을 통해 얻은 결과를 나타낸 Fig. 6, Fig. 7, Figs. 10~Fig. 13에서 사용한 기호는 다음과 같은 의미를 갖는다.

- ω_t : theoretical natural angular frequency
- ω_n : numerical natural angular frequency
- A : area of cross section of cantilever
- L : length of cantilever
- I_y : area moment of inertia about Y axis

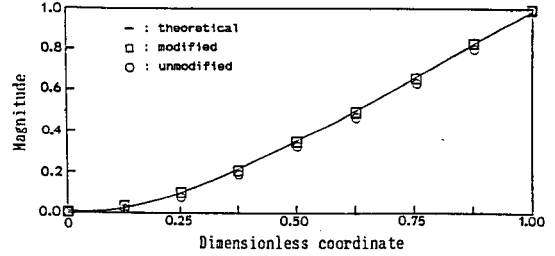
6.1 요소의 수를 증가시키에 따른 이론해에의 수렴 속도

외팔보는 두께 대 길이의 비(h/L)를 1/200으로

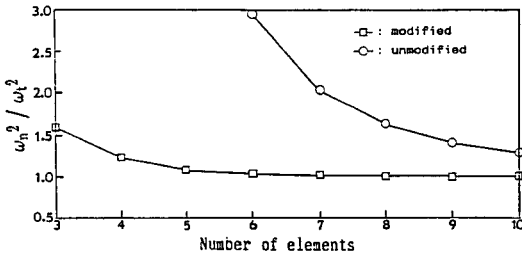
가정하고, 양단이 고정된 아치는 두께 대 반경의 비(h/R)를 1/100으로 가정한다. 질량 행렬은 식 (61)의 Gauss-Legendre 수치 적분에 의한 질량 행렬(Gauss-Legendre mass matrix)을 사용하고, 수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수의 무수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수를 이론해^(8~10)와 비교한 결과를 외팔보는 Fig. 6에, 아치는 Fig. 7에 도시한다. Fig. 6과 Fig. 7에서 보는 바와 같이 요소의 갯수를 증가시키에 따라 수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수가, 무수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수보다 이론해에 빨리 수렴한다. 또한, 고유 진동형을 비교하기 위해 외팔보는 요소의 수를 4개로, 양단이



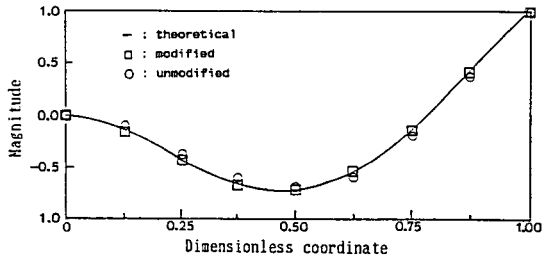
(a) First mode



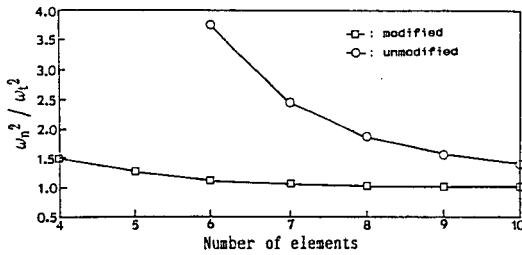
(a) First mode



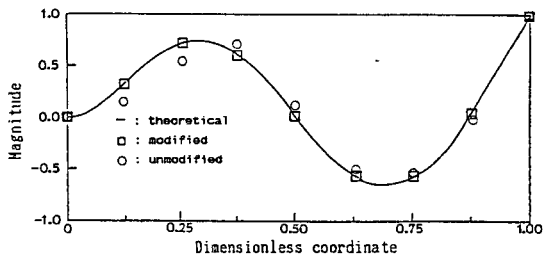
(b) Second mode



(b) Second mode



(c) Third mode



(c) Third mode

Fig. 7 Dimensionless natural frequencies of clamped-clamped arch in terms of number of elements with $h/R=1/100$ and Gauss-Legendre mass matrix

Fig. 8 Mode shapes of cantilever with $h/L=1/200$, 4 elements and Gauss-Legendre mass matrix

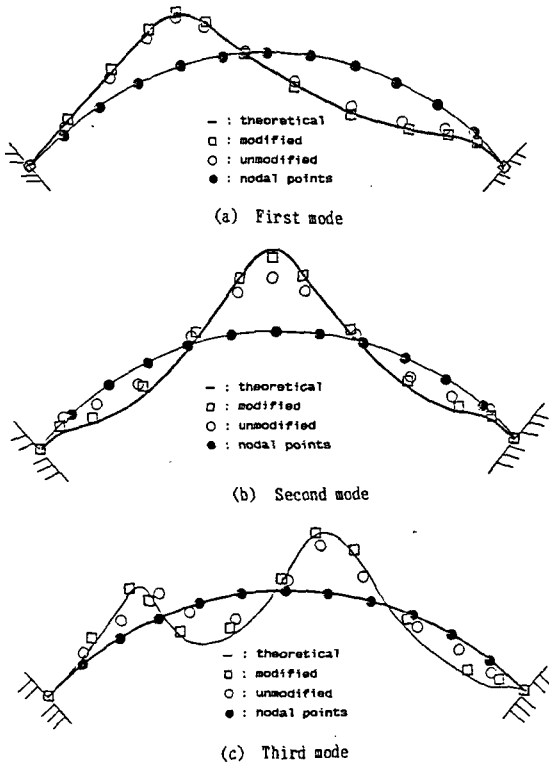


Fig. 9 Mode shape of clamped-clamped arch with $h/R=1/100$, 6 elements and Gauss-Legendre mass matrix

고정된 아치는 요소의 수를 6개로 하여, 수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동형과 무수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동형을 이론 진동형과 비교한 결과를 각각 Fig. 8, Fig. 9에 도시한다. Fig. 8과 Fig. 9를 검토해 보면, 수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동형은 무수정 형상 함수를 사용하여 계산된 진동형보다 이론 진동형에 더욱 근사한 결과를 보이고 있다.

6.2 곡선보의 길이 대 두께의 비의 변화에 따른 해의 정확도

6.1절에서 사용한 외팔보를 요소 3개로 모델링하고, 질량 행렬은 식 (61)의 Gauss-Legendre 질량 행렬을 사용하고 두께를 증가시키에 따라 수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수와 무수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수를 이론해와 비교한 결과를 각각 Fig. 10에 도시한다. Fig. 10에서 보는 바와 같이 수정 형상 함수에 의한 고

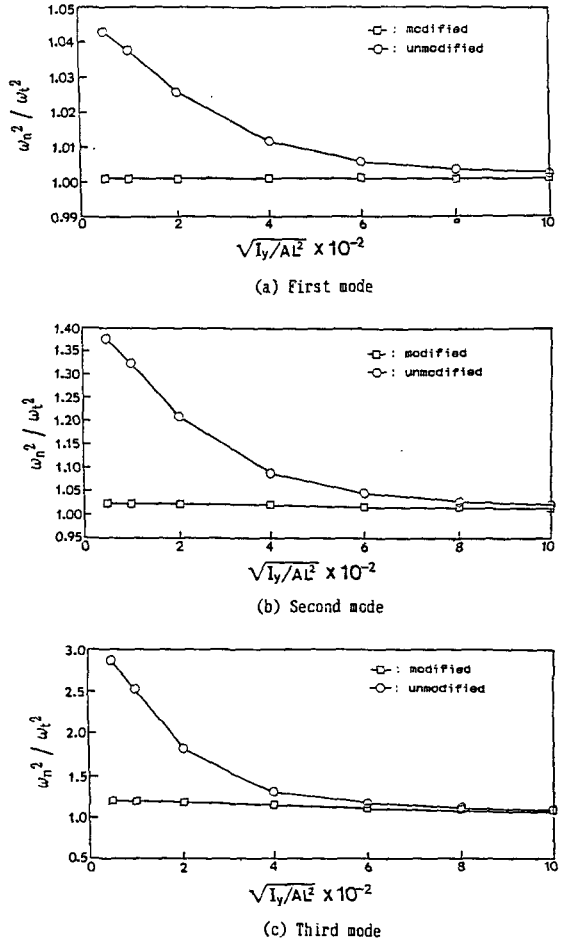
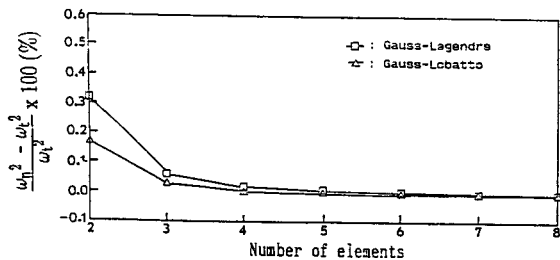


Fig. 10 Dimensionless natural frequencies of cantilever in flexural mode in terms of the ratio of thickness to length with 3 elements and Gauss-Legendre mass matrix

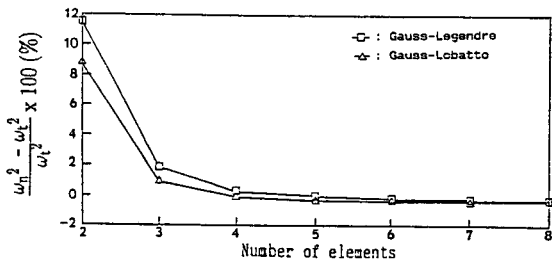
유 진동수는 곡선보의 두께 대 길이의 비에 관계없이 무수정 형상 함수에 의한 고유 진동수보다 이론해와 잘 일치한다. 그리고 식 (32)에서 나타낸 것과 같이 무수정 형상 함수에 의한 고유 진동수는 두께 대 길이의 비가 작은 경우 이론해와 상당한 오차를 보이고, 두께 대 길이의 비가 큰 경우일지라도 수정 형상 함수에 의한 고유 진동수에 비해 이론해와 오차를 보인다.

6.3 질량 행렬에 따른 수치해의 비교

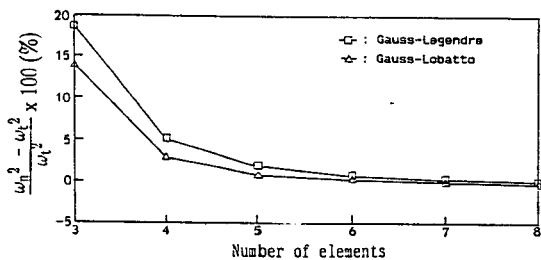
6.1절에서 검토한 외팔보와 아치, 6.2절에서 검토한 외팔보에 대하여 수정 형상 함수를 사용하고



(a) First mode

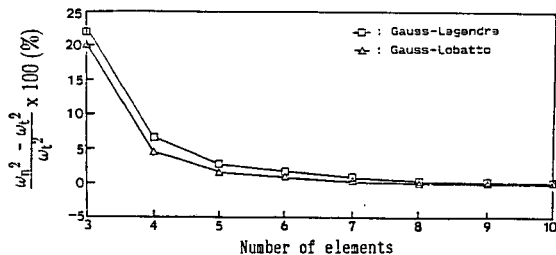


(b) Second mode

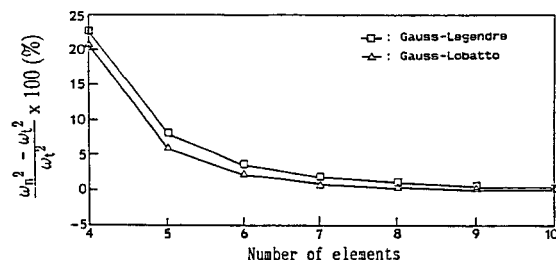


(c) Third mode

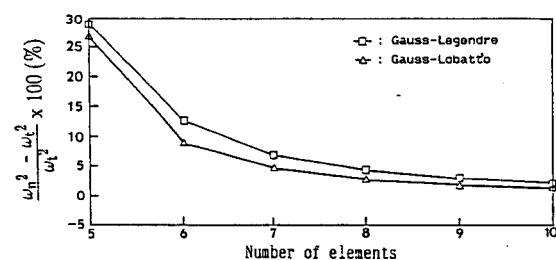
Fig. 11 Comparison of natural frequencies of cantilever obtained by Gauss-Legendre and Gauss-Lobatto mass matrix in terms of the number of elements with $h/L=1/200$ and modified shape function



(a) First mode



(b) Second mode



(c) Third mode

Fig. 12 Comparison of natural frequencies of clamped-clamped arch obtained by Gauss-Legendre and Gauss-Lobatto mass matrix in terms of the number of elements with $h/R=1/100$ and modified shape function

질량 행렬이 Gauss-Legendre 수치 적분에 의한 질량 행렬(Gauss-Legendre mass matrix)인 경우와 Gauss-Lobatto 수치 적분에 의한 질량 행렬(Gauss-Lobatto mass matrix)인 경우의 고유 진동수를 이론해와 비교한다.

첫번째로, 6.1절에서 검토한 외팔보와 아치에 대하여 요소의 수를 증가시키기에 따른 이론해의 수렴 속도를 비교한 결과를 외팔보는 Fig. 11에, 아치는 Fig. 12에 도시한다. 외팔보와 아치에 대한 결과에서 중측은 계산된 고유 진동수와 이론 고유 진동수의 오차를 이론 고유 진동수에 대한 백분율

(percentage)을 나타내고 횡축은 각 모델에서 사용한 요소의 수를 나타낸다. Fig. 11, Fig. 12를 검토하여 보면, 수정 형상 함수를 사용할 경우 Gauss-Lobatto 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수가 Gauss-Legendre 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수보다 외팔보와 아치 모두 이론해에 빨리 수렴한다.

두번째로 6.2절에서 검토한 외팔보에서 길이 대 두께의 비의 변화에 따른 해의 정확도를 비교한 결과를 Fig. 13에 도시한다. 외팔보에 대한 결과에서, 중측은 계산된 고유 진동수와 이론 고유 진동

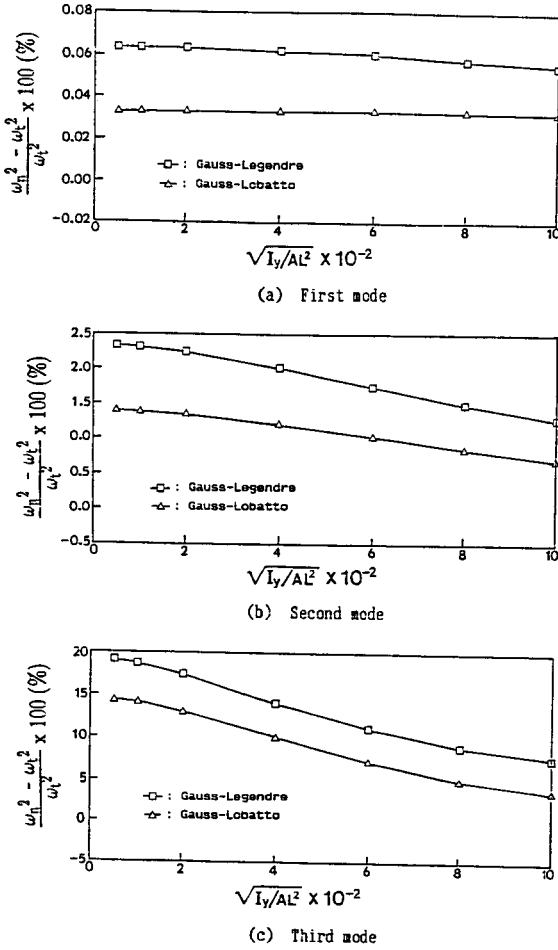


Fig. 13 Comparison of natural frequencies of cantilever in flexural mode obtained by Gauss-Legendre and Gauss-Lobatto mass matrix in terms of the ratio of thickness to length with 3 elements and modified shape function

수의 오차를 이론 고유 진동수에 대한 백분률 (percentage)을 나타내고, 횡축은 두께 대 길이의 비를 나타낸다. Fig. 13을 검토하여 보면, 외팔보에서 수정 형상 함수를 사용할 경우 Gauss-Lobatto 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수가, Gauss-Legendre 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수보다 두께 대 길이의 비에 관계없이 이론해에 더 근사함을 알 수 있다.

7. 결 론

본 논문에서는 절점이 3개이고, 각 절점당 3개의

자유도를 갖는 평면 곡선보 요소 (in-plane curved beam element)를 수치화하였으며, 곡선보 해석시 발생하는 강성 과잉 현상 (stiffness locking phenomena)을 해결하기 위해 각 변형률에 포함되는 변위에 대한 내삽 함수의 구속 상태를 조사하여 실제의 구속인 진성 구속 (true constraint)과 강성 과잉 현상을 일으키는 가성 구속 (spurious constraint)로 분류한 다음, 가성 구속이 나타나지 않도록 새로운 형상 함수를 구하여 적용하는 방법⁽⁵⁾을 사용하였다.

곡선보의 강성 과잉 현상을 해결하기 위해 제시된 수정 형상 함수의 타당성을 입증하기 위해 외팔보와 양단이 고정된 아치를 모델로 선정하여, 이 모델들의 고유치 및 고유 진동형의 이론해와 전통적인 무수정 형상 함수를 사용하는 보요소의 수치 해석 결과 및 수정형상 함수를 사용하는 보요소의 수치 해석 결과를 비교 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 수정 형상 함수에 의해 계산된 고유 진동수와 고유 진동형은 가성 구속에 의한 가성 변형 에너지가 제거됨에 따라, 무수정 형상 함수에 의해 계산된 고유 진동수와 고유 진동형보다 적은 수의 요소를 사용하여도 이론해에 빨리 수렴하는 결과를 얻을 수 있다.

(2) 외팔보에서는 보의 두께 대 길이의 비에 관계없이, 수정된 보요소를 사용하여 구한 고유 진동수는 전통적인 보요소를 사용하여 구한 고유 진동수보다 이론 고유 진동수에 더 근사하다.

(3) 수정 형상 함수를 사용하는 보요소에서, 가우스-로바토 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수가 가우스-르장드르 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수보다 이론 고유 진동수에 더 근사하다.

후 기

본 논문의 내용은 한국과학재단의 1989년도 연구비 지원에 의하여 이루어진 것임.

참 고 문 헌

(1) Walz, J.E., Cyrus, N.J. and Eppink, R.T., 1970, "Accuracy of Finite Element Approximations to Structural Problems", NASA TN-D 5728.

- (2) Prathap, G. and Bhashyam, G.R., 1982, "Reduced Integration and Shear Flexible Beam Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 195~210.
- (3) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 172~176.
- (4) Lee, S.W. and Pian, T.H.H., 1978, "Improvement of Plate and Shell Finite Elements by Mixed Formulations", *AIAA J.*, Vol. 16, No. 1, pp. 29~34.
- (5) Prathap, G. and Ramesh Babu, C., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (6) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., 1961, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, pp. 278~287.
- (7) Jeyachandrabose, C. and Kirkhope, J., 1984, "Least Squares Strain Smoothing for the Eight-Node Serendipity Plane Stress Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp. 1164~1166.
- (8) Veletsos, A.S., et al., 1979, "Free In-Plane Vibration of Circular Arches", *Proceedings of the ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 98, pp. 311~329.
- (9) Huang, T.C., 1961, "The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of the Uniform Beams with Simple and Conditions", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 28, pp. 579~584.
- (10) Blevins, R.D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company, pp. 203~223.
- (11) Bathe, K.J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, pp. 666~696.
- (12) Hughes, T.J.R., 1987, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, New Jersey, pp. 436~451.
- (13) Zienkiewicz, O.C., 1977, *The Finite Element Method*, MacGraw-Hill, New York, pp. 535~539.
- (14) G. Prathap and C. Ramesh Babu, 1986, "Field-consistent Strain Interpolation for the Quadratic Shear Flexible Beam Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1973~1984.